

欠驱动惯性轮摆系统全局滑模控制

孙宁, 方勇纯[†], 陈鹤

(南开大学 机器人与信息自动化研究所, 天津 300353; 南开大学 天津市智能机器人技术重点实验室, 天津 300353)

摘要: 针对欠驱动惯性轮摆的镇定控制问题, 本文提出了一种新型的滑模鲁棒控制策略, 可在系统受到不确定性与外界干扰影响的情况下, 实现全局渐近镇定控制. 区别于现有方法, 本文方法无需切换, 且能将无驱动的摆杆摇起至竖直向上位置的同时, 确保惯性轮回到初始位置. 具体而言, 首先对惯性轮摆系统的非线性模型进行非奇异坐标变换, 将其变为类积分器形式. 随后, 根据转换后系统的形式, 构造了一种新型的滑模面; 经严格分析知, 当系统状态处于该滑模面上时, 它们将渐近收敛于平衡点. 在此基础上, 设计了滑模控制律以确保系统状态始终处于该滑模面上, 以实现镇定控制. 最后, 通过仿真验证了所提控制方法的有效性与鲁棒性, 并与现有方法进行了对比.

关键词: 欠驱动系统; 惯性轮摆; 滑模控制; 不确定性系统

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Global sliding mode control of underactuated inertia wheel pendulum systems

SUN Ning, FANG Yong-chun[†], CHEN He

(Institute of Robotics and Automatic Information System, Nankai University, Tianjin 300353, China;
Tianjin Key Laboratory of Intelligent Robotics, Nankai University, Tianjin 300353, China)

Abstract: For the stabilization problem of underactuated inertia wheel pendulums, a new sliding mode robust control strategy is proposed, which can achieve global asymptotic stabilization in the presence of uncertainties and disturbances. Different from existing methods, the proposed approach needs no switching between different control laws, and it can swing up the unactuated pendulum to its upright position while making the inertia wheel return to its initial position. Specifically, some nonsingular coordinate changes are performed to transform the nonlinear model into a quasi-chain-of-integrators form. Based on the transformed model, a new sliding surface is constructed, and rigorous analysis is implemented to prove the convergence of the state variables to the equilibrium point when they are kept on the sliding surface. Based on that, a sliding mode control (SMC) law is designed to keep the state variables always staying on the constructed sliding surface, in order to realize stabilization control. We validate the effectiveness and robustness of the proposed controller and compare it with existing methods through simulation results.

Key words: underactuated systems; inertia wheel pendulums; sliding mode control; uncertain systems

1 引言(Introduction)

直观地讲, 欠驱动系统是指独立的控制输入维数少于其自由度的一类系统^[1], 它们具有结构简单、成本低、能耗低、重量轻等诸多优点, 在实际应用中占据着重要的地位, 并被广泛地应用于国民经济生产的各个领域^[2-10]. 另一方面, 当完全驱动系统的部分执行机构出现故障之时, 亦会退化为欠驱动系统. 因此, 针对欠驱动系统的研究具有重要的理论与实际意义. 然而, 由于欠驱动系统缺少了部分执行器, 其动力学特

性与耦合性往往比完全驱动系统更为复杂, 控制器设计更具挑战性.

惯性轮摆系统是一种典型的欠驱动基准系统, 最早由著名控制学者Spong等人在文献[11]中提出, 用以研究先进的非线性控制算法. 它与常规的倒立摆系统^[12]具有一定的相似性, 但在结构与控制原理方面又存在着明显的不同之处. 该系统的原理图如图1所示, 它由一个摆杆与一个安装于其末端的惯性轮组成. 其中, 惯性轮可在电机的驱动下绕摆杆的末端旋转,

收稿日期: 2015-02-11; 录用日期: 2015-10-09.

[†]通信作者. E-mail: fangyc@nankai.edu.cn; Tel.: +86 22-23505706.

本文责任编辑: 武玉强.

国家自然科学基金(61503200, 11372144), 天津市应用基础与前沿技术研究计划(青年项目)(15JCQNJC03800); 中央高校基本科研业务费项目资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61503200, 11372144), Natural Science Foundation of Tianjin (15JCQNJC03800) and Fundamental Research Funds for the Central Universities.

而摆杆则可绕其支点自由旋转,即惯性轮是可驱动的(acted),而摆杆为不可驱动的(unacted).以摆杆的位置划分,惯性轮摆系统具有两个平衡点,即开环不稳定的竖直向上位置与开环稳定的竖直向下位置.对于惯性轮摆系统,其控制目标是通过合理地调节惯性轮的转动,实现对摆杆位置(即转角)的镇定或跟踪控制.简言之,镇定控制是指将摆杆从其初始位置摇起到竖直向上平衡点,并使其稳定在该位置^[11];相比之下,跟踪控制则是指使用合理的控制律,使摆杆按照预设的轨迹运动^[13-15].

相比跟踪控制,针对惯性轮摆系统镇定控制问题的研究更加广泛.本文将考虑该系统的镇定控制问题,因此随后仅回顾其镇定控制的相关研究工作.惯性轮摆系统为典型的非最小相位、欠驱动系统,其控制器设计与分析孰非易事.在该方向上,相关研究人员进行了深入研究,并提出了不同的控制策略^[11,16-22].具体而言,文献[11]首先对惯性轮摆系统进行部分反馈线性化处理,然后在此基础上,设计了一种切换控制策略实现了摆杆的摇起控制;Srinivas等人^[16]提出了两种起摆控制策略,可将摆杆摇起到竖直向上位置附近,然后切换到平衡控制器(balancing controller),保证摆杆稳定在开环不稳定平衡点.但这两种控制方法均需对控制信号进行切换,无法使用单个控制律完成控制目标.为此,在文献[17]中,Olfati-Saber将惯性轮摆模型化为规范形,随后设计了基于反步法的非线性控制策略,可在不进行切换的前提下,成功把摆杆摇起到竖直向上位置.近几年来,除上述提及的几种控制方法外,还有一些研究人员将基于互联阻尼配置的无源性控制方法(interconnection and damping assignment passivity based control, IDA-PBC)^[18-20]、浸入与不变控制方法(immersion and invariance, I&I)^[21]应用于欠驱动惯性轮摆系统的控制;然而,这些方法要求摆杆在初始时刻不能处于竖直向下的位置,即仅能保证闭环系统平衡点为几乎全局(almost globally)渐近稳定.

对于实际机电系统而言,不可避免地受到不确定因素影响(如外界干扰),如在进行控制器设计与分析时不能对这些因素加以充分考虑,则可能严重影响控制系统的性能.就目前而言,已有的惯性轮摆系统控制策略(包括上面提及的方法)均未对这些不利因素的影响加以考虑.此外,已经报道的大多数控制策略(如文献[11,16-17,22]中提出的方法)仅能保证将摆杆摇起到竖直向上位置,却无法确保惯性轮(转角)回到初始位置,即仅能实现对部分系统状态的镇定.

