

随机性参数分布式量化估计及其最优比特分配

沈志萍¹, 陈军勇², 邬依林^{3†}

(1. 河南师范大学 数学与信息科学学院 大数据统计分析与优化控制河南省工程实验室, 河南 新乡 453007;

2. 中航通飞研究院, 广东 珠海 519040; 3. 广东第二师范学院 计算机科学系, 广东 广州 510310)

摘要: 本文研究总比特率给定下随机向量参数分布式量化估计及其最优比特分配问题. 与现有文献大都假定每个传感器的量化比特率给定而不是最优分配下研究随机性参数的分布式量化估计问题不同的是, 本文将综合考虑最优量化器、最优估计器算法以及给定总比特率下的最优比特分配问题. 针对向量状态标量观测模型, 首先借助现有文献给出基于量化观测的最优估计器及其误差协方差阵形式表达, 其次得到各传感器的渐近最优量化器实际为著名的 Lloyd-max 量化器, 且各传感器的渐近最优量化级数与信噪比成正比, 同时引入一种次优的求解非负整数比特率的方法. 考虑到当传感器数目比较大时, 初始的最优估计器算法运算量很大, 设计了一种渐近等价的迭代量化估计器算法, 其计算负担大大减轻, 且对于存在延迟或丢包的的网络环境亦适用, 增强了算法的鲁棒性. 仿真结果表明, 本文提出的最优比特分配方案估计性能明显优于一般的均匀比特分配方案.

关键词: 最优比特分配; 量化信号; 最优设计; 分布式算子; 分布式量化估计; Lloyd-max 量化器; 最小均方误差

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Distributed quantization estimation and optimal bit allocation for a random variable

SHEN Zhi-ping¹, CHEN Jun-yong², WU Yi-lin^{3†}

(1. Henan Engineering Laboratory for Big Data Statistical Analysis and Optimal Control, School of Mathematics and Information Sciences, Henan Normal University, Xinxiang Henan 453007, China;

2. China Aviation Industry General Aircraft Institute, Zhuhai Guangdong 519040, China;

3. Department of Computer Science, Guangdong University of Education, Guangzhou Guangdong 510310, China)

Abstract: This paper studies distributed quantization estimation and optimal bit allocation problems of a random vector parameter given a total bit rate. Different from the existing literature generally assumed that each sensor quantization bit rate is given rather than optimal bit allocation in researching the corresponding problem, this paper will combine the design of the optimal quantizer, the optimal estimator algorithm and the optimal bit allocation problem under a given total bit. For a vector state scalar observation of an observation model, we first give the optimal estimator and its error covariance matrix in form based on the quantitative observation with the existing literature, and then to get a conclusion that the asymptotic optimal quantizer of each sensor is actual the famous Lloyd-max quantizer, and that the asymptotic optimal quantization level of each sensor is proportional to the signal-to-noise ratio (SNR), at the same time, we introduce a suboptimal method of solving the non-negative integer bit rate. Considering when the number of sensors is larger, the original optimal estimator algorithm computational complexity is very big, we design a asymptotic equivalence iterative quantization estimator algorithm, which can greatly reduce the calculation burden, and can apply to the network environment with some delay or packet loss, so this method can also enhance the robustness of the algorithm. Simulation results show that our designed method can achieve a significant amount of the estimation MSE reduction when compared with the uniform allocation scheme in which each sensor quantizes its observation with the identical bit.

Key words: optimal bit allocation; quantization signal; optimal design; distributed algorithms; distributed quantization estimation; Lloyd-max quantization; minimum mean-square error

收稿日期: 2015-06-01; 录用日期: 2016-05-20.

†通信作者. E-mail: lyw@gdei.edu.cn. Tel.: +86 20-34115714.

本文责任编辑: 方海涛.

国家自然科学基金项目(61273109, 60774057), 广东第二师范学院教授博士科研专项经费(2014ARF25), 广东省科技计划项目(2014A090906010, 2016A010106007), 河南师范大学博士科研启动经费(5101019170158), 河南省高等学校重点科研项目(16A120005)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61273109, 60774057), Appropriate Researching Fund for Professors and Doctors, Guangdong University of Education (2014ARF25), Science and Technology Planning Project of Guangdong Province, China (2014A090906010, 2016A010106007), Foundation for Ph.D. of Henan Normal University, China (5101019170158) and Key Scientific Research Project of Universities and Colleges in Henan, China (16A120005).

