

一类离散时间非齐次马尔可夫跳跃系统最优控制

张高生¹, 朱进^{1†}, 谢宛青², 奚宏生¹

(1. 中国科学技术大学 自动化系, 安徽 合肥 230026; 2. 中国科学技术大学 信息科学技术学院, 安徽 合肥 230026)

摘要: 本文研究了一类离散时间非齐次马尔可夫跳跃线性系统的线型二次高斯(linear quadratic Gaussian, LQG)问题, 其中系统模态转移概率矩阵随时间随机变化, 其变化特性由一高阶马尔可夫链描述. 对于该系统的LQG问题, 文中首先给出了线性最优滤波器, 得到最优状态估计; 其次, 验证分离定理成立, 并利用动态规划方法设计了系统最优控制器; 最后, 数值仿真结果验证了所设计控制器的有效性.

关键词: 随机系统; 非齐次马尔可夫链; 最优控制; 分离定理

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Optimal control for a class of discrete-time nonhomogeneous Markovian jump linear systems

ZHANG Gao-sheng¹, ZHU Jin^{1†}, XIE Wan-qing², XI Hong-sheng¹

(1. Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei Anhui 230027, China;

2. School of Information Science and Technology, University of Science and Technology of China, Hefei Anhui 230027, China)

Abstract: This paper concerns the linear quadratic Gaussian (LQG) problem for a class of discrete-time nonhomogeneous Markovian jump linear systems (MJLSs) in the presence of process and observation noises. In such nonhomogeneous MJLSs, the mode transition probability matrix (MTPM) varies randomly instead of being time-invariant. Assuming that the stochastic variation of MTPM is governed by a high level Markov chain, we propose an MJLS model with two-level Markov chains to describe the concerned characteristics. Firstly, a mode-MTPM based optimal filter is developed to estimate system states where the filter gain can be obtained from the coupled Riccati equations. Furthermore, we prove in details the validity of separation principle for such MJLSs. On this basis, we design the optimal output feedback controller by applying the dynamic programming method. Finally a numerical example is given to show the effectiveness of the developed theoretical results.

Key words: stochastic systems; nonhomogeneous Markov chains; optimal control; separation principle

1 引言(Introduction)

在过去的几十年中, 马尔可夫跳跃系统(简称为跳跃系统)已经成为控制理论领域的一个研究热点^[1-2]. 这类系统不仅包含连续的系统状态, 系统结构还受随机事件的影响, 已被广泛研究并取得了许多卓有成效的结果, 例如系统稳定性^[2-3]、滤波^[4]、最优控制和鲁棒控制^[5-6]等. 关于跳跃系统的一个重要的结论是, 系统的稳定性、系统性能等与马尔可夫链的模态转移概率矩阵(mode transition probability matrix, MTPM)密切相关. 已有的大部分研究成果都基于马尔可夫链是齐次性的假设, 即MTPM是时不变的. 然而, 这种假设在很多现实应用中难以准确描述系统特性. 例如网络

化控制系统可以建模为一个跳跃系统, 其MTPM受网络状态影响, 往往是时变的, 所以网络化控制系统可以建模为非齐次马尔可夫跳跃系统. 类似的情况还存在于其他很多实例中, 如直流电动机控制^[7]、制造系统^[8]等.

近几年, 非齐次马尔可夫跳跃系统的研究已引起了广泛关注并取得了很多研究成果, 其中对马尔可夫链非齐次特性主要有以下3类假设: 1) 文献[9]假设MTPM为时变有界的, 对系统的均方稳定性和随机稳定性进行了研究; 2) 文献[7, 10]假设MTPM在一个多边形集内取值, 分别研究了系统的 H_∞ 控制和鲁棒控制问题; 3) 文献[8, 11]假设MTPM分段齐次并且在有

收稿日期: 2015-02-04; 录用日期: 2015-07-24.

†通信作者. E-mail: jinzhu@ustc.edu.cn; Tel.: +86 18956012051.

本文责任编辑: 张焕水.

国家自然科学基金项目(61374073), 中央高校基本科研业务费专项资金(WK2100000003), 安徽省自然科学基金项目(1308085QF107)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61374073), Fundamental Research Funds for the Central Universities (WK2100000003) and Anhui Provincial Natural Science Foundation (1308085QF107).