针对这些问题,本文提出了一种新型的滑模控制方法,其能够在有不确定性因素与外界扰动的情况下,保证摆杆、惯性轮转角从任意初始状态渐近收敛于平衡点(即全局渐近稳定),在控制过程中无需对控制信

号进行切换.具体而言,首先引入一系列坐标变换,将惯性轮摆系统的动力学方程转换为类积分器结构.随后,在此基础上,构造了一种新型的滑模面,并设计了相应的非线性控制器,确保系统状态始终处于所构造的滑模面上.通过严格的数学分析知,当状态变量处于滑模面上时,将全局渐近收敛于平衡点.为验证所提方法的有效性,本文借助仿真结果对其控制性能及鲁棒性进行了验证,并与文献[17]中提出的非线性控制策略进行了对比,结果表明所提方法能取得更为良好的控制效果.

本文的剩余部分安排如下:在第2节中,将给出惯性轮摆系统的动力学模型,描述其控制问题,并引入辅助信号进行模型变换;第3节将给出详细的控制器设计流程,并通过两个定理对其性能加以分析;第4节将给出仿真结果,验证所提方法的控制性能及鲁棒性;在第5节中将对本工作工作进行总结.

2 问题描述(Problem statement)

经Euler-Lagrange方法建模,可得欠驱动惯性轮摆系统(如图1所示)的动力学模型如下^[11,18]:

$$(I_1 + I_2)\ddot{\theta}_1 + I_2\ddot{\theta}_2 - mg \sin \theta_1 = 0, \quad (1)$$

$$I_2\ddot{\theta}_1 + I_2\ddot{\theta}_2 = u - d, \quad (2)$$

式中: $I_1 := m_1 L_c^2 + m_2 L^2 + I$, $m := m_1 L_c + m_2 L$, m_1 , m_2 分别表示摆杆和惯性轮的质量, L 表示摆杆的长度, L_c 为摆杆的转动点与摆杆中心之间的距离, I , I_2 分别表示摆杆和惯性轮的转动惯量, g 表示重力加速度常数, $\theta_1(t)$ 表示摆杆与竖直方向的夹角, $\theta_2(t)$ 表示惯性轮的转动角度, $u(t)$ 为作用于惯性轮的转矩, $d(t)$ 为集总干扰(lumped disturbance)项,由未建模动态、扰动、摩擦等不确定因素构成.考虑到实际情况,集总干扰 $d(t)$ 有界,即

$$\sup\{|d(t)|\} < \bar{d}, \quad (3)$$

其中 $\bar{d} \in \mathbb{R}^+$ 表示集总干扰的上限值.

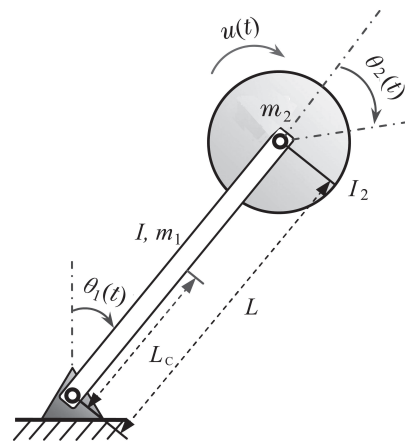


图1 惯性轮摆系统示意图

Fig. 1 Illustration for an inertia wheel pendulum system

对于惯性轮摆系统的控制而言, 目标为在存在集总干扰影响的情况下, 合理地控制惯性轮的转动, 将摆杆从其任意初始状态(包括竖直向下位置)摇起到竖直向上位置, 并使之随后稳定在此状态, 同时使惯性轮转角恢复到初始状态. 该目标可定量描述如下:

$$\theta_1(t) \rightarrow 0, \dot{\theta}_1(t) \rightarrow 0, \theta_2(t) \rightarrow 0, \dot{\theta}_2(t) \rightarrow 0. \quad (4)$$

由动态方程(1)–(2)知, $[\theta_1(t), \theta_2(t), \dot{\theta}_1(t), \dot{\theta}_2(t)]^T = [0, 0, 0, 0]^T$ 为开环不稳定平衡点.

在开始控制器设计及稳定性分析之前, 先对惯性轮摆系统的动力学模型进行处理. 首先, 式(2)可整理如下:

$$I_2 \ddot{\theta}_2 = -I_2 \ddot{\theta}_1 + u - d. \quad (5)$$

把式(5)代入式(1), 并整理, 可得

$$u = -\psi + mg \sin \theta_1, \quad (6)$$

式中 $\psi(t)$ 表示如下辅助控制输入信号:

$$\psi := I_1 \ddot{\theta}_1 - d. \quad (7)$$

在此, 引入如下非奇异坐标变换:

$$\begin{cases} \chi_1 = \frac{(I_1 + I_2)\theta_1 + I_2\theta_2}{mg}, \\ \chi_2 = \frac{(I_1 + I_2)\dot{\theta}_1 + I_2\dot{\theta}_2}{mg}, \\ \chi_3 = \theta_1, \chi_4 = \dot{\theta}_1. \end{cases} \quad (8)$$

由式(8)不难发现

$$\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4 \rightarrow 0 \iff \theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2 \rightarrow 0. \quad (9)$$

因此, 要实现式(4)所示的控制目标, 可等效转换为通过设计合理的控制器 $u(t)$, 使 $\chi_1(t), \chi_2(t), \chi_3(t), \chi_4(t) \rightarrow 0$. 那么, 根据式(5)–(8), 可将惯性轮摆系统的动力学方程(1)–(2)改写如下:

$$\begin{cases} \dot{\chi}_1 = \chi_2, \\ \dot{\chi}_2 = \chi_3 + [\sin \chi_3 - \chi_3], \\ \dot{\chi}_3 = \chi_4, \\ \dot{\chi}_4 = \frac{1}{I_1}(\psi + d). \end{cases} \quad (10)$$

系统(10)与原动力学模型(1)–(2)等效, 将用于随后的控制律设计与分析.

3 主要结果(Main results)

在本节, 将针对惯性轮摆系统设计一种新颖的滑模控制器, 并通过理论分析证明其能在存在集总干扰的情况下, 实现对整个系统的全局镇定控制.

