

翼伞系统最优归航轨迹设计的敏感度分析方法

梁海燕¹, 任志刚¹, 许超^{1†}, 言金²

(1. 浙江大学 智能系统与控制研究所 工业控制技术国家重点实验室, 浙江 杭州 310027;

2. 中航工业航宇救生装备有限公司, 湖北 襄阳 441003)

摘要: 本文对三自由度翼伞系统归航轨迹优化问题进行了研究, 采用控制变量参数化与时间尺度变换相结合的优化算法对翼伞系统的最优控制问题进行数值求解. 该方法是基于灵敏度分析的优化算法, 将控制量以及控制量转换时间转化为一组参数优化问题同时进行求解. 仿真结果表明, 相对于基于两端边值优化算法而言, 灵敏度分析法只需要正向积分进行求解, 因而具有计算简单、耗时短等优点, 其控制效果良好, 距离偏差和方向偏差均满足实际需求, 有效地提高了翼伞系统的着陆精度, 验证了该优化算法的可行性.

关键词: 翼伞; 轨迹优化; 时间尺度变换; 参数化; 优化; 灵敏度分析

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Optimal homing trajectory design for parafoil systems using sensitivity analysis approach

LIANG Hai-yan¹, REN Zhi-gang¹, XU Chao^{1†}, YAN Jin²

(1. State Key Laboratory of Industrial Control Technology, Institute of Cyber-Systems and Control, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China;

2. AVIC Aerospace Lifesaving Equipment CO. LTD, Xiangyang Hubei 441003, China)

Abstract: We investigate the control problem with three degrees-of-freedom (3DOF) for the parafoil system in the optimal homing trajectory design. The control parameterization and time-scaling techniques are employed to generate numerical solutions. The method is based on an optimization algorithm of sensitivity analysis in which control variables and their transform time are converted to an optimization problem of a series of parameters for simultaneous solving. Simulation results demonstrate the effectiveness of our computational optimal control algorithm. Instead of solving the two-point boundary value problem (TBVP) from the Pontryagin maximum principle (PMP), we propose a method that requires only the integration of the state ODE and the sensitivity system with known initial conditions for all the equations, making the computational cost much less than that in solving the TBVP. Although the dimension of the sensitivity system is higher than that of the adjoint equation of the TBVP, it still can reduce the computational cost significantly. This method can effectively improve the accuracy in landing a parafoil system and reduce the control energy consumption, showing the feasibility of the proposed optimization algorithm.

Key words: parafoil; trajectory optimization; time-scaling transformation; parameterization; optimization; sensitivity analysis

1 引言(Introduction)

随着科学技术的发展和军事战略思想的转变, 实现精确空投和“定点无损”着陆在军事、航空航天等领域的应用越来越广泛. 在现代化的战争中, 货物、武器、物资等能够通过空投的方式送到目标点, 使得地面部队可以得到及时的物资供给, 方便快捷; 面对重大的自然灾害, 通过空投的方式可以第一时间赶赴受灾区将救援物资投递至目标点, 完成紧急物资救援任

务^[1]; 在航天事业中, 可以利用空投回收技术对飞船、导弹(发射试验数据和控制系统回收)以及卫星等飞行器进行回收, 一方面可以有效减少空中垃圾, 另一方面还可以对资源进行回收再利用^[2]; 此外, 翼伞系统在民用领域中也都有所应用, 最常见的有滑翔伞运动项目, 以及利用动力滑翔伞进行空中观光、广告和航拍等. 可控翼伞具有可控性、滑翔性等优点, 可以做简单的转弯动作, 克服了传统空投技术准确性、安全

收稿日期: 2014-09-12; 录用日期: 2015-05-06.

[†]通信作者. E-mail: cxu@zju.edu.cn; Tel.: +86 571-87952233-1165.

国家高技术研究发展计划项目(“863”计划)(2012AA041701), 国家自然科学基金项目(61473253), 赛博(CYBER)协同创新中心项目资助.

Supported by National High Technology Research and Development Program of China (“863” Plan) (2012AA041701), National Science Foundation of China (61473253) and Innovation Joint Research Center for Cyber-Physical-Society System.

性不足等问题,在现代战争、救灾等领域中有着广泛的应用前景^[3].翼伞系统的结构图如图1所示.

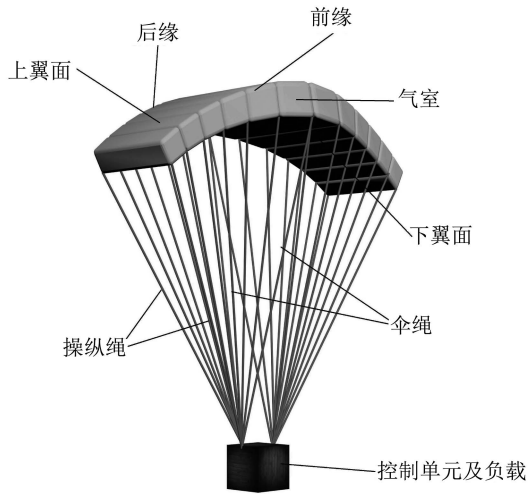


图1 翼伞系统结构图

Fig. 1 The structure of parafoil system

翼伞从产生到现在已有50多年的历史^[4],对翼伞系统归航轨迹的研究大致可分为3种方法:径向归航、锥形归航等简单归航法;使控制能量最小的最优控制归航法^[5];以及分段归航法^[6-7].最优控制归航是以最优控制理论为基础,通过求解得到满足特定性能指标的翼伞系统归航的最优控制律和相应的归航轨迹.求解最优控制轨迹的数值算法有很多,如文献[8-10];1972年, Pearson对翼伞系统最优控制归航问题的求解进行了一些理论上的研究,采用解析的方法得到了一种次优反馈控制规律^[11];1974年, Wei和Pearson采用微分动态规划的方法对能够到达目标点、不含控制约束、所需控制能量最少的翼伞系统最优控制问题进行了求解和分析^[12];1977年, Pearson, Wei和Koopersmith对翼伞系统的归航采用分段参数优化的次优控制方法,简化了计算并得到了整个控制过程的解析解^[13-14];2001年, Gimadieva采用了直接迭代法对翼伞系统的最优控制问题进行了求解,但其仅从数学的角度进行了分析^[15];2003年,王锋辉对翼伞系统的最优控制问题进行了一些理论上的公式推导,但没有进行求解和分析^[16];2005年,熊菁通过对六自由度模型进行分析提取出了质点模型,采用了共轭梯度法对翼伞系统的最优控制问题进行了求解^[17];2011年,焦亮等以翼伞系统的三自由度质点模型为基础,提出基于混沌粒子群优化算法的翼伞系统轨迹规划的方法^[18-19];2013年,高海涛等提出了一种基于 Gauss伪谱法的归航轨迹容错设计方法,利用 Gauss伪谱法分别对不同工作状态下轨迹规划的最优控制问题进行求解^[20].