限集中取值,研究了系统的 H_∞ 滤波和 H_∞ 控制问题.这些工作在一定程度上解决了非齐次跳跃系统的建模及控制问题,然而由于对模态转移概率矩阵的变化缺乏精确的描述,因此很难得到系统最优控制器.

对跳跃系统而言,如果在一定的采样间隔内MTPM不变或者变化缓慢,在这种情况下可以认为系统的MTPM是分段齐次的,即:在一定时间内MTPM保持不变,总的时段上是随时间变化的.文献[12]研究了具有时变MTPM的非齐次跳跃系统控制问题,其中要求对于给定的任意时刻,MTPM都是确定性已知的.然而如前文指出,很多情况下实际系统的MTPM呈现出随机变化的特性.为了描述跳跃系统中非齐次MTPM的这种随机变化,本文提出一种双马尔可夫链模型,即该系统中存在两个马尔可夫链:低阶的为非齐次马尔可夫链,表示系统模态的随机跳跃;高阶的马尔可夫链用于描述系统MTPM的随机变化.针对该模型,本文研究了系统的线性二次高斯(LQG)问题:首先,设计基于模态-MTPM的线性最优滤波器,得到状态的最优估计值;然后,证明对于这种双马尔可夫链模型,分离定理同样成立;并在此基础上设计基于模态-MTPM的最优控制器,最后用数值仿真验证最优控制器的有效性.

符号: \mathbb{R}^n 为 n 维向量空间;上标“T”表示矩阵或向量转置; $\|\cdot\|$ 表示范数; $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 表示概率空间; $E\{\cdot\}$ 表示求数学期望; $\text{tr}(\cdot)$ 表示求矩阵的迹.

2 系统模型与问题描述 (System model and problem formulation)

2.1 系统模型(System model)

考虑离散时间马尔可夫跳跃系统

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{r_k} x(k) + B_{r_k} u(k) + G_{r_k} w(k), \\ y(k) = C_{r_k} x(k) + H_{r_k} v(k), \end{cases} \quad (1)$$

式中: $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ 为系统状态; $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ 为控制向量; $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ 是测量值; $w(k)$ 和 $v(k)$ 是相互独立的标准高斯白噪声; A_{r_k} , B_{r_k} , C_{r_k} , G_{r_k} 和 H_{r_k} 为适当维数的矩阵; r_k 为系统模态,在有限集 $S_1 = \{1, 2, \dots, n_1\}$ 上取值,模态转移概率为

$$\mathcal{P}(r_{k+1} = j | r_k = i) = \pi_{ij}(k),$$

其中: $\pi_{ij}(k) \geq 0$, $\sum_{j \in S_1} \pi_{ij}(k) = 1$.

$\pi_{ij}(k)$ 为模态转移概率矩阵 $\Pi(k)$ 的元素.如果对 $\forall k \geq 0$, $\Pi(k) \equiv \Pi$,则称该马尔可夫链是齐次的;如果模态转移概率矩阵是时变的,则称马尔可夫链是非齐次的,详细可参考文献[8].

本文假设模态转移概率矩阵在有限集内随机取值,即可以表示为 $\Pi(k) = \Pi^{(\theta_k)}$,其中 $\theta_k \in S_2 = \{1, 2, \dots, n_2\}$ 是一个马尔可夫链.当给定时刻 k 时,模态转移概率矩阵并不是确定性的,而是依赖于 θ_k 随机取值. θ_k

的转移概率矩阵为 $A = [\lambda_{ij}]_{n_2 \times n_2}$. θ_k 与 r_k 相互独立.记 $\mathcal{F}_k = \sigma\{y(t), t, t; t=0, \dots, k\}$.

2.2 问题描述(Problem statement)

对于非齐次马尔可夫跳跃系统(1),考虑性能指标

$$J(u) = \sum_{k=0}^{N-1} E\{x^T(k) Q_1 x(k) + u^T(k) Q_2 u(k)\} + E\{x^T(N) V x(N)\}, \quad (2)$$

其中: V 和 Q_1 为非负定对称阵, Q_2 为正定对称阵.本文的目标是求最优控制 $u^*(k)$,使性能指标 J 最小.