3.1 控制器设计(Controller design)

为实现式(4)所示的控制目标, 首先引入如下辅助信号 $\phi(t)$:

$$\phi = -\chi_3 - 2\chi_4 - k_1 \text{sat}(\chi_1 + 3\chi_2 + 3\chi_3 + \chi_4) - k_2 \text{sat}(\chi_2 + 2\chi_3 + \chi_4), \quad (11)$$

其中 $\text{sat}(\cdot)$ 表示饱和函数, 定义如下:

$$\text{sat}(\cdot) = \begin{cases} 1, & * \geq 1, \\ *, & |*| < 1, \\ -1, & * \leq -1, \end{cases} \quad (12)$$

$k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ 为正控制增益, 且满足如下条件:

$$\begin{cases} 0 < \frac{k_1}{k_2} + \frac{8(k_1 + k_2)^2}{k_2 \beta \pi} < 1, k_1 + k_2 \leq \frac{\sqrt{2\beta}\pi}{8}, \\ 3k_1 + k_2 < \frac{\pi}{8}, k_1 > 0, k_2 > \frac{3}{8}, 0 < \beta < 1. \end{cases} \quad (13)$$

经验证知, 式(13)中列出的不等式条件存在可行解. 在此基础上, 构造如下滑模面 $s(t)$:

$$s(t) = \chi_4 - \chi_4(0) - \int_0^t \phi(\tau) d\tau. \quad (14)$$

随后将证明, 当系统状态变量处于 $s(t) = 0$ 之上时, $\chi_1(t), \chi_2(t), \chi_3(t), \chi_4(t)$ 将渐近收敛于平衡点. 由式(14)中 $s(t)$ 的定义可知, 在初始时刻(即 $t = 0$)时,

$$s(0) = \chi_4(0) - \chi_4(0) - \int_0^0 \phi(\tau) d\tau \equiv 0. \quad (15)$$

式(15)表明, 状态变量在初始时刻便处于 $s(t) = 0$ 上. 接下来, 本文将设计合适的控制器以保证 $\chi_1(t), \chi_2(t), \chi_3(t), \chi_4(t)$ 即便在系统受到集总干扰 $d(t)$ 的影响下, 依然能处于 $s(t) = 0$ 上. 为此, 设计式(7)中 $\psi(t)$ 如下:

$$\psi = I_1 \phi - \bar{d} \text{sgn}(s) - k_\phi s, \quad (16)$$

其中: $k_\phi \in \mathbb{R}^+$ 为正的的控制增益, \bar{d} 的定义如式(3)所示, $\text{sgn}(\cdot)$ 表示符号函数, 定义为

$$\text{sgn}(\cdot) = \begin{cases} 1, & * > 0, \\ 0, & * = 0, \\ -1, & * < 0. \end{cases} \quad (17)$$

在此基础上, 将式(16)代入式(6), 可得最终的控制输入 $u(t)$ 的表达式如下所示:

$$u = -I_1 \phi + \bar{d} \text{sgn}(s) + k_\phi s + mg \sin \theta_1. \quad (18)$$

接下来, 将通过两个定理证明控制器(18)可保证系统状态能够始终处于 $s(t) = 0$ 上, 且当系统状态在该滑模面上时, 将渐近收敛于平衡点, 即该控制器能实现式(4)所示的控制目标.

3.2 稳定性分析 (Stability analysis)

在给出两个定理之前, 首先给出如下引理, 以方便后续稳定性分析.

引理 1 如下不等式恒成立:

$$|\sin x - x| \leq \frac{x^2}{\pi}, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (19)$$

证 参见附录.

定理 1 在存在集总干扰 $d(t)$ 的情况下, 本文所设计的非线性滑模控制器(18)能保证状态变量始终处于 $s(t) = 0$ 上, 即 $s(t) = 0, \forall t \geq 0$.

证 定义如下非负标量函数 $V_\phi(t)$:

$$V_\phi = \frac{1}{2}s^2 \implies \dot{V}_\phi = s\dot{s}. \quad (20)$$

对式(14)中 $s(t)$ 求导, 有如下结果:

$$\dot{s} = \dot{\chi}_4 - \dot{\phi}. \quad (21)$$

将式(10)中最后一个方程、式(16)及式(21)代入式(20), 应用关系式(3), 并作整理, 可以得出如下结论:

$$\begin{aligned} \dot{V}_\phi &= -\frac{k_\phi}{I_1}s^2 + \frac{1}{I_1}s[-d\text{sgn}(s) + d] \leq \\ &-\frac{k_\phi}{I_1}s^2 - \frac{1}{I_1}|s|[\bar{d} - |d|] \leq \\ &-\frac{k_\phi}{I_1}s^2 \leq 0, \end{aligned} \quad (22)$$

因此

$$V_\phi \in \mathcal{L}_\infty \implies s \in \mathcal{L}_\infty. \quad (23)$$

此外, 式(22)表明 $V_\phi(t)$ 非增, 即

$$0 \leq V_\phi(t) \leq V_\phi(0).$$

从式(15)及式(20)知 $V_\phi(0) = 0$, 因此, 对于任意 $t \geq 0$, 恒有 $V_\phi(t) = 0$. 进而, 由 $V_\phi(t)$ 的表达式(参见式(20))可得 $s(t) = 0, \forall t \geq 0$. 因此, 定理得证.

由定理1的结论知, 在所设计控制器(18)的作用下, 系统状态变量 $\chi_1(t), \chi_2(t), \chi_3(t), \chi_4(t)$ 始终满足 $s(t) = 0, \dot{s}(t) = 0, \forall t \geq 0$. 此时, 式(10)中最后一个方程将退化为 $\dot{\chi}_4(t) = \phi(t)$ (参见式(21)). 因此, 在应用滑模控制器(18)时, 系统(10)可改写如下:

$$\begin{cases} \dot{\chi}_1 = \chi_2, \\ \dot{\chi}_2 = \chi_3 + [\sin \chi_3 - \chi_3], \\ \dot{\chi}_3 = \chi_4, \\ \dot{\chi}_4 = \phi, \end{cases} \quad (24)$$

那么, 对于式(24), 有如下定理.

定理 2 当状态变量 $\chi_1(t), \chi_2(t), \chi_3(t), \chi_4(t)$ (对应着 $\theta_1(t), \dot{\theta}_1(t), \theta_2(t), \dot{\theta}_2(t)$)在 $s(t) = 0$ 上时, 它们将全局渐近收敛于平衡点, 即实现式(4)中所示的控制目标.