本文在总结前人经验的基础上,从实现精确空投,“定点无损”着陆和航空航天飞行器回收发展的需

求出发,提出了一种新型的最优控制计算方法对翼伞系统轨迹优化问题进行求解,该方法是基于最优控制计算的变量参数化方法,在对系统控制量进行优化的同时对控制变量时间切换点也进行优化.相对于粒子群等智能优化算法而言,变量参数化方法具有较快的计算速度;相对于伪谱法而言,变量参数化方法保持了动态最优控制问题的特征,将模型离散和数值优化进行分离,可权衡计算复杂度和动态系统离散精度二者之间的关系;相对于共轭梯度法,采用正向求解的灵敏度分析算法替代了共轭梯度法的两端边值求解,大大减少了计算复杂度和计算时间.在后面的章节中,将变量参数化方法与传统的标准粒子群算法(PSO)作对比,仿真结果表明,相对于标准粒子群算法,本文所采用的方法控制效果较好,耗时较短,在可达范围内,其距离偏差和方向偏差均能达到实际需求,方向舵机动作少,有效地提高了翼伞系统的着陆精度,为我国进一步发展翼伞精确空投及回收系统提供了必要的理论基础和技术方案.

2 翼伞系统数学模型(Mathematical model of parafoil system)

翼伞系统所选择的运动方程与待研究的问题是密切相关的,如要了解翼伞系统主要组成部分——伞体和回收物的相互影响及相对运动时,需要建立九自由度的两体相对运动模型;研究翼伞系统整体的运动状态,不仅包括运动轨迹,也包括运动姿态等,需要建立翼伞系统的六自由度运动模型(包括随质心的平动和绕质心的转动);在飞行器的初始设计阶段,为了粗略了解飞行轨迹、飞行性能,仅需建立质心运动方程.本论文中仅研究翼伞系统的飞行轨迹和飞行性能,故建立翼伞系统的三自由度模型,这个简化模型在轨迹优化中被广泛使用^[1-2, 5-6, 17].

在对翼伞系统六自由度仿真计算的结果和稳定运动的特性进行深入分析和总结的基础上,提炼出的三自由度质点模型^[17]基于以下假设:

- 1) 翼伞是展面对称的,伞衣完全张满后具有固定的形状(后缘的下偏操纵除外);
- 2) 负载与翼伞刚性连接成一个整体;
- 3) 在稳定下降段,翼伞系统看做一个质点,在重力和气动力的作用下达到了平衡,系统的垂直下落速度 v_z 和水平飞行速度 v_s 保持不变;
- 4) 翼伞对控制输入的响应无延迟;
- 5) 平面大地,且水平风场已知.

翼伞系统确定后,雀降操纵实施的高度可以确定,此动力学非平衡过程作为已知过程,可不包括在飞行轨迹的设计过程中.因此,整个翼伞系统归航轨迹以翼伞完全展开后系统的初步稳定点为起点,雀降操纵的实施点为终点.

本文以目标点为坐标系的原点, 以水平风的风向作为X轴的方向, Z轴垂直地面向上, Y轴依照右手系来确定, 建立一个大地坐标系, 如图2所示。

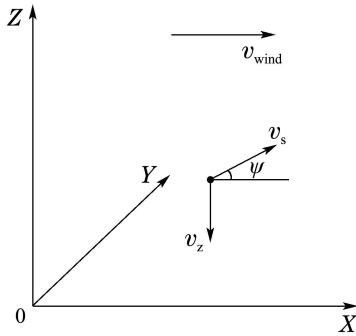


图 2 大地坐标系

Fig. 2 Geodetic coordinate system

则翼伞系统运动方程可以简化为

$$\begin{cases} \dot{x} = v_s \cos \psi + v_{wind}, \\ \dot{y} = v_s \sin \psi, \\ \dot{\psi} = u, \\ \dot{z} = v_z, \end{cases} \quad (1)$$

其中: x, y, z 分别表示翼伞在坐标系中的水平和垂直方向的位置; v_s 表示水平飞行速度; v_z 表示垂直下落速度; v_{wind} 表示水平风速; ψ 表示转弯的角度; u 表示控制量. 各个状态量的初始条件为

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, \\ z(t_0) = z_0, \psi(t_0) = \psi_0. \end{cases} \quad (2)$$

3 最优控制问题描述(Description of optimal control)

将翼伞系统运动方程(1)经过坐标系转移以及变量的量纲化处理^[17], 系统的数学模型可以转化为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos x_3, \\ \dot{x}_2 = \sin x_3, & 0 \leq \tau \leq 1, \\ \dot{x}_3 = \eta, \end{cases} \quad (3)$$

其中: x_1, x_2, x_3 为状态变量, η 为控制变量, τ 为量化后的时间变量, 其初始条件为

$$\begin{cases} x_1(0) = \frac{x_0}{v_s(t_f - t_0)}, \\ x_2(0) = \frac{y_0}{v_s(t_f - t_0)}, \\ x_3(0) = \psi_0. \end{cases} \quad (4)$$

控制约束为

$$|\eta| \leq \eta_{max} = (t_f - t_0)u_{max}. \quad (5)$$

翼伞系统在空投过程中, 要求翼伞系统满足以下要求:

- 1) 着陆点离目标点近;
- 2) 逆风着陆, 减小翼伞系统着陆时的水平速度, 避

免负载的着陆损伤;

3) 在负载容许的范围内电机提供的能量总是有限的, 因此, 要求操纵量小, 耗能少。

根据上述要求, 采用罚函数的方法将有约束控制问题转化为无约束的最优控制问题^[17], 因此翼伞系统轨迹优化的最优控制问题可描述为:

问题 A 设计最优控制律 u 使得下式的目标函数达到最小值

$$J = q_1(x_1^2(1) + x_2^2(1)) + q_2(\cos(x_3(1)) + 1) + q_3 \int_0^1 (\eta/\eta_{max})^2 d\tau, \quad (6)$$

其中 q_1, q_2, q_3 均为大于0的权值, 整个系统需同时满足动态方程(3)、初始条件(4)和控制约束(5)。

4 最优控制问题求解(Solution toward optimal control)

4.1 控制变量参数化(Control parameterization)

问题A是典型的不含约束的最优控制问题, 本文可以将目标函数(6)的积分项做如下变换:

$$\dot{x}_4 = (\eta/\eta_{max})^2, x_4(0) = 0,$$

则目标函数(6)变换如下形式:

$$\min_u \phi(\mathbf{x}(T)), \quad (7)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), u(t)), t \in [0, T], \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \\ a \leq u(t) \leq b, t \in [0, T], \end{cases} \quad (8)$$