3 最优滤波(Optimal filtering)

由于系统含有噪声,故真实状态无法直接获得.所以本节目标是设计最优线性滤波器.考虑系统(1),在 $y(k)$, $r(k)$ 和 θ_k 已知条件下,设计基于模态-MTPM的线性滤波器

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = \Gamma_{r_k}^{(\theta_k)}(k) \hat{x}(k) + \Delta_{r_k}^{(\theta_k)}(k) y(k), \\ u(k) = \Psi_{r_k}^{(\theta_k)}(k) \hat{x}(k), \end{cases} \quad (3)$$

使对于 $k=0, 1, \dots, N$,估计方差 $E\|\tilde{x}(k)\|^2$ 最小, $\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$.

定理1 系统(1)的线性最优滤波器可以表示为

$$\begin{cases} \hat{x}_e(k+1) = A_{r_k} \hat{x}_e(k) + B_{r_k} u(k) + \\ \quad \mathbf{K}_{r_k}^{(\theta_k)}(k) (y(k) - C_{r_k} \hat{x}_e(k)), \\ \hat{x}_e(0) = E\{x_0\} = \mu, \end{cases} \quad (4)$$

式中 $\mathbf{K}_{r_k}^{(\theta_k)}(k)$ 为滤波增益,满足

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i^{(m)}(k) = \\ A_i \mathbf{P}_i^{(m)}(k) C_i^T (H_i H_i^T + C_i \mathbf{P}_i^{(m)}(k) C_i^T)^{-1}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\mathbf{P}_i^{(m)}(k)$ 满足

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_j^{(n)}(k+1) = \\ \sum_{m \in S_2} \sum_{i \in S_1} \pi_{ij}^{(m)} \lambda_{mn} [A_i \mathbf{P}_i^{(m)}(k) A_i^T - \mathbf{K}_i^{(m)}(k) \times \\ (H_i H_i^T + C_i \mathbf{P}_i^{(m)}(k) C_i^T) \mathbf{K}_i^{(m)}(k)^T + G_i G_i^T]. \end{aligned} \quad (6)$$

引理1 (正交引理) 对于任意 $i \in S_1$, $m \in S_2$, $k=0, 1, \dots$, 滤波误差 $\tilde{x}_e(k)$ 与状态估计 $\hat{x}_e(k)$, $\hat{x}(k)$ 正交,即

$$\begin{cases} E\{\tilde{x}_e(k) \hat{x}_e^T(k) | r_k = i, \theta_k = m\} = 0, \\ E\{\tilde{x}_e(k) \hat{x}^T(k) | r_k = i, \theta_k = m\} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

引理1证明见附录.下面证明定理1.

证 定义

$$\mathbf{P}_i^{(m)}(k) \triangleq E\{\tilde{x}_e(k) \tilde{x}_e^T(k) | r_k = i, \theta_k = m\}. \quad (8)$$

根据式(4)–(5)和式(8),容易验证式(6)成立.

根据引理1可得

$$\begin{aligned} E\{\|\tilde{x}(k)\|^2\} = \\ E\{\|\tilde{x}_e(k)\|^2\} + E\{\|\hat{x}_e(k) - \hat{x}(k)\|^2\} \geq \\ E\{\|\tilde{x}_e(k)\|^2\} = \sum_{m \in S_2} \sum_{i \in S_1} \text{tr}(\mathbf{P}_i^{(m)}(k)). \end{aligned}$$

从上式可以看出, 当 $\hat{x}(k)=\hat{x}_e(k)$ 时, 估计方差最小, 所以 $\hat{x}_e(k)$ 是最优状态估计. 证毕.

4 最优控制(Optimal control)

本节根据系统最优状态估计设计基于系统模态-MTPM的最优控制器.

引理 2 对于系统(1), 选择 $u(k)$ 使性能指标(2)最小的问题, 等价于选择 $u(k)$ 使性能指标

$$J_e(u) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}\{\hat{x}_e^T(k)Q_1\hat{x}_e(k) + u^T(k)Q_2u(k)\} + \mathbb{E}\{\hat{x}_e^T(N)V\hat{x}_e(N)\} \quad (9)$$

最小, $\hat{x}_e(k)$ 为最优状态估计.

证明见附录.