证 首先, 进行如下非奇异坐标变换:

$$\begin{cases} e_1 = \chi_1 + 3\chi_2 + 3\chi_3 + \chi_4, \\ e_2 = \chi_2 + 2\chi_3 + \chi_4, \\ e_3 = \chi_3 + \chi_4, e_4 = \chi_4, \end{cases} \quad (25)$$

在该变换下, 式(24)可重新描述如下:

$$\dot{e}_1 = e_2 + e_3 + e_4 + 3\gamma(e_3 - e_4) + \phi, \quad (26a)$$

$$\dot{e}_2 = e_3 + e_4 + \gamma(e_3 - e_4) + \phi, \quad (26b)$$

$$\dot{e}_3 = e_4 + \phi, \quad (26c)$$

$$\dot{e}_4 = \phi, \quad (26d)$$

式中 $\gamma(e_3 - e_4)$ 表示如下辅助信号:

$$\gamma(e_3 - e_4) = \sin(e_3 - e_4) - (e_3 - e_4). \quad (27)$$

另一方面, 根据式(25), 可将式(11)改写为

$$\phi = -e_3 - e_4 - k_1\text{sat}(e_1) - k_2\text{sat}(e_2). \quad (28)$$

由式(25)易知

$$\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4 \rightarrow 0 \iff e_1, e_2, e_3, e_4 \rightarrow 0. \quad (29)$$

进一步, 联立式(9)及式(29), 可知

$$\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2 \rightarrow 0 \iff e_1, e_2, e_3, e_4 \rightarrow 0. \quad (30)$$

基于此, 随后将通过分析式(26a)–(26d)所示系统平衡点的稳定性来完成对该定理结论的证明. 在开始分析之前, 将式(28)代入式(26a)–(26d)并整理, 可得

$$\dot{e}_1 = e_2 + 3\gamma(e_3 - e_4) - k_1\text{sat}(e_1) - k_2\text{sat}(e_2), \quad (31a)$$

$$\dot{e}_2 = \gamma(e_3 - e_4) - k_1\text{sat}(e_1) - k_2\text{sat}(e_2), \quad (31b)$$

$$\dot{e}_3 = -e_3 - k_1\text{sat}(e_1) - k_2\text{sat}(e_2), \quad (31c)$$

$$\dot{e}_4 = -e_3 - e_4 - k_1\text{sat}(e_1) - k_2\text{sat}(e_2). \quad (31d)$$

首先, 分析式(31c)与式(31d)组成的子系统. 为此, 构造如下关于 $e_3(t)$ 与 $e_4(t)$ 正定的函数 $V_{34}(t)$:

$$V_{34} := \frac{1}{2}(e_3 - e_4)^2 + \frac{1}{2}e_3^2 + \frac{1}{2}e_4^2. \quad (32)$$

对其两边关于时间求导, 代入式(31c)–(31d), 借助加权算术–几何平均值不等式及 $|\text{sat}(\ast)| \leq 1 (\forall \ast)$ 放缩并进行整理, 可以得到如下结论:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{34} &= \\ &-e_3^2 - 2e_4^2 - (e_3 + e_4)[k_1\text{sat}(e_1) + k_2\text{sat}(e_2)] \leq \\ &-e_3^2 - 2e_4^2 + \frac{1}{2}e_3^2 + \frac{1}{2}[k_1\text{sat}(e_1) + k_2\text{sat}(e_2)]^2 + \\ &\frac{3}{2}e_4^2 + \frac{1}{6}[k_1\text{sat}(e_1) + k_2\text{sat}(e_2)]^2 = \\ &-\frac{1}{2}e_3^2 - \frac{1}{2}e_4^2 + \frac{2}{3}[k_1\text{sat}(e_1) + k_2\text{sat}(e_2)]^2 \leq \\ &-\frac{1}{2}e_3^2 - \frac{1}{2}e_4^2 + \frac{2}{3}(k_1 + k_2)^2. \end{aligned} \quad (33)$$

由式(32), 不难得出如下关系:

$$\frac{2}{3}V_{34} \leq (e_3^2 + e_4^2) \leq 2V_{34}. \quad (34)$$

联立式(33)及式(34), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{34} &\leq -\frac{1}{3}V_{34} + \frac{2}{3}(k_1 + k_2)^2 = \\ &-\frac{1}{3}(1 - \beta)V_{34} - \frac{1}{3}\beta V_{34} + \frac{2}{3}(k_1 + k_2)^2, \end{aligned} \quad (35)$$

式中 $0 < \beta < 1$. 那么, 当 $V_{34}(t) \geq 2(k_1 + k_2)^2/\beta$ 时, $\dot{V}_{34}(t) < 0$. 经分析不难得知, 存在有限时刻 T_1 , 当 $t \geq T_1$ 时, $V_{34}(t) \leq 2(k_1 + k_2)^2/\beta$. 根据式(34), 可知 $e_3(t), e_4(t)$ 在有限时间内收敛进入如下范围:

$$e_3^2 + e_4^2 \leq \frac{4}{\beta}(k_1 + k_2)^2. \quad (36)$$

在此基础上, 可进一步推知

$$|e_3| \leq \frac{2\sqrt{\beta}}{\beta}(k_1 + k_2), |e_4| \leq \frac{2\sqrt{\beta}}{\beta}(k_1 + k_2). \quad (37)$$

于是, 可知对于 $\forall t \geq 0$, 信号 $e_3(t)$, $e_4(t)$ 有界, 即

$$e_3 \in \mathcal{L}_\infty, e_4 \in \mathcal{L}_\infty. \quad (38)$$

另一方面, 借助加权算术-几何平均值不等式, 易知如下不等式关系恒成立:

$$(e_3 - e_4)^2 \leq 2(e_3^2 + e_4^2). \quad (39)$$

那么, 联立式(36)与式(39), 可得如下结论:

$$|e_3 - e_4| \leq \sqrt{2(e_3^2 + e_4^2)} \leq \frac{2\sqrt{2\beta}}{\beta}(k_1 + k_2).$$

由式(13)中第2个不等式, 如下结论成立:

$$|e_3 - e_4| \leq \frac{\pi}{2}, t \geq T_1. \quad (40)$$

接下来, 分析信号 $e_1(t)$ 及 $e_2(t)$ 的有界性. 经分析可知, 式(31a)与(31b)的右边为李普希兹(Lipschitz)连续, 因此, 变量 $e_1(t)$ 与 $e_2(t)$ 不会在有限时间内发散^[23,24], 即存在有界正数 ζ_1, ζ_2 使得

$$|e_1(t)| \leq \zeta_1, |e_2(t)| \leq \zeta_2, 0 \leq t < +\infty. \quad (41)$$

选取如下光滑可导的非负标量函数 $V_2(t)$:

$$V_2 := \int_0^{e_2} \text{sat}(x) dx. \quad (42)$$

对 $V_2(t)$ 关于时间求导, 代入式(31b), 有

$$\dot{V}_2 = -\text{sat}(e_2)[k_1 \text{sat}(e_1) + k_2 \text{sat}(e_2) - \gamma(e_3 - e_4)]. \quad (43)$$

那么, 根据式(27)与式(40), 当 $t \geq T_1$ 时, 结合式(39), 由引理1可推知

$$|\gamma(e_3 - e_4)| \leq \frac{1}{\pi}(e_3 - e_4)^2 \leq \frac{2}{\pi}(e_3^2 + e_4^2).$$