其中:

$$\phi(\mathbf{x}(T)) = q_1(x_1^2(1) + x_2^2(1)) + q_2(\cos(x_3(1)) + 1) + q_3 x_4(1),$$

状态方程 $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), u(t))$ 如式(3)所示, $u(t) = \eta(t)$ 。

将上述最优控制问题设为问题B, 翼伞系统的最优控制问题A中水平位置信息 x_1, x_2 , 转弯角 x_3 以及新变量 x_4 为状态变量, η 为控制量。

本文采用控制变量参数化方法^[21]求解问题B, 首先将时间 T 分为 p 个相邻子区间, 在每个时间子区间, 采用分段常值去控制系统, 如图3所示。

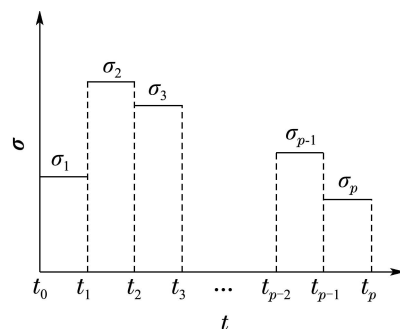


图 3 分段常值控制

Fig. 3 Piecewise constant control

将舵机控制量用分段常值近似:

$$u(t) \approx \sum_{k=1}^p \sigma^k \chi_{[t_{k-1}, t_k)}(t), t \in [t_{k-1}, t_k), \quad (9)$$

其中 t_k 是在时间区间 T 上等分的时间切换点,且满足:

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{p-1} \leq t_p = T,$$

$\chi_{[t_{k-1}, t_k)}(t)$ 为如下特征函数:

$$\chi_{[t_{k-1}, t_k)}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

将离散后的控制量(9)代入问题B,得到新的目标函数:

$$g(\sigma) = \phi(\mathbf{x}(1|\sigma)) = q_1(x_1^2(1) + x_2^2(1)) + q_2(\cos(x_3(1)) + 1) + q_3 x_4(1), \quad (10)$$

控制变量参数化后的问题B是一个典型的参数优化选择问题.这类问题可以采用随机搜索或者目标函数对控制变量的梯度信息寻找最优值.然而,随机搜索耗时较长,相比之下,基于梯度计算的优化算法耗时较短,如序列二次最优化方法(SQP).要实现SQP方法,本文需要利用到目标函数(10)关于控制量参数的梯度信息.

定理 1 目标函数(10)对控制量 σ^k 的梯度为

$$\frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma^k} = \frac{\partial \phi(\mathbf{x}(1|\sigma))}{\partial \mathbf{x}} \Gamma(1|\sigma) + \frac{\partial \phi(\mathbf{x}(1|\sigma))}{\partial \sigma^k},$$

其中

$$\Gamma(t|\sigma) = \frac{\partial \mathbf{x}(t|\sigma)}{\partial \sigma^k}.$$

证 由式(8)可得,状态变量 $\mathbf{x}(t|\sigma)$ 的解的形式为

$$\mathbf{x}(t|\sigma) = \mathbf{x}^0(\sigma) + \int_0^t f(s, \mathbf{x}(s|\sigma), \sigma) ds.$$

令

$$\Gamma(t|\sigma) = \frac{\partial \mathbf{x}(t|\sigma)}{\partial \sigma^k}, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

同时定义

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad \hat{\delta}_{kl} = \begin{cases} 1, & k \leq l, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 l 表示所等分的时间区间的个数.

对于 $l = 1, 2, \dots, p$,当 $k < l$ 时,状态变量 $\mathbf{x}(t|\sigma)$ 对控制变量 σ^k 的偏导数为

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t|\sigma)}{\partial \sigma^k} = \frac{\partial \mathbf{x}(t_{l-1}|\sigma)}{\partial \sigma^k} + \int_{t_{l-1}}^t \frac{\partial f(s, \mathbf{x}(s|\sigma), \sigma^l)}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}(s|\sigma)}{\partial \sigma^k} ds, \quad t \in [t_{l-1}, t_l), \quad (11)$$

当 $k = l$ 时,状态变量 $\mathbf{x}(t|\sigma)$ 对控制变量 σ^k 的偏导数为

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t|\sigma)}{\partial \sigma^k} = \frac{\partial \mathbf{x}(t_{l-1}|\sigma)}{\partial \sigma^k} + \int_{t_{l-1}}^t \frac{\partial f(s, \mathbf{x}(s|\sigma), \sigma^l)}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}(s|\sigma)}{\partial \sigma^k} ds + \int_{t_{l-1}}^t \frac{\partial f(s, \mathbf{x}(s|\sigma), \sigma^l)}{\partial \sigma^k} ds, \quad t \in [t_{l-1}, t_l), \quad (12)$$

当 $k > l$ 时,显然有

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t|\sigma)}{\partial \sigma^k} = 0, \quad t \in [t_{l-1}, t_l), \quad (13)$$

综合式(11)–(13)得:

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t|\sigma)}{\partial \sigma^k} = \hat{\delta}_{kl} \frac{\partial \mathbf{x}(t_{l-1}|\sigma)}{\partial \sigma^k} + \int_{t_{l-1}}^t \hat{\delta}_{kl} \frac{\partial f(s, \mathbf{x}(s|\sigma), \sigma^l)}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}(s|\sigma)}{\partial \sigma^k} ds + \int_{t_{l-1}}^t \delta_{kl} \frac{\partial f(s, \mathbf{x}(s|\sigma), \sigma^l)}{\partial \sigma^k} ds, \quad t \in [t_{l-1}, t_l), \quad (14)$$

式(14)对时间 t 进行求偏导可以得到

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathbf{x}(t|\sigma)}{\partial \sigma^k} \right\} = \hat{\delta}_{kl} \frac{\partial f(t, \mathbf{x}(t|\sigma), \sigma^l)}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}(t|\sigma)}{\partial \sigma^k} + \delta_{kl} \frac{\partial f(t, \mathbf{x}(t|\sigma), \sigma^l)}{\partial \sigma^k}, \quad t \in [t_{l-1}, t_l),$$

由此可以得到

$$\dot{\Gamma}(t) = \hat{\delta}_{kl} \frac{\partial f(t, \mathbf{x}(t|\sigma), \sigma^l)}{\partial \mathbf{x}} \Gamma(t) + \delta_{kl} \frac{\partial f(t, \mathbf{x}(t|\sigma), \sigma^l)}{\partial \sigma^k}, \quad (15a)$$

$$\Gamma(0) = \frac{\partial \mathbf{x}^0(\sigma^k)}{\partial \sigma^k}. \quad (15b)$$