定理 2 考虑指标(2), 系统(1)的最优控制量为

$$u^*(k) = -\mathbf{F}_i^{(m)}(k)\hat{x}_e(k). \quad (10)$$

反馈增益矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i^{(m)}(k) &= R_i^{(m)}(k)^{-1}B_i^T\varepsilon_i^{(m)}(\mathbf{X}(k+1), k)A_i, \\ R_i^{(m)}(k) &= Q_2 + B_i^T\varepsilon_i^{(m)}(\mathbf{X}(k+1), k)B_i, \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{X}_i^{(m)}(k)$ 满足:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i^{(m)}(k) &= A_i^T\varepsilon_i^{(m)}(\mathbf{X}(k+1), k)A_i - \mathbf{F}_i^{(m)T}(k) \times \\ & [B_i^T\varepsilon_i^{(m)}(\mathbf{X}(k+1), k)B_i + Q_2]\mathbf{F}_i^{(m)}(k) + Q_1. \end{aligned} \quad (11)$$

边界条件为 $\mathbf{X}_i^{(m)}(N)=V$. 其中 ε 运算定义为

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^{(m)}(\mathbf{X}(k+1), k) &= \\ & \sum_{j \in S_1} \sum_{n \in S_2} \pi_{ij}^{(m)}(k)\lambda_{mn}(k)\mathbf{X}_i^{(m)}(k+1). \end{aligned}$$

证 为简化公式, 定义

$$\begin{aligned} L(\hat{x}_e, u, k) &= \hat{x}_e^T(k)Q_1\hat{x}_e(k) + u^T(k)Q_2u(k), \\ \tilde{y}_e(k) &= y(k) - C_{r_k}\hat{x}_e(k), \end{aligned}$$

易验证

$$\begin{cases} \mathbb{E}\{\tilde{y}_e(k)\hat{x}_e^T(k)|_{r_k=i, \theta_k=m}\} = 0, \\ \mathbb{E}\{\tilde{y}_e(k)u^T(k)|_{r_k=i, \theta_k=m}\} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

根据动态规划原理, 记 κ 步以后性能代价为

$$\begin{aligned} J_e(\hat{x}_e(\kappa), u, \kappa) &= \\ & \mathbb{E}\{\hat{x}_e^T(N)V\hat{x}_e(N)|\mathcal{F}_\kappa\} + \\ & \sum_{k=\kappa}^{N-1} \mathbb{E}\{L(\hat{x}_e, u, k)|\mathcal{F}_\kappa\}. \end{aligned} \quad (13)$$

对于 $k=N-1, \dots, 0$, 定义

$$W(\hat{x}_e, k) = \hat{x}_e^T(k)\mathbf{X}_{r_k}^{(\theta_k)}(k)\hat{x}_e(k) + \sum_{t=k}^{N-1} \alpha(t), \quad (14)$$

式中

$$\alpha(t) = \sum_{i \in S_1} \sum_{m \in S_2} \text{tr}[\mathbf{K}_i^{(m)}(t)\mathbb{E}\{\tilde{y}(t)\tilde{y}^T(t)|_{r_t=i, \theta_t=m}\}].$$

$$\mathbf{K}_i^{(m)T}(t)\varepsilon_i^{(m)}(\mathbf{X}(t+1), t)].$$

由式(4)(11)(14)可得:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\{W(\hat{x}_e, k+1)|\mathcal{F}_k\} - W(\hat{x}_e, k) = \\ & -L(\hat{x}_e, u, k) + \|R_{r_k}^{(\theta_k)}(k)^{\frac{1}{2}}[u(k) + \\ & \mathbf{F}_{r_k}^{(\theta_k)}(k)\hat{x}_e(k)]\|^2 - \alpha(k) + \\ & \text{tr}[\mathbf{K}_{r_k}^{(\theta_k)}(k)\mathbb{E}\{\tilde{y}_e(k)[2A_{r_k}\hat{x}_e(k) + 2B_{r_k}u(k) + \\ & \mathbf{K}_{r_k}^{(\theta_k)}(k)\tilde{y}_e^T(k)]|\mathcal{F}_k\}\mathbf{K}_{r_k}^{(\theta_k)T}(k)\varepsilon_{r_k}^{(\theta_k)}(\mathbf{X}(k+1), k)]. \end{aligned} \quad (15)$$