代入式(36)中结论, 可得

$$|\gamma(e_3 - e_4)| \leq \frac{8(k_1 + k_2)^2}{\pi\beta}. \quad (44)$$

在式(44)的基础之上, 结合饱和函数的性质, 可进一步将式(43)放缩并整理为如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -k_2 |\text{sat}(e_2)| \cdot [|\text{sat}(e_2)| - \lambda] = \\ & -k_2 |\text{sat}(e_2)| \cdot [(1 - \alpha)|\text{sat}(e_2)| + \\ & \alpha|\text{sat}(e_2)| - \lambda], \end{aligned} \quad (45)$$

式中 $\lambda < \alpha < 1$, λ 的表达式为

$$\lambda = \frac{k_1}{k_2} + \frac{8(k_1 + k_2)^2}{k_2\beta\pi}. \quad (46)$$

由式(13)中第1个不等式知 $0 < \lambda < 1$. 从式(45)知, 如果 $|\text{sat}(e_2)| > \lambda\alpha$, 则 $\dot{V}_2(t) < 0$. 因此, 通过进行类于式(35)的分析可知, 必然存在有限时刻 $T_2 > T_1$, 当 $t >$

T_2 时, $|\text{sat}(e_2)| \leq \lambda\alpha$. 由于 $\lambda < \alpha < 1 \implies \lambda\alpha < 1$, 根据式(12)知, 此时饱和函数 $\text{sat}(e_2)$ 已经进入线性区域, 即 $\text{sat}(e_2) = e_2$, 于是

$$|e_2| \leq \frac{\lambda}{\alpha}, t > T_2. \quad (47)$$

联立式(41)和式(47), 可知

$$e_2 \in \mathcal{L}_\infty, t \geq 0. \quad (48)$$

进一步, 考虑如下关于 $e_1(t)$ 与 $e_2(t)$ 正定的标量函数 $V_{12}(t)$:

$$V_{12} := \int_0^{e_1} k_1 \text{sat}(x) dx + \int_0^{e_2} k_2 \text{sat}(x) dx. \quad (49)$$

对式(49)两边关于时间求导数, 代入式(31a)与式(31b)并整理, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{12} = & -[k_1 \text{sat}(e_1) + k_2 \text{sat}(e_2)]^2 + k_1 \text{sat}(e_1)e_2 + \\ & \gamma(e_3 - e_4)[3k_1 \text{sat}(e_1) + k_2 \text{sat}(e_2)]. \end{aligned} \quad (50)$$

结合式(40)与(47)中结论, 当 $t > T_2 > T_1$ 时, $|e_3 - e_4| \leq \pi/2$ 且 $\text{sat}(e_2) = e_2$. 利用引理1的结论, 可将式(50)整理如下:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{12} \leq & -[k_1 \text{sat}(e_1) + k_2 e_2]^2 + k_1 \text{sat}(e_1)e_2 + \\ & \frac{3k_1 + k_2}{\pi}(e_3 - e_4)^2. \end{aligned} \quad (51)$$

最后, 对所有信号进行分析. 将 $V_{12}(t)$ 与 $V_{34}(t)$ 结合在一起, 得如下关于 $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$, $e_4(t)$ 正定的标量函数 $V(t)$:

$$V := V_{12} + \frac{1}{2}V_{34}, \quad (52)$$

求 $V(t)$ 关于时间的导数, 利用式(33)与式(51)的结论进行整理, 可知当 $t > T_2$ 时(此时 $\text{sat}(e_2) = e_2$),

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{1}{4}e_3^2 - \frac{1}{4}e_4^2 - \frac{2}{3}[k_1 \text{sat}(e_1) + k_2 e_2]^2 + \\ & k_1 \text{sat}(e_1)e_2 + \frac{3k_1 + k_2}{\pi}(e_3 - e_4)^2. \end{aligned} \quad (53)$$

借助式(39)所示的关系式, 可进一步将式(53)放缩为如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{\pi - 8(3k_1 + k_2)}{4\pi}(e_3^2 + e_4^2) - \\ & \frac{2}{3}[\text{sat}(e_1), e_2] \cdot \Lambda \cdot [\text{sat}(e_1), e_2]^T, \end{aligned} \quad (54)$$

式中 $\Lambda \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 表示如下对称矩阵:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} k_1^2 & k_1(k_2 - 3/4) \\ k_1(k_2 - 3/4) & k_2^2 \end{bmatrix}. \quad (55)$$

不难验证, 当控制增益 k_1 与 k_2 满足式(13)中条件时, $e_3^2(t)$ 与 $e_4^2(t)$ 前的系数为负, 且矩阵 Λ 正定对称, 由此可知 $\dot{V}(t)$ 负定, 于是

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t), e_2(t), e_3(t), e_4(t) = 0, \quad (56)$$

并且, 对于 $t > T_2 > T_1$, $e_1(t)$ 有界, 即

$$e_1 \in \mathcal{L}_\infty, t > T_2 > T_1. \quad (57)$$

进一步,由式(30)可知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_1(t), \theta_2(t), \dot{\theta}_1(t), \dot{\theta}_2(t) = 0. \quad (58)$$

联立式(41)与式(57),有

$$e_1 \in \mathcal{L}_\infty, t \geq 0. \quad (59)$$

那么,将式(38)(48)及(59)所示的结论依次代入式(25)(8)与(11),可得如下结论:

$$\begin{aligned} \chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4 \in \mathcal{L}_\infty \implies \\ \theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2 \in \mathcal{L}_\infty, \phi \in \mathcal{L}_\infty. \end{aligned} \quad (60)$$

进一步,将式(23)与(60)代入式(16)及(18),易知

$$\psi \in \mathcal{L}_\infty, u \in \mathcal{L}_\infty. \quad (61)$$

联立式(38)(48)(58)–(61),可知定理结论成立.证毕.

4 仿真实验与分析 (Simulation and analysis)

在本节,将通过一系列仿真结果验证所提方法的有效性及其鲁棒性.

在仿真中,惯性轮摆系统的参数设置如下:

$$\begin{cases} I_1 = 0.078 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, I_2 = 0.014 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ m = 0.127 \text{ kg} \cdot \text{m}, g = 9.8 \text{ m/s}^2. \end{cases} \quad (62)$$

为更好地体现所提方法的控制性能,本文选取文献[17]中所提基于反步法的全局控制方法进行对比,限于篇幅,此处不再给出对比控制器的表达式.经充分调试后,本文方法的控制增益选取为 $k_\phi = 10, \bar{d} = 2, k_1 = 0.2, k_2 = 0.46$.¹此外,在仿真中,为了消除抖动现象,将控制器(18)中的符号函数项 $\bar{d}\text{sgn}(s)$ 替换为 $\bar{d}\tanh(10s)$.

在随后的仿真中,除了下面第4组仿真外,均考虑最摆杆初始时刻处于竖直向下位置的情形,²即

$$\theta_1(0) = \pi, \theta_2(0) = 0, \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0.$$

此外,为了较全面地验证所提方法的控制性能,在此进行不同情况下的4组仿真测试,具体如下:

第1组 无不确定性因素,即式(2)中集总干扰项为 $d(t) = 0$.