根据式(15)可以求解 $\Gamma(t|\sigma)$,即 $\frac{\partial \mathbf{x}(t|\sigma)}{\partial \sigma^k}$ 的值,因此目标函数(10)的梯度为

$$\frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma^k} = \frac{\partial \phi(\mathbf{x}(T|\sigma))}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}(T|\sigma)}{\partial \sigma^k} + \frac{\partial \phi(\mathbf{x}(T|\sigma))}{\partial \sigma^k} = \frac{\partial \phi(\mathbf{x}(T|\sigma))}{\partial \mathbf{x}} \Gamma(T|\sigma) + \frac{\partial \phi(\mathbf{x}(T|\sigma))}{\partial \sigma^k}.$$

注 1 方程式(15)称为灵敏度方程.参考文献[17]所采用的共轭梯度法是利用两点边值对优化问题进行求解,协态方程组不能和状态方程组同时求解,必须先通过前向积分得到状态向量,然后通过反向积分得到协态向量,计算耗时较多;由于协态方程组的方程形态与状态方程组通常不同,如果使用高精度变步长积分方法,产生的积分节点也会不同,而插值手段虽然可以处理这种积分节点不匹配的情况,但降低了精度.本论文所采用的灵敏度方程法则是同时求解状态方程组和灵敏度方程组,只需要前向积分阶段,属于正向求解,这是相比共轭梯度法的优点之一;此外,该方法的另一个显著优点是无需额外的插值处理,数值稳定性和精度很高.对于参数数目较小时,该方法的优势更明显.

4.2 Time-scaling 方法(Time-scaling method)

为了得到更精确的结果,除了将控制量 u 进行参数化之外,还可以将时间切换点 t_k 也作为一个决策变量进行优化设计.利用time-scaling的时间转换函数将变化的时间切换点转换成固定的时间切换点,然后将控制变量和时间切换函数的相关参数进行优化.为了定义时间转换函数,本文引入一个新的时间变量 $s \in [0, p]$,则时间相关函数可定义为^[21-23]

$$t = t(s) = \mu(s|\boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{[s]} \theta_k + \theta_{[s]+1}(s - [s]), & s \in [0, p), \\ T, & s = p, \end{cases} \quad (16)$$

其中 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \dots \ \theta_p]^T$.
则原来系统的时间区间 $[0, T]$ 可以转化为固定时间区间 $[0, p]$.上述time-scaling函数具有如下性质:

- 1) $\mu(0|\boldsymbol{\theta}) = 0$, 对于 $i = 1, \dots, p$ 均有 $\mu(i|\boldsymbol{\theta}) = \theta_1 + \dots + \theta_i$;
- 2) $\mu(\cdot|\boldsymbol{\theta})$ 非负;
- 3) $\mu(\cdot|\boldsymbol{\theta})$ 是单调不降的;
- 4) $\mu(\cdot|\boldsymbol{\theta})$ 是连续的,且分段线性;
- 5) 对于所有的 $s \in (i - 1, i), i = 1, \dots, p$ 均有 $\dot{\mu}(s|\boldsymbol{\theta}) = \theta_i$.

则原来系统的时间变量 t 和新的时间变量 s 之间有如下关系:

$$\frac{dt(s)}{ds} = \sum_{k=1}^p \theta_k \chi_{[t_{k-1}, t_k)}(s), \quad s \in [0, p), \quad (17)$$

$$\chi_{[t_{k-1}, t_k)}(s) = \begin{cases} 1, & s \in [k - 1, k), \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$t(0) = 0,$$

其中 $\theta_i = t_i - t_{i-1}$,表示第 i 段子区间,如图4所示.

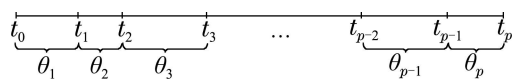


图 4 时间变换图

Fig. 4 The figure of time transformation

经过以上time-scaling换之后, $s = k$ 对应于 $t = t_k$,原时间尺度下的时间转换点 t_1, t_2, \dots, t_{p-1} 在新的时间尺度下对应于 $s = 1, 2, \dots, p - 1$.则基于新的时间尺度坐标系中的状态变量为 $\tilde{\boldsymbol{x}}(s) = \boldsymbol{x}(\mu(s|\boldsymbol{\theta}))$,可以将最优控制问题B转化为如下近似问题,本文将其设为问题C:

问题 C 选择 $\sigma^k, k = 1, \dots, p$ 以及 $\theta_k, k = 1, \dots, p$ 使得

$$\min_{\sigma, \boldsymbol{\theta}} q_1(x_1^2(1) + x_2^2(1)) + q_2(\cos(x_3(1)) + 1) + q_3 x_4(1) \quad (18)$$

同时满足动态方程

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \theta_k \cos x_3, \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \theta_k \sin x_3, \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \theta_k \sigma^k, \\ \dot{\tilde{x}}_4 = \theta_k \left(\frac{\sigma^k}{\eta_{\max}}\right)^2, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad (19a)$$

初始条件:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{x}(\mu(0)) = \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}^0, \quad (19b)$$

以及约束:

$$|\sigma^k| \leq \eta_{\max}, k = 1, 2, \dots, p, \quad (20a)$$

$$\theta_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, p, \quad (20b)$$

$$\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_p = T. \quad (20c)$$

设 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_p]^T, v(\boldsymbol{\theta}) = [\mu(1|\boldsymbol{\theta}) \ \mu(2|\boldsymbol{\theta}) \ \dots \ \mu(p - 1|\boldsymbol{\theta})]$,从问题B到问题C的变换具有以下结论^[24]:

结论 1 存在一个向量 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_p]^T$ 满足式(20b)和(20c)的线性约束,且设 $\tilde{\boldsymbol{x}}(\cdot|\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta})$ 为问题C对应于 $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta})$ 的解, $\boldsymbol{x}(\cdot|\boldsymbol{\sigma}, v(\boldsymbol{\theta}))$ 是问题B对应于 $(\boldsymbol{\sigma}, v(\boldsymbol{\theta}))$ 的解,则有

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(s|\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{x}(\mu(s|\boldsymbol{\theta})|\boldsymbol{\sigma}, v(\boldsymbol{\theta})).$$

结论 2 假设 $\boldsymbol{\theta}^* = [\theta_1^* \ \theta_2^* \ \dots \ \theta_p^*]^T$ 满足式(20b)和(20c)的线性约束,令

$$g(\boldsymbol{\sigma}, v(\boldsymbol{\theta})) = \phi(\boldsymbol{x}(T|\boldsymbol{\sigma}, v(\boldsymbol{\theta}))),$$

$$\tilde{g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}) = \phi(\tilde{\boldsymbol{x}}(p|\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\sigma}),$$

则有

$$\tilde{g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}) = g(\boldsymbol{\sigma}, v(\boldsymbol{\theta})).$$

结论 3 假设 $\boldsymbol{\theta}^* = [\theta_1^* \ \theta_2^* \ \dots \ \theta_p^*]^T$ 满足式(20b)和(20c)的线性约束,则当且仅当 $(\boldsymbol{\sigma}^*, v(\boldsymbol{\theta}^*))$ 为原系统的最优解时, $(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\theta}^*)$ 是等价近似系统的最优解.