根据式(12)可得

$$\begin{aligned} & \text{tr}[\mathbf{K}_{r_k}^{(\theta_k)}(k)\mathbb{E}\{\tilde{y}_e(k)\hat{x}_e^T(k)|\mathcal{F}_k\} \times \\ & A_{r_k}^T\varepsilon_{r_k}^{(\theta_k)}(\mathbf{X}(k+1), k)] = \\ & \sum_{i \in S_1} \sum_{m \in S_2} \text{tr}[\mathbf{K}_i^{(m)}(k)\mathbb{E}\{\tilde{y}_e(k)\hat{x}_e^T(k)|_{r_k=i, \theta_k=m}\} \times \\ & A_i^T\varepsilon_i^{(m)}(\mathbf{X}(k+1), k)] = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \text{tr}[\mathbf{K}_{r_k}^{(\theta_k)}(k)\mathbb{E}\{\tilde{y}_e(k)u^T(k)|\mathcal{F}_k\} \times \\ & B_{r_k}^T\varepsilon_{r_k}^{(\theta_k)}(\mathbf{X}(k+1), k)] = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

另外, 易证

$$\begin{aligned} & \text{tr}[\mathbf{K}_{r_k}^{(\theta_k)}(k)\mathbb{E}\{\tilde{y}_e(k)\tilde{y}_e^T(k)|\mathcal{F}_k\} \times \\ & \mathbf{K}_{r_k}^{(\theta_k)T}\varepsilon_{r_k}^{(\theta_k)}(\mathbf{X}(k+1), k)] = \alpha(k). \end{aligned} \quad (18)$$

将式(16)–(18)代入式(15)得

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\{W(\hat{x}_e, k+1)|\mathcal{F}_k\} - W(\hat{x}_e, k) = \\ & -L(\hat{x}_e, u, k) + \|R_{r_k}^{(\theta_k)}(k)^{\frac{1}{2}}[u(k) + \mathbf{F}_{r_k}^{(\theta_k)}(k)\hat{x}_e(k)]\|^2. \end{aligned}$$

将上式从 $k=\kappa$ 到 $N-1$ 求和, 得

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\{W(\hat{x}_e, N)|\mathcal{F}_\kappa\} - W(\hat{x}_e, k) = \\ & \sum_{k=\kappa}^{N-1} \mathbb{E}\{\|R_{r_k}^{(\theta_k)}(k)^{\frac{1}{2}}[u(k) + \mathbf{F}_{r_k}^{(\theta_k)}(k)\hat{x}_e(k)]\|^2 - \\ & L(\hat{x}_e, u, k)|\mathcal{F}_\kappa\}. \end{aligned}$$

由式(14)知 $W(\hat{x}_e, N)=x^T(N)Vx(N)$, 并考虑式(13), 整理上式可得

$$\begin{aligned} & J_e(\hat{x}_e(\kappa), u, \kappa) = \\ & W(\hat{x}_e, \kappa) + \sum_{k=\kappa}^{N-1} \mathbb{E}\{\|R_{r_k}^{(\theta_k)}(k)^{\frac{1}{2}}[u(k) + \\ & \mathbf{F}_{r_k}^{(\theta_k)}(k)\hat{x}_e(k)]\|^2\}. \end{aligned}$$

由上式及引理2知, $u(k)$ 满足式(10)时, 系统性能最优. 证毕.

注 1 当高阶马尔可夫链 θ_k 只有一个取值时, 模型退化为齐次马尔可夫跳跃系统. 在这种情况下, 由定理1和定理2可以直接得到齐次马尔可夫跳跃系统的最优滤波器和最优控制器.

5 数值仿真(Numerical simulation)

本节以太阳能锅炉系统为例进行仿真计算, 验证

前文理论分析的有效性.

在太阳能锅炉系统中, 如果将空中云层有无定义为两个模态, 则太阳能锅炉系统可建模为二模态的马尔可夫跳跃系统^[12]. 易见, 随着天气的随机变化, 表征天空中云层变化的模态转移概率矩阵随之而变. 以第 k 天的天气状况为例, 该天的天气可能在晴朗、阴天和下雨 3 个情况中随机取值, 且天气变化可通过一马尔可夫链加以描述. 所以太阳能锅炉系统可以表示为模态转移概率矩阵在 3 种情况中随机取值的非齐次马尔可夫跳跃系统.