第2组 有不确定性因素及干扰影响,假设集总干扰项为 $d(t) = 0.5 \sin t$.

第3组 在第40s至44s之间,人为地给摆杆转角(即 $\theta_1(t)$)添加幅值为 $2\pi/3$,周期为0.5s的周期扰动.

第4组 测试不同摆杆角度初始值[即 $\theta_1(0)$]时的

性能,为此将 $\theta_1(0)$ 的取值依次设置为 $2\pi/3, \pi/2, -2\pi/3$.

相应的仿真结果如图2–6所示,其中,第3个子图中 $e(t)$ 表示由 $\theta_1(t)$ 及 $\theta_2(t)$ 组成的输出向量的二范数,即 $e(t) = \sqrt{\theta_1^2(t) + \theta_2^2(t)}$,可反映系统输出的变化情况.此外,为更好地描述控制系统的响应速度,引入调节时间 t_s ,它表示 $e(t)$ 首次进入 $e(t) \leq 5 \text{ rad}$ 并随后一直保持在范围所需的最短时间.

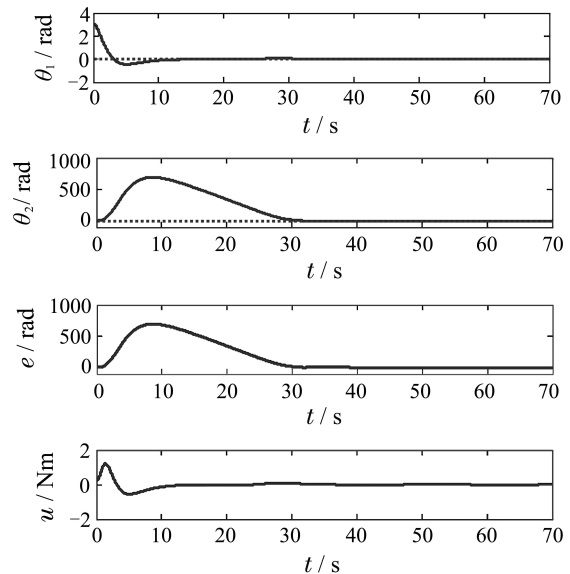


图2 第1组仿真: 本文方法控制结果(点线: $\theta_1(t), \theta_2(t) = 0$)
Fig. 2 Group 1: results of the proposed method (dotted line: $\theta_1(t), \theta_2(t) = 0$)

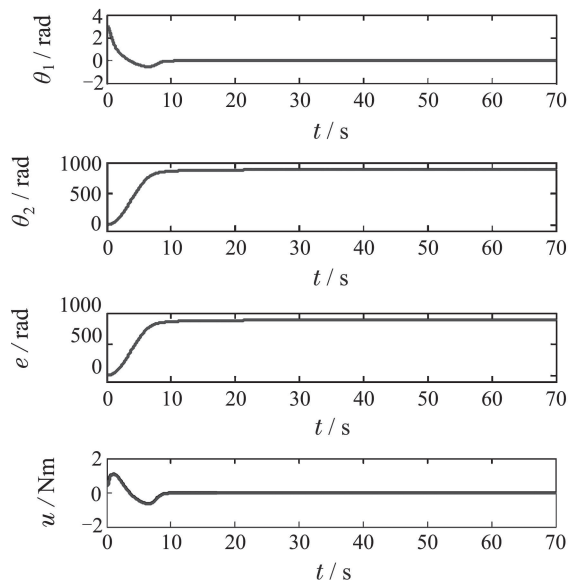


图3 第1组仿真: 对比方法^[17]控制结果
Fig. 3 Group 1: results of the comparative method in [17]

¹值得说明的是,由于Lyapunov分析方法自身的保守性及本文在推导过程中进行了较多的放缩运算,导致式(13)中条件比较保守,即该条件比实际可用的控制增益范围要小很多.通过大量的仿真分析表明,在选取控制增益 k_1 及 k_2 时,可适当放宽式(13)中的不等式约束.

²对于惯性轮摆系统而言,竖直向下位置是最为苛刻的初始状态条件.

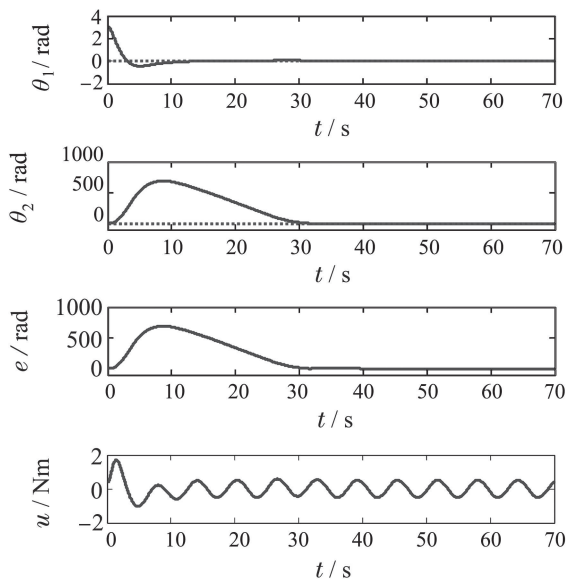


图4 第2组仿真: 本文方法控制结果(点线: $\theta_1(t), \theta_2(t) = 0$)
Fig. 4 Group 2: results of the proposed method (dotted line: $\theta_1(t), \theta_2(t) = 0$)

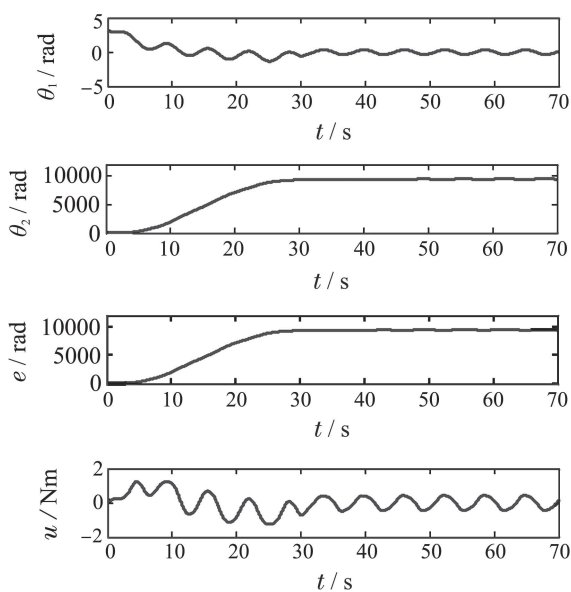


图5 第2组仿真: 对比方法^[17]控制结果
Fig. 5 Group 2: results of the comparative method in [17]

从图2可知, 本文方法可将摆杆摇起到竖直向上的位置, 并同时使惯性轮的转角转回初始状态, 即能够确保 $\theta_1(t)$ 及 $\theta_2(t)$ 均趋于零. 相比之下, 如图3所示, 虽然文献[17]中方法也能保证 $\theta_1(t)$ 收敛为零, 将摆杆从竖直向下位置摇起, 但却无法确保 $\theta_2(t)$ 回到初始状态. 此外, 值得说明的是, 对于图2与图3所示的仿真结果, 本文方法需要的调节时间 t_s 为31s, 而对比方法由于无法保证 $\theta_2(t)$ 的收敛, 对应的调节时间则为无穷大.