定理 2 目标函数(18)对控制变量 σ^k 的梯度为

$$\frac{\partial \tilde{g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma^k} = \frac{\partial \phi(\tilde{\boldsymbol{x}}(p|\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\sigma})}{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{\Gamma}(p|\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}) + \frac{\partial \phi(\tilde{\boldsymbol{x}}(p|\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma^k},$$

其中

$$\boldsymbol{\Gamma}(s|\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}(s|\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma^k}.$$

对变量 θ_k 的梯度为

$$\frac{\partial \tilde{g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} = \frac{\partial \phi(\tilde{\boldsymbol{x}}(p|\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\sigma})}{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{\Psi}(p|\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}) + \frac{\partial \phi(\tilde{\boldsymbol{x}}(p|\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\sigma})}{\partial \theta_k},$$

其中

$$\boldsymbol{\Psi}(s|\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}(s|\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k}.$$

证 根据定理1可知,在

$$\Gamma(s|\sigma, \theta) = \frac{\partial \tilde{x}(s|\sigma, \theta)}{\partial \sigma^k}$$

的前提下,可以根据微分方程

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}(s) &= \hat{\delta}_{kl} \frac{\partial f(s, \tilde{x}(s|\sigma, \theta), \sigma^l)}{\partial \tilde{x}} \Gamma(s) + \\ &\delta_{kl} \frac{\partial f(s, \tilde{x}(s|\sigma, \theta), \sigma^l)}{\partial \sigma^k}, \end{aligned}$$

$$\Gamma(0) = 0,$$

求解出 $\Gamma(s|\sigma, \theta)$,因此,目标函数(18)对于控制变量 σ^k 的梯度为

$$\frac{\partial \tilde{g}(\sigma, \theta)}{\partial \sigma^k} = \frac{\partial \phi(\tilde{x}(p|\sigma, \theta), \sigma)}{\partial \tilde{x}} \Gamma(p|\sigma, \theta) + \frac{\partial \phi(\tilde{x}(p|\sigma, \theta), \sigma)}{\partial \sigma^k}.$$

同理,令

$$\Psi(s|\sigma, \theta) = \frac{\partial \tilde{x}(s|\sigma, \theta)}{\partial \theta_k},$$

则有

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}(s) &= \hat{\delta}_{kl} \frac{\partial f(s, \tilde{x}(s|\sigma, \theta), \theta^l)}{\partial \tilde{x}} \Psi(s) + \\ &\delta_{kl} \frac{\partial f(s, \tilde{x}(s|\sigma, \theta), \theta^l)}{\partial \theta_k}, \end{aligned}$$

$$\Psi(0) = 0.$$

根据上式的微分方程可以求解出 $\Psi(s|\sigma, \theta)$,因此,目标函数(18)对于控制变量 θ_k 的梯度为

$$\frac{\partial \tilde{g}(\sigma, \theta)}{\partial \theta_k} = \frac{\partial \phi(\tilde{x}(p|\sigma, \theta), \sigma)}{\partial \tilde{x}} \Psi(p|\sigma, \theta) + \frac{\partial \phi(\tilde{x}(p|\sigma, \theta), \sigma)}{\partial \theta_k}.$$

注2 Time-scaling 是基于灵敏度方程法求解最优控制问题,相对于共轭梯度法,具有耗时短,数值稳定性和精度较高等优点,此外,time-scaling还自适应对时间区间进行划分,使得优化效果更好.

5 仿真结果分析(Analysis of simulation result)

5.1 仿真数据分析(Data analysis of simulation result)

根据上述模型,在保证转弯时系统倾斜角小于 20° 的前提下,设翼伞系统基本运动参数为:

$$v_s = 18 \text{ m/s}, v_z = 6 \text{ m/s},$$

$$u_{\max} = v_s/R_{\min} = 0.18 \text{ (} R \text{为转弯半径)}.$$

设初始高度为 $z_0 = 3000 \text{ m}$,则对应的 $\eta_{\max} = 90$,根据这些参数,利用time-scaling算法做如下仿真.

仿真1 同一猜测值不同权值之间的比较,设控制量的初始猜测值为5,仿真数据如表1所示,表中①表示优化值,②表示距离偏差,③表示方向偏差,④表示总能耗(表2中亦如此表示).

表1 同一猜测值,不同权值之间的比较

Table 1 The comparison between different weights with the same guess values

权值	初始点位于单位圆内, 距目标点较近, 能达		初始点位于单位圆内, 距目标点较远, 能达		初始点位于单位圆外, 终点不能到达目标点	
	(0.5, 0, -60°)	(0, 0.2, 0°)	(-0.6, 0.6, -60°)	(-0.6, 0.6, -120°)	(0.5, 1, -60°)	(0.5, 1, 60°)
$q_1 = 1$	①1.75 \rightarrow 0.05	①2 \rightarrow 0.007	①2.2 \rightarrow 0.012	①1.22 \rightarrow 0.053	①2.75 \rightarrow 0.13	①2.75 \rightarrow 0.071
$q_2 = 1$	②2.0983e-05	②5.12e-05	②9.0925e-04	②0.0416	②0.1092	②0.0568
$q_3 = 1$	③4.6594e-07	③2.86e-06	③2.4344e-05	③3.2551e-04	③1.3e-04	③9.2820e-05
	④0.0053	④0.007	④0.0111	④0.011	④0.0221	④0.0142
$q_1 = 10$	①17.5 \rightarrow 0.0053	①20.4 \rightarrow 0.0077	①22.2 \rightarrow 0.014	①12.2 \rightarrow 0.021	①27.5 \rightarrow 0.81	①27.5 \rightarrow 0.58
$q_2 = 10$	②2.1801e-07	②5.6206e-07	②1.4928e-04	②3.0914e-04	②0.0766	②0.0562
$q_3 = 1$	③4.4121e-09	③5.2615e-08	③1.5116e-06	③2.7335e-06	③0.0045	③5.1e-05
	④0.0053	④0.0077	④0.0129	④0.0174	④4.93e-04	④0.0161
$q_1 = 100$	①175 \rightarrow 0.0054	①204 \rightarrow 0.0073	①222 \rightarrow 0.025	①122 \rightarrow 0.042	①275 \rightarrow 55.5	①275 \rightarrow 20
$q_2 = 100$	②2.3792e-09	②4.7130e-09	②1.0893e-04	②2.2510e-04	②0.5541	②0.0553
$q_3 = 1$	③6.4934e-11	③4.1e-11	③7.4262e-07	③1.4758e-06	③3.7339e-04	③1.6360e-05
	④0.0054	④0.0073	④0.0138	④0.019	④0.0695	④0.0397