假设该跳跃系统参数无云和有云分别为

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1.3 & 0.9 \\ -0.29 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.7 \end{pmatrix}, G_1 = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.6 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = (1.5 \ 0.7), H_1 = -0.6;$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.9 \\ -0.45 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.8 \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.5 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = (1.5 \ 0.7), H_2 = 0.9.$$

晴朗、阴天和下雨分别用 $\theta_k \in \{1, 2, 3\}$ 表示, 天气状况变化的转移概率矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

在晴朗、阴天和下雨条件下, 系统模态(r_k)的转移概率矩阵分别为

$$\Pi^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix},$$

$$\Pi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix},$$

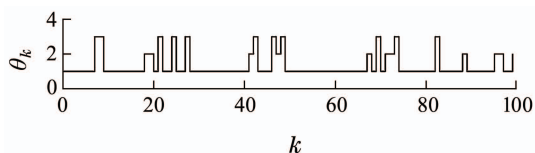
$$\Pi^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

假设性能指标(2)的权矩阵为

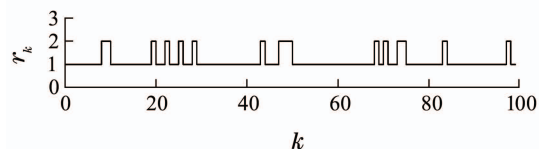
$$V = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, Q_1 = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1.6 \end{pmatrix}, Q_2 = 1.$$

初始条件为 $x_1(0) = 20, x_2(0) = -15, \theta_0 = 1, r_0 = 1$.

图 1 为系统 MTPM 变化和模态变化的一个样本实现, MTPM 变化对应天气状况的改变, 模态变化表示云层状况. 系统状态 $x(k)$ 和最优状态估计 $\hat{x}_e(k)$ 的轨迹如图 2 所示. 根据定理 2, 最优控制器在不同的模态和 MTPM 下分别对应不同的控制器, 控制量见图 3.



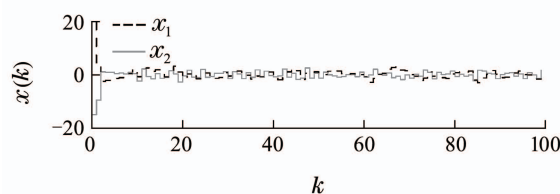
(a) MTPM θ_k



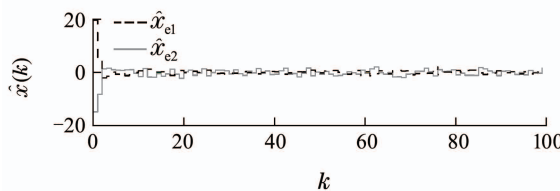
(b) 系统模态 r_k

图 1 系统 MTPM 和模态的一个样本实现

Fig. 1 A variation of MTPM and a path of modes evolution



(a) 系统状态



(b) 状态估计

图 2 状态和状态估计

Fig. 2 A path of system state and state estimate

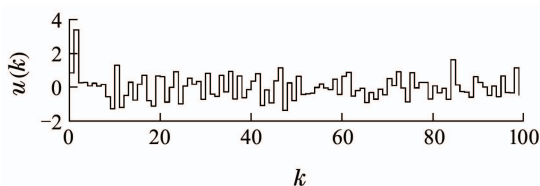


图 3 最优控制量

Fig. 3 Optimal control

仿真结果表明, 最优滤波器(4)可以有效估计出系统的状态, 最优控制器(10)使系统很快趋于稳定, 具有良好的控制性能.

6 结论(Conclusions)

本文研究了具有两个马尔可夫链的非齐次马尔可夫跳跃系统的控制问题, 其中低阶马尔可夫链描述系统模态的变化, 高阶马尔可夫链描述系统模态转移概率矩阵的变化. 为解决该系统的 LQG 问题, 本文设计基于模态-MTPM 的最优滤波器, 得到最优状态估计; 然后验证分离定理并设计了基于模态-MTPM 的最优控制器; 最后, 数值仿真结果表明了该方法的有效性.