观察图4-5可知, 在集总干扰的影响下, 所提控制方法依然能保持良好的控制性能, 摆杆、惯性轮对应转角 $\theta_1(t), \theta_2(t)$ 的暂态与稳态响应几乎未受到影

响(对比图2), 而对比方法的控制效果则大打折扣, 摆杆在竖直向上位置附近左右晃动. 除此之外, 由图6可见, 本文控制方法能够快速地调节惯性轮的转动, 有效地消除施加在摆杆[对应 $\theta_1(t)$]上的周期性外界干扰所带来的影响(如图6中3个子图中的局部放大图所示). 图7表明, 在无需调整控制参数的前提下, 所提控制方法在不同初始条件的情况下, 均可实现对 $\theta_1(t), \theta_2(t)$ 的镇定控制, 体现了该方法的灵活性. 此外, 值得说明的是, 尽管在仿真时使用 $\bar{d}\tanh(10s)$ 替换了符号函数项 $\bar{d}\text{sgn}(s)$, 控制器(18)依然取得了良好的控制效果, 且对不同干扰具有较强的鲁棒性.

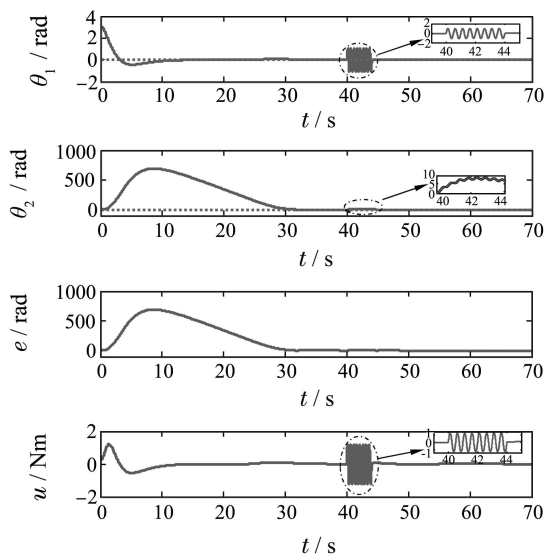


图6 第3组仿真: 周期扰动(点线: $\theta_1(t), \theta_2(t) = 0$)
Fig. 6 Group 3: periodical disturbances (dotted line: $\theta_1(t), \theta_2(t) = 0$)

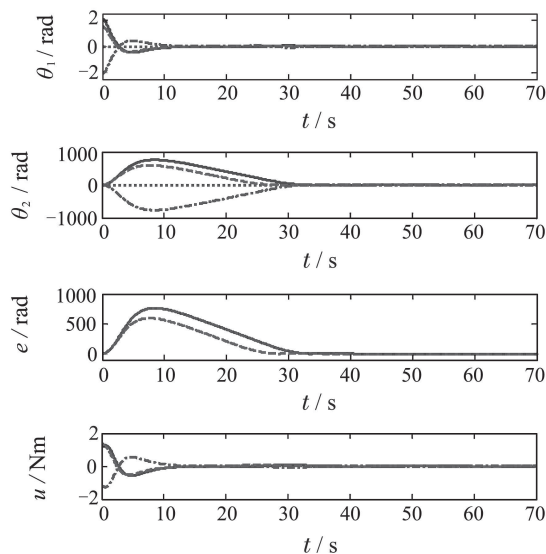


图7 第4组仿真: 不同初始条件(实线: $\theta_1(0) = 2\pi/3$, 虚线: $\theta_1(0) = \pi/2$, 点画线: $\theta_1(0) = -2\pi/3$, 点线: $\theta_1(t), \theta_2(t) = 0$)
Fig. 7 Group 4: different initial conditions (solid line: $\theta_1(0) = 2\pi/3$, dashed line: $\theta_1(0) = \pi/2$, dotted-dashed line: $\theta_1(0) = -2\pi/3$, dotted line: $\theta_1(t), \theta_2(t) = 0$)

5 结束语(Concluding remarks)

针对受不确定因素影响的欠驱动惯性轮摆系统, 本文提出了一种新颖的滑模控制策略, 能够实现对该系统的全局镇定控制. 不同于现有方法, 所提方法在无需任何切换的前提下, 可以将不可驱动的摆杆摇起到竖直向上位置的同时, 使惯性轮的转角恢复到初始状态, 且对外界干扰表现出较强的鲁棒性, 具有重要意义. 在理论分析方面, 通过两个定理对闭环系统平衡点的稳定性进行了严格的数学分析. 其中: 第1个定理表明在所提控制器的作用下, 即便在系统受到外界干扰的影响时, 系统状态也将始终保持在滑模面上. 第2个定理则证明当状态变量处于滑模面上时, 始终有界并全局渐近收敛于平衡点. 论文利用仿真结果验证了所提方法的性能, 并将其与已有文献中的方法进行了对比. 在接下来的工作中, 将进一步扩展本文方法, 将其扩展于更为广义的一类欠驱动机电系统的控制问题.

参考文献(References):