从表1可以看出,对于同一初始猜测5,不同的权值,有以下结论:

1) 由数据的横向比较可以看出,随着初始位置距离目标点越来越远,其距离偏差和方向偏差越来越大;

2) 对于同一个初始点,距离偏差和方向偏差,均在权值为 $q_1 = 100, q_2 = 100, q_3 = 1$ 时达到最小,而能耗则在 $q_1 = 1, q_2 = 1, q_3 = 1$ 时达到最小;

3) 对于距离偏差,在初始点在单位圆内且距目标点较近时达到最小值,最小值为 2.38×10^{-9} (实

际距离的 2.14×10^{-5} m), 接近于0; 在初始点位于单位圆外时达到最大值, 最大值为0.5541(实际距离为4986.9 m);

4) 对于角度偏差, 在初始点位于单位圆内且距目标点较近时达到最小值, 最小值为 4.1×10^{-11} , 偏差接近于 0° ; 在初始点位于单位圆外时达到最大值,

最大值为0.0045, 偏差 5.5° ;

仿真 2 同一权值不同猜测值之间的比较. 从仿真1中可以看出, 当权值为 $q_1 = 100, q_2 = 100, q_3 = 1$ 时, 其仿真结果优于其他的权值, 故在这次仿真中选取权值为 $q_1 = 100, q_2 = 100, q_3 = 1$ 进行仿真, 仿真数据如表2所示.

表 2 权值为 $q_1 = 100, q_2 = 100, q_3 = 1$ 时不同初始猜测之间的比较

Table 2 The comparison between different initial guesses with the weights of $q_1 = 100, q_2 = 100, q_3 = 1$

权值	初始点位于单位圆内, 距目标点较近, 能达		初始点位于单位圆内, 距目标点较远, 能达		初始点位于单位圆外, 终点不能到达目标点	
	(0.5, 0, -60°)	(0, 0.2, 0°)	(-0.6, 0.6, -60°)	(-0.6, 0.6, -120°)	(0.5, 1, -60°)	(0.5, 1, 60°)
1	①175 \rightarrow 0.016	①204 \rightarrow 7.13	①222 \rightarrow 0.004	①122 \rightarrow 1.68	①275 \rightarrow 1.7	①275 \rightarrow 74.9
	②2.7458e-08	②0.0711	②1.1857e-08	②0.0163	②0.0169	②0.7479
	③2.9452e-10	③5.1182e-10	③1.0426e-09	③1.1363e-04	③1.1613e-05	③5.8310e-04
	④0.0162	④0.0171	④0.004	④0.0373	④0.0076	④0.0861
3	①175 \rightarrow 20.3	①204 \rightarrow 0.0034	①222 \rightarrow 0.017	①122 \rightarrow 0.041	①275 \rightarrow 30.2	①275 \rightarrow 20
	②0.2015	②1.6759e-09	②2.6721e-05	②2.2629e-04	②0.3011	②0.1991
	③0.0017	③6.9636e-11	③1.8567e-07	③1.4813e-06	③1.9418e-04	③1.6360e-04
	④0.0267	④0.0034	④0.0143	④0.0187	④0.0542	④0.0396
5	①175 \rightarrow 0.005	①204 \rightarrow 0.0073	①222 \rightarrow 0.025	①122 \rightarrow 0.042	①275 \rightarrow 55.5	①275 \rightarrow 20
	②2.3792e-09	②4.7130e-09	②1.0893e-04	②2.2510e-04	②0.5541	②0.0553
	③6.4934e-11	③4.1e-11	③7.4262e-07	③1.4758e-06	③3.7339e-04	③1.6360e-05
	④0.0054	④0.0073	④0.0138	④0.019	④0.0695	④0.0397
8	①175 \rightarrow 0.029	①204 \rightarrow 0.079	①222 \rightarrow 4.6	①122 \rightarrow 0.042	①275 \rightarrow 134	①275 \rightarrow 18.5
	②7.6555e-08	②3.8489e-06	②0.0454	②2.2398e-04	②1.3459	②0.1847
	③2.9461e-10	③1.3993e-08	③2.8459e-04	③1.4692e-06	③3.7915e-04	③1.5e-04
	④0.0288	④0.0789	④0.0387	④0.0193	④0.1111	④0.0309
10	①175 \rightarrow 0.028	①204 \rightarrow 0.015	①222 \rightarrow 18.11	①122 \rightarrow 18.8	①275 \rightarrow 27.6	①275 \rightarrow 18.5
	②8.8157e-08	②8.6321e-09	②0.1794	②0.1859	②0.275	②0.1847
	③2.0839e-10	③5.7844e-10	③0.0012	③0.0012	③1.9758e-04	③1.5145e-04
	④0.0282	④0.0149	④0.0607	④0.0657	④0.0386	④0.031

从表 2 中的数据可以看出, 当权值为 $q_1 = 100, q_2 = 100, q_3 = 1$, 对于不同的猜测值具有如下结论:

1) 由数据的横向比较可以得出同仿真1具有相同的结论, 随着初始位置距离目标点越来越远, 其距离偏差和方向偏差越来越大;

2) 从总体上看, 当初始猜测值在3~5时, 距离偏差和角度偏差较小, 总体优化效果好;

3) 对于距离偏差, 随着初始点离目标点越远, 其偏差越来越大. 距离偏差的最小值出现在初始点位于单位圆内, 且距目标点较近的位置, 其最小值为 1.7×10^{-9} (实际距离为 1.53×10^{-5} m, 接近于0); 距离偏差的最大值出现在初始点位于单位圆外的位置, 其最大值为0.1847(实际距离为1662.3 m);

4) 关于角度偏差, 也是随着初始点离目标点越远, 其偏差越来越大. 角度偏差的最小值出现在初始点位

于单位圆内, 且距目标点较近的位置, 其最小值为 4.1×10^{-11} , 偏差基本为0; 角度偏差的最大值出现在初始点位于单位圆外的位置, 其最大值为 1.5×10^{-4} , 偏差不超过 0.5° , 基本为0;

5) 对于总能耗, 总体趋势也是随着初始点距目标点越远, 所需要的总能耗越大. 最小值出现在初始点位于单位圆内, 且距目标点较近的位置, 其最小值为0.0034; 最大值出现在初始点位于单位圆外的位置, 其最大值为0.0309.