参考文献(References):

[1] DRAGAN V, MOROZAN T. *Mathematical Methods in Robust Control of Linear Stochastic Systems* [M]. New York: Springer, 2006.
 [2] JI Y, CHIZECK H J. Controllability, stabilizability, and continuous-time Markovian jump linear quadratic control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, 35(7): 777 - 788.

[3] MITROPHANOV A Y. Stability and exponential convergence of continuous-time Markov chains [J]. *Journal of Applied Probability*, 2003, 40(4): 970 – 979.

[4] SHEN M, YANG G H. H₂ filter design for discrete-time Markov jump linear systems with partly unknown transition probabilities [J]. *Optimal Control Applications & Methods*, 2012, 33(3): 318 – 337.

[5] FANG Yangwang, WANG Hongqiang, WU Youli. Optimal control for discrete stochastic system with conditional Markov structure [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(1): 99 – 102. (方洋旺, 王洪强, 伍友利. 具有条件马尔科夫结构的离散随机系统最优控制 [J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(1): 99 – 102.)

[6] LI H Y, GAO H J, SHI P, et al. Fault-tolerant control of Markovian jump stochastic systems via the augmented sliding mode observer approach [J]. *Automatica*, 2014, 50(7): 1825 – 1834.

[7] YIN Y Y, SHI P, LIU F, et al. Robust control for nonhomogeneous Markov jump processes: An application to DC motor device [J]. *Journal of the Franklin Institute-Engineering and Applied Mathematics*, 2014, 351(6): 3322 – 3338.

[8] ZHU J, WANG L P, SPIRYAGIN M. Control and decision strategy for a class of Markovian jump systems in failure prone manufacturing process [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2012, 6(12): 1803 – 1811.

[9] ABERKANE S. Stochastic stabilization of a class of nonhomogeneous Markovian jump linear systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2011, 60(3): 156 – 160.

[10] YIN Y, SHI P, LIU F, et al. Observer-based H-infinity control on nonhomogeneous Markov jump systems with nonlinear input [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, 24(13): 1903 – 1924.

[11] ZHANG L X. H_∞ estimation for discrete-time piecewise homogeneous Markov jump linear systems [J]. *Automatica*, 2009, 45(11): 2570 – 2576.

[12] COSTA O L V, FRAGOSO M D, MARQUES R P. *Discrete-Time Markov Jump Linear Systems* [M]. Springer Science and Business Media, 2006.

附录(Appendix)

本附录包含引理1和引理2的证明。

引理1将用归纳法给予证明。

证 1) $k=0$ 时, 因为 $x(0)$ 和 r_0, θ_0 相互独立, $\hat{x}(0)$ 是某一常量, 并且 $E\{\hat{x}_e(0)\}=0$, 所以有

$$E\{\hat{x}(0)\hat{x}_e^T(0)|r_0=i, \theta_0=m\}=0.$$

同理可得

$$E\{\tilde{x}_e(0)\hat{x}_e^T(0)|r_0=i, \theta_0=m\}=0.$$

故 $k=0$ 时式(7)成立。

2) 假设第 k 时刻式(7)也成立。即

$$E\{\tilde{x}_e(k)\hat{x}_e^T(k)|r_k=i, \theta_k=m\}=0,$$

$$E\{\tilde{x}_e(k)\hat{x}_e^T(k)|r_k=i, \theta_k=m\}=0.$$

由于 $w(k)$ 和 $v(k)$ 相互独立并且和 $\hat{x}(k), r_k, \theta_k$ 不相关, 可得

$$\begin{aligned} & E\{\tilde{x}_e(k+1)\hat{x}_e^T(k+1)|r_{k+1}=j, \theta_{k+1}=n\}= \\ & \sum_{m \in S_2} \sum_{i \in S_1} \lambda_{mn} \pi_{ij}^{(m)} [(A_i - \mathbf{K}_i^{(m)}(k)C_i) \cdot \\ & E\{\tilde{x}_e(k)y^T(k)|r_k=i, \theta_k=m\} + \\ & G_i E\{w(k)y^T(k)|r_k=i, \theta_k=m\} - \\ & \mathbf{K}_i^{(m)}(k)H_i E\{v(k)y^T(k)|r_k=i, \theta_k=m\}] \Delta_i^{(m)T}(k). \end{aligned} \quad (A1)$$