- [1] SUN Ning, FANG Yongchun. A review for the control of a class of underactuated systems [J]. *CAAI Transactions on Intelligent Systems*, 2011, 6(3): 200 – 207.
(孙宁, 方勇纯. 一类欠驱动系统的控制方法综述 [J]. 智能系统学报, 2011, 6(3): 200 – 207.)
- [2] ZHANG Zhongcai, WU Yuqiang. Output-feedback stabilization of uncertain nonholonomic systems with time-varying delay [J]. *Control and Decision*, 2014, 29(9): 1569 – 1575.
(张中才, 武玉强. 具有时变时滞的不确定非完整系统的输出反馈镇定 [J]. 控制与决策, 2014, 29(9): 1569 – 1575.)
- [3] XIAN Bin, GU Xun, LIU Xiang, et al. Nonlinear robust attitude control for a miniature unmanned helicopter [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(4): 409 – 416.
(鲜斌, 古训, 刘祥, 等. 小型无人直升机姿态非线性鲁棒控制设计 [J]. 控制理论与应用, 2014, 31(4): 409 – 416.)
- [4] HOU Z G, ZOU A M, CHENG L, et al. Adaptive control of an electrically driven nonholonomic mobile robot via backstepping and fuzzy approach [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2009, 17(4): 803 – 815.
- [5] SUN N, FANG Y, ZHANG X. Energy coupling output feedback control of 4-DOF underactuated cranes with saturated inputs [J]. *Automatica*, 2013, 49(5): 1318 – 1325.
- [6] SUN N, FANG Y. New energy analytical results for the regulation of underactuated overhead cranes: An end-effector motion-based approach [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2012, 59(12): 4723 – 4734.
- [7] SUN N, FANG Y, ZHANG Y, et al. A novel kinematic coupling-based trajectory planning method for overhead cranes [J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2012, 17(1): 166 – 173.
- [8] LAI X Z, SHE J H, YANG S X, et al. Comprehensive unified control strategy for underactuated two-link manipulators [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part B: Cybernetics*, 2009, 39(2): 389 – 398.
- [9] LIU Rongjie, LI Shihua. Optimal control design for an overhead crane system using pseudospectral method [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(8): 981 – 989.
(刘榕洁, 李世华. 桥式吊车系统的伪谱最优控制设计 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(8): 981 – 989.)
- [10] SUN Ning, FANG Yongchun, QIAN Yuzhe. Motion planning for cranes with double pendulum effects subject to state constraints [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(7): 974 – 980.
(孙宁, 方勇纯, 钱或哲. 带有状态约束的双摆效应吊车轨迹规划 [J]. 控制理论与应用, 2014, 31(7): 974 – 980.)
- [11] SPONG M W, CORKE P, LOZANO R. Nonlinear control of the reaction wheel pendulum [J]. *Automatica*, 2001, 37(11): 1845 – 1851.
- [12] CHEN Mou, JIANG Changsheng, WU Qingxian. Inverted pendulum system control based on nonlinear control method [J]. *Control Theory & Applications*, 2004, 21(5): 684 – 688.
(陈谋, 姜长生, 吴庆宪. 基于非线性控制方法的倒立摆系统控制 [J]. 控制理论与应用, 2004, 21(5): 684 – 688.)
- [13] AGUILAR L T, BOIKO I M, FRIDMAN L M, et al. Generating oscillations in inertia wheel pendulum via two-relay controller [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012, 22(3): 318 – 330.
- [14] ANDARY S, CHEMORI A, BENOIT M, et al. A dual model-free control of underactuated mechanical systems, application to the inertia wheel inverted pendulum [C] // *Proceedings of the 2012 American Control Conference*. Montréal, Canada: IEEE, 2012: 1029 – 1034.
- [15] ANDARY S, CHEMORI A, KRUT S. Control of the underactuated inertia wheel inverted pendulum for stable limit cycle generation [J]. *Advanced Robotics*, 2009, 23(15): 1999 – 2014.
- [16] SRINIVAS K N, BEHERA L. Swing-up control strategies for a reaction wheel pendulum [J]. *International Journal of Systems Science*, 2008, 39(12): 1165 – 1177.
- [17] OLFATI-SABER R. *Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles* [D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 2001.
- [18] ORTEGA R, SPONG M W, GÓMEZ-ESTERN F, et al. Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(8): 1218 – 1233.
- [19] LAILA D S, ASTOLFI A. Discrete-time IDA-PBC design for separable Hamiltonian systems [C] // *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*. Prague, Czech Republic: IFAC, 2005: 838 – 843.
- [20] SANTIBAÑEZ, KELLY R, SANDOVAL J. Control of the inertia wheel pendulum by bounded torques [C] // *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and the European Control Conference*. Seville, Spain: IEEE, 2005: 8266 – 8270.
- [21] SARRAS I, ACOSTA J Á, ORTEGA R, et al. Constructive immersion and invariance stabilization for a class of underactuated mechanical systems [J]. *Automatica*, 2013, 49(5): 1442 – 1448.
- [22] LÓPEZ-MARTÍNEZ M, ACOSTA J Á, CANO J M. Non-linear sliding mode surfaces for a class of underactuated mechanical systems [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2010, 4(10): 2195 – 2204.
- [23] TEEL A R. Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls [J]. *Systems & Control Letters*, 1992, 18(3): 165 – 171.
- [24] KHALIL H K. *Nonlinear Systems* [M]. 3rd ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2002.

附录 引理1的证明(Appendix Proof of Lemma 1)

首先, 定义如下辅助函数 $f(x)$:

$$f(x) = |\sin x - x| - \frac{x^2}{\pi}, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (\text{A1})$$

经分析, 不难得知 $f(x)$ 为偶函数. 因此, 随后仅讨论区间 $x \in [0, \pi/2]$. 此时, 可将式(A1)改写如下:

$$f(x) = x - \sin x - \frac{x^2}{\pi}. \quad (\text{A2})$$

将 $f(x)$ 对 x 求导, 可得

$$f'(x) = 1 - g(x), \quad (\text{A3})$$

式中

$$g(x) = \cos x + \frac{2x}{\pi}.$$

进一步, 对 $g(x)$ 关于自变量 x 求导, 有如下结论:

$$g'(x) = -\sin x + \frac{2}{\pi}.$$

令 $g'(x) = 0$, 可得 $x = \arcsin(2/\pi)$. 进一步地, 经分析不难得知, 当 $x \in [0, \arcsin(2/\pi))$ 时, $g'(x) > 0$, 即 $g(x)$ 单调递增; 当 $x \in (\arcsin(2/\pi), \pi/2]$ 时, $g'(x) < 0$, 即 $g(x)$ 单调递减. 因此, $g(x)$ 在区间 $x \in [0, \pi/2]$ 上的最小值 g_{\min} 为

$$g_{\min} = \min\{g(0), g(\pi/2)\} = 1.$$

因此, 由式(A3)可知

$$f'(x) \leq 1 - g_{\min} \leq 0,$$

即 $f(x)$ 在 $x \in [0, \pi/2]$ 区间上单调递减, 故由式(A2)不难得知, 当 $x \in [0, \pi/2]$ 时, 如下结论成立:

$$f(x) \leq f(0) = 0 \Rightarrow |\sin x - x| \leq \frac{x^2}{\pi}.$$

根据偶函数的对称性质知, 对任意 $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, 不等式关系 $|\sin x - x| \leq x^2/\pi$ 恒成立, 因此, 该引理的结论成立.

证毕.

作者简介:

孙宁 (1988-), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为陆地/船用吊车自动控制、轮式机器人自主控制、非线性控制与其在(欠驱动)机电系统中的应用, E-mail: sunn@nankai.edu.cn;

方勇纯 (1973-), 男, 教授, 博士生导师, IEEE高级会员, 主要研究方向为非线性控制、机器人视觉伺服、无人机及桥式吊车等欠驱动系统控制, E-mail: fangyc@nankai.edu.cn;

陈鹤 (1992-), 男, 博士研究生, 目前研究方向为吊车系统与移动机器人控制, E-mail: chenh@mail.nankai.edu.cn.