为了更直观地表示翼伞的降落过程, 本文选取其中的一组数据进行轨迹分析, 假设水平风速为10 m/s, 在风坐标系下和大地坐标系下翼伞系统归航轨迹分别如图5和图6所示.

比较图5和图6可知, 在风坐标系下和大地坐标系下, 翼伞归航到达目标点时距离偏差是一样的, 故将

整个系统转换到风坐标系下进行轨迹优化是可行的,且由仿真图可知:两轨迹的落地点是一致的,距离目

标原点的距离也非常小,优化效果很好.

整个系统的分段控制量如表3所示,其中 θ_k 与实际时间为500倍的关系.

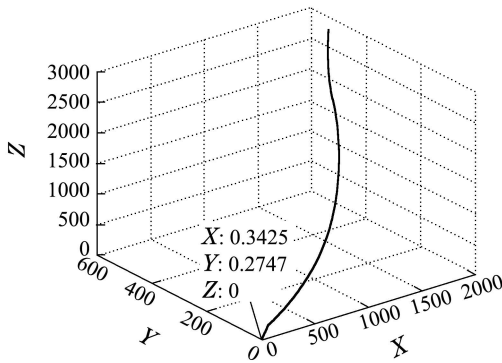


图5 初始点为(0.5, 0, -60°)风坐标系下翼伞归航轨迹
Fig. 5 The parafoil homing trajectory of (0.5, 0, -60°) initial point in the wind coordinates

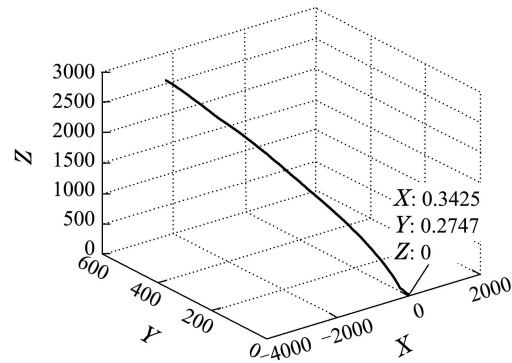


图6 初始点为(0.5, 0, -60°)大地坐标系下翼伞归航轨迹
Fig. 6 The parafoil homing trajectory of (0.5, 0, -60°) initial point in the world coordinates

表3 初始点为(0.5, 0, -60°)时的控制量变化

Table 3 The change of the control variable with the (0.5, 0, -60°) initial point

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
θ_k	3.07e-18	0.01	0.25	6.51e-19	0.10	0.13	0.09	0.03	0.17	0.22
σ^k	4.24	6.46	11.07	6.85	9.21	4.01	1.95	0.89	1.01	-2.34

5.2 数据对比(Data comparison)

将本文的优化算法的仿真结果与共轭梯度法和粒子群算法的仿真结果分别做对比.

对于同样的初始条件(0.5, 1, 60°)和同样的权值,与参考文献[17]中的数据进行比较,如表4所示.可以看出,无论是距离偏差、方向偏差还是总能耗,本文所采用的优化算法均比共轭梯度法优化的效果好.

表4 与共轭梯度法优化结果的比较

Table 4 The comparison between conjugate gradient method and time-scaling

		距离偏差	方向偏差	总能耗
$q_1 = 1$	共轭梯度法	0.0815	9.033e-04	0.0852
$q_2 = 1$	变量参数化	0.0568	9.2820e-05	0.0142
$q_3 = 1$				
$q_1 = 10$	共轭梯度法	0.0624	1.249e-04	0.1161
$q_2 = 10$	变量参数化	0.0562	5.1e-05	0.0161
$q_3 = 1$				
$q_1 = 100$	共轭梯度法	0.0621	0.967e-04	0.1183
$q_2 = 100$	变量参数化	0.0553	1.6360e-05	0.0397
$q_3 = 1$				

将优化问题A利用标准粒子群(PSO)算法进行优化求解,优化过程中仅将控制变量 u 进行分段常值近似,将控制变量近似为十段常值,即在粒子群算法中

粒子的维数为10,目标函数中权值取 $q_1 = 100, q_2 = 100, q_3 = 1$,初始点为(0.5, 0, -60°),设粒子数为30,惯性因子 $w = 0.7$,学习因子 $c_1 = c_2 = 2$,最大迭代步数为1000,将其优化结果与time-scaling算法进行比较,如表5所示.

从表5中可以看出,相比于粒子群算法,time-scaling优化效果比较好,耗时也比较短.在用粒子群算法进行优化的过程中,若要达到更好的优化效果,需增加粒子数量,则耗时将更长.相比之下,time-scaling由于算法简单,优化时间比较短,且具有较好的优化效果,相比其他算法具有一定的优势.

表5 PSO算法与time-scaling算法优化结果比较

Table 5 The comparison of PSO algorithm and time-scaling

算法	目标初值	最终目标值	耗时/s
粒子群算法	347.63	115.33	1329.10
time-scaling	175	0.005	204.96

6 结论(Conclusions)

本文针对三自由度翼伞系统最优归航轨迹问题,利用最优控制优化算法,实现了对翼伞系统最优归航轨迹的设计.仿真结果表明,相对于传统的标准粒子群优化算法,采用控制变量和时间切换点进行参数化的time-scaling优化算法是一种更为有效的方法,在建

立的翼伞模型基础上, 优化效果更好, 耗时更短, 达到了良好的效果, 验证了该算法的可行性, 具有一定的工程参考价值。未来工作可进一步完善仿真模型, 提高其准确性, 同时考虑实际中复杂地貌的建模分析, 并实现翼伞系统的风向测量和小范围气流预测分析, 为实际翼伞系统提供参考依据。此外, 可以考虑虚拟现实优化与模拟一体化平台的搭建, 将控制优化算法实现芯片化, 也是未来发展方向之一。

参考文献(References):