由第 k 时刻假设条件, 可证对于 $i \in S_1, m \in S_2$ 有

$$E\{\tilde{x}_e(k)y^T(k)|r_k=i, \theta_k=m\} = \mathbf{P}_i^{(m)}(k)C_i^T, \quad (A2)$$

另外易得

$$E\{w(k)y^T(k)|r_k=i, \theta_k=m\}=0, \quad (A3)$$

$$E\{v(k)y^T(k)|r_k=i, \theta_k=m\} = H_i^T. \quad (A4)$$

将式(A2)–(A4)代入式(A1)可得

$$\begin{aligned} & E\{\tilde{x}_e(k+1)\hat{x}_e^T(k+1)|r_{k+1}=j, \theta_{k+1}=n\}= \\ & \sum_{m \in S_2} \sum_{i \in S_1} \lambda_{mn} \pi_{ij}^{(m)} [A_i \mathbf{P}_i^{(m)}(k)C_i^T - \mathbf{K}_i^{(m)}(k) \times \\ & (C_i \mathbf{P}_i^{(m)}(k)C_i^T + H_i H_i^T)] \Delta_i^{(m)T}(k) = 0. \end{aligned}$$

同理可得 $E\{\tilde{x}_e(k+1)\hat{x}_e^T(k+1)|r_{k+1}=j, \theta_{k+1}=n\}=0$ 。

故 $k+1$ 时刻, 式(7)也成立。由归纳法可知, 引理1成立。

证毕。

下面给出引理2的证明:

证 考虑到 $\text{tr}(xx^T) = \text{tr}(x^T x)$, 另外由数学期望特性可得

$$\begin{aligned} & E\{x^T(k)Q_1 x(k)\}= \\ & \sum_{i \in S_1} \sum_{m \in S_2} \text{tr}(Q_1 \times E\{x^T(k)x(k)|r_k=i, \theta_k=m\}). \end{aligned} \quad (A5)$$

由定理1和定义式(8)可以得到

$$\begin{aligned} & E\{x^T(k)x(k)|r_k=i, \theta_k=m\}= \\ & \mathbf{P}_i^{(m)}(k) + E\{\hat{x}_e(k)\hat{x}_e^T(k)|r_k=i, \theta_k=m\}. \end{aligned}$$

将上式代入式(A5), 从而式(A5)可以进一步写为

$$\begin{aligned} & E\{x^T(k)Q_1 x(k)\}= \\ & E\{\hat{x}_e^T(k)Q_1 \hat{x}_e(k)\} + \sum_{i \in S_1} \sum_{m \in S_2} \text{tr}(Q_1 \mathbf{P}_i^{(m)}(k)). \end{aligned} \quad (A6)$$

同理可证

$$\begin{aligned} & E\{x^T(N)Vx(N)\}= \\ & E\{\hat{x}_e(N)^T V \hat{x}_e(N)\} + \sum_{i \in S_1} \sum_{m \in S_2} \text{tr}(V \mathbf{P}_i^{(m)}(N)). \end{aligned} \quad (A7)$$

将式(A6)–(A7)代入性能指标式(2), 并与引理2中公式比较可得

$$\begin{aligned} J(u) = & J_e(u) + \sum_{i \in S_1} \sum_{m \in S_2} [\text{tr}(V \mathbf{P}_i^{(m)}(N)) + \\ & \sum_{k=0}^{N-1} \text{tr}(Q_1 \mathbf{P}_i^{(m)}(k))]. \end{aligned} \quad (A8)$$

由上式可知, 其后两项与控制 $u(k)$ 无关。因此, 求 $u(k)$ 使性能指标(2)最小的问题等价于求 $u(k)$ 使引理2中性能指标最小的问题。

证毕。

作者简介:

张高生 (1988–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为随机系统最优控制, E-mail: zhgsh@mail.ustc.edu.cn;

朱进 (1978–), 男, 副教授, 目前研究方向为随机系统的滤波与控制, E-mail: jinzh@ustc.edu.cn;

谢宛青 (1982–), 女, 博士, 工程师, 目前研究方向随机系统建模, E-mail: wxqie@ustc.edu.cn;

奚宏生 (1950–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为离散事件动态系统, E-mail: xihs@ustc.edu.cn.