- [1] 谢亚荣. 空投任务下翼伞建模与飞行控制研究 [D]. 南京: 南京航空航天大学, 2011.
(XIE Yarong. *Research on modeling and flight control of parafoil under the airdrop mission* [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2011.)
- [2] 殷俊. GPS 引导定点空投系统的自动归航 [D]. 北京: 北京航空航天大学, 2001.
(YIN Jun. *The analysis of GPS automatics homing system* [D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2001.)
- [3] 韩雅慧, 杨春信, 肖华军, 等. 翼伞精确空投系统关键技术和发展趋势 [J]. 兵工自动化, 2012, 31(7): 1-7.
(HAN Yahui, YANG Chunxin, XIAO Huajun, et al. Review on key technology and development of parafoil precise airdrop systems [J]. *Ordnance Industry Automation*, 2012, 31(7): 1-7.)
- [4] 史献林, 余莉. 翼伞空中回收系统的研究及其进展 [J]. 航天返回与遥感, 2008, 29(1): 1-5.
(SHI Xianlin, YU Li. The study and development of the parafoil mid-air retrieval system [J]. *Spacecraft Recovery & Remote Sensing*, 2008, 29(1): 1-5.)
- [5] 熊菁, 秦子增, 文红武. 翼伞系统归航的最优控制 [J]. 航天控制, 2004, 22(6): 32-36.
(XIONG Jing, QIN Zizeng, WEN Hongwu. Optimal control of parafoil system homing [J]. *Aerospace Control*, 2004, 22(6): 32-36.)
- [6] 熊菁, 秦子增, 程文科, 等. 翼伞系统分段归航轨迹的优化设计 [J]. 航天返回与遥感, 2004, 25(3): 11-16.
(XIONG Jing, QIN Zizeng, CHENG Wenke, et al. Optimal design in multiphase trajectory of parafoil system [J]. *Spacecraft Recovery & Remote Sensing*, 2004, 25(3): 11-16.)
- [7] 张兴会, 朱二琳. 基于能量约束的翼伞系统分段归航设计与仿真 [J]. 航天控制, 2011, 29(5): 43-47.
(ZHANG Xinghui, ZHU Erlin. Design and simulation in the multiphase homing of parafoil system base on energy confinement [J]. *Aerospace Control*, 2011, 29(5): 43-47.)
- [8] 李树荣, 张强. 计算机数控系统光滑时间最优轨迹规划 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(2): 192-198.
(LI Shurong, ZHANG Qiang. Smooth and time-optimal trajectory planning for computer numerical control systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(2): 192-198.)
- [9] 赵娟平, 高宪文, 符秀辉, 等. 移动机器人路径规划的改进蚁群优化算法 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(4): 457-461.
(ZHAO Juanping, GAO Xianwen, FU Xiuhui, et al. Improved ant colony algorithm of path planning for mobile robot [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(4): 457-461.)
- [10] 巩敦卫, 耿娜, 张勇. 密集障碍物环境下基于凸包和微粒群优化的机器人路径规划 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(5): 609-616.
(GONG Dunwei, GENG Na, ZHANG Yong. Robot path planning in environments with dense obstacles based on convex hull and particle swarm optimization [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(5): 609-616.)
- [11] PEARSON A E. Optimal control of a gliding parachute system [R]. *Army Natick Laboratories Technical Report*, 73-30-AD, 1972.
- [12] WEI K C, PEARSON A E. Numerical solution to the optimal control of a gliding parachute system [R]. Brown University Providence RI Lefschetz Center for Dynamical Systems, AD-A013-009, 1974.
- [13] PEARSON A E, WEI K C, KOOPERSMITH R M. Terminal control of a gliding parachute in a nonuniform wind [J]. *AIAA Journal*, 1977, 15(7): 916-922.
- [14] KOOPERSMITH R M, PEARSON A E. Determination of trajectories for a gliding parachute system [R]. *Brown Univ Providence RI*, AD-A955-162, 1975.
- [15] GIMADIEVA T Z. Optimal control of a gliding parachute system [J]. *Journal of Mathematical Sciences*, 2001, 103(1): 54-60.
- [16] 王锋辉. 可控翼伞飞行控制程序设计与归航可视化仿真 [D]. 北京: 中国空间科学研究院五〇八所, 2003.
(WANG Fenghui. *The design of controllable parafoil flight control algorithm and homing visualization simulation* [D]. Beijing: China Space Science Research Institute, the Division 508, 2003.)
- [17] 熊菁. 翼伞系统动力学与归航方案研究 [D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2005.
(XIONG Jing. *The research of parafoil system dynamics and homing scheme* [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2005.)
- [18] 焦亮. 基于翼伞空投机器人系统的自主归航研究 [D]. 天津: 南开大学, 2011.
(JIAO Liang. *Research on autonomous homing based on parafoil and air-dropped robot system* [D]. Tianjin: Nankai University, 2011.)
- [19] 焦亮, 孙青林, 亢晓峰. 基于混沌粒子群优化算法的翼伞系统轨迹规划 [J]. 复杂系统与复杂性科学, 2012, 9(1): 47-54.
(JIAO Liang, SUN Qinglin, KANG Xiaofeng. Route planning for parafoil system based on chaotic particle swarm optimization [J]. *Complex Systems and Complexity Science*, 2012, 9(1): 47-54.)
- [20] 高海涛, 张利民, 孙青林, 等. 基于伪谱法的翼伞系统归航轨迹容错设计 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(6): 702-708.
(GAO Haitao, ZHANG Limin, SUN Qinglin, et al. Fault-tolerance design of homing trajectory for parafoil system based on pseudo-spectral method [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(6): 702-708.)
- [21] LIN Q, LOXTON R, TEO K L. The control parameterization method for nonlinear optimal control: a survey [J]. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2014, 10(1): 275-309.
- [22] 胡云卿, 刘兴高. 处理动态优化问题中控制变量路径约束的方法 [J]. 自动化学报, 2013, 39(4): 440-449.
(HU Yunqing, LIU Xinggao. Methods to deal with control variable path constraints in dynamic optimization problems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(4): 440-449.)
- [23] LIU X, HU Y, FENG J, et al. A novel penalty approach for nonlinear dynamic optimization problems with inequality path constraints [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(10): 2863-2867.
- [24] LIN Q, LOXTON R, TEO K L. Optimal control computation for nonlinear systems with state-dependent stopping criteria [J]. *Automatica*, 2012, 48(9): 2116-2129.

作者简介:

梁海燕 (1990-), 女, 硕士研究生, 目前研究方向为翼伞系统归航轨迹的优化及三维计算机动画仿真, E-mail: lianghaiyan99@yeah.net;

任志刚 (1987-), 男, 博士研究生, 目前研究方向为分布参数系统最优控制, E-mail: renzhigang@zju.edu.cn;

许超 (1980-), 男, 副教授, 博士生导师, 赛博(CYBER)协同创新中心CYBER学者, 目前研究方向为复杂流动与飞行控制, E-mail: csu@zju.edu.cn;

言金 (1985-), 男, 高级工程师, 目前研究方向为精确空投与特种装备, E-mail: yanjin010682@163.com.