1 引言(Introduction)

随机性参数估计一般基于贝叶斯估计原理进行研究的, 其中待估计参数被看作具有先验分布的随机变量, 在某个采样周期, 基于量化观测对其具体实现进行估计. 1988年Ephraim和Gray^[1]较早地针对单个噪声源的最优估计问题, 通过对失真测度的适当变换, 将状态估计转换为对信源的标准量化问题, 得到统一的最优量化和估计方法. 1990年Ayanoglu^[2]研究了单个噪声源最优量化器设计问题, 获得了最优量化分区和量化值, 并对不同估计器性能进行分析和比较. Lam和Reibman^[3]较早地基于贝叶斯失真函数和Fisher信息研究随机性参数的分布式量化估计问题, 得到最优量化器必须满足的必要条件, 并对不同量化方案进行仿真比较. 上述文献的量化器设计一般比较复杂, 且往往需要对高维分布函数进行积分运算等. 1993年Gubner^[4]在前人研究基础上, 提出一种迭代形式的局部最优量化器算法, 该算法只需利用双变量概率分布函数, 且当只有单传感器观测时, 最优量化器退化为Lloyd-max量化器^[5-6]. 近几年, 文献[7]基于Gubner^[4]的思想得到了最优线性量化估计器并给出迭代的量化器设计算法, 文献[8]基于Slepian-Wolf编码器^[9]研究了高精度量化方案(high-resolution regime)下的渐近最优量化器设计问题, 并对其概率失真函数与分布式估计器性能的信息论下界^[10-12]进行比较.

综上, 对于随机性参数的分布式量化估计问题, 大多数文献亦是在每个传感器的量化比特率给定下, 研究其最优量化器和估计器的设计问题, 而对于给定总比特率下的最优比特分配问题的研究则很少, 因此有待于进一步研究. 另外, 绝大多数文献假定待估计参数为标量, 而对于向量系统的分布式量化估计问题的研究十分有限.

针对目前比较热门的分布式系统^[13-14], 本文将综合考虑最优量化器、最优估计器算法以及给定总比特率下的最优比特分配问题. 针对向量状态标量观测模型, 首先借助现有文献给出基于量化观测的最优估计器及其误差协方差阵形式表达, 其次基于最优估计器得到传感器的渐近最优量化器实际为著名的Lloyd-max量化器, 且传感器的渐近最优量化级数与信噪比成正比. 进一步, 考虑到当传感器数目比较大时, 初始的最优估计器算法运算量很大, 设计了一种渐近等价的迭代量化估计器算法, 其计算负担大大减轻, 且对于存在延迟或丢包的网络环境亦适用, 增强了算法的鲁棒性. 仿真结果表明, 信噪比越大的传感器, 其所分配的量化比特率亦越大; 同时信噪比随传感器观测噪声方差增加而递减, 当噪声方差较小时, 信噪比变化很快, 当信噪比较大时, 信噪比变化缓慢, 这说明传感器的噪声方差较小时其对量化比特率的分配影响较

大, 而噪声方差较大时, 其对量化比特率的分配影响不大; 另外本文提出的最优比特分配方案估计性能明显优于一般的均匀比特分配方案, 且当总带宽足够大时, 各估计器的均方误差曲线趋于其理论下界. 仿真验证了理论的有效性.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑具有 N 个节点的传感器网络, 各节点之间不存在通讯, 每个传感器对一共同随机性向量参数 θ 进行观测, 其中 $\theta \in \mathbb{R}^{p \times 1}$, 各传感器的观测值经过量化再编码后发送至融合中心(fusion center), 融合中心基于接收到的量化观测值对随机性向量参数 θ 进行估计, 分布式量化估计结构如图1所示.

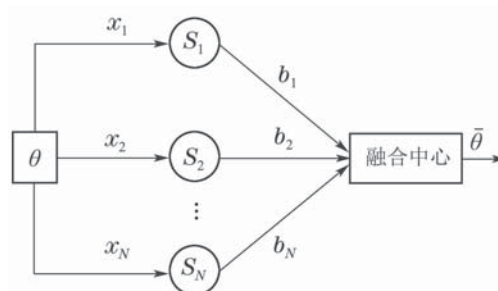


图 1 分布式量化估计结构示意图

Fig. 1 Distributed quantization estimation scheme

传感器 n 的观测模型为

$$x_n = h\theta + v_n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

其中: $h \in \mathbb{R}^{1 \times p}$, $\{v_n\}_{n=1}^N$ 为零均值空间不相关的高斯白噪声. 不失一般性, 假定随机性向量参数满足 $\theta \sim \mathcal{N}(0, C_\theta)$, $C_\theta \in \mathbb{R}^{p \times p}$, 观测噪声满足 $v_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, 由测量模型可得 $x_n \sim \mathcal{N}(0, hC_\theta h^T + \sigma_n^2)$.

首先考虑理想情况下最小均方误差估计.

理想情况下最小均方误差估计: 若传感器与融合中心之间通讯有充足的带宽, 即传感器可发送未量化的观测 $\{x_n\}_{n=1}^N$ 到融合中心, 记 $X := [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$, $V := [v_1, v_2, \dots, v_N]^T$, 则由观测模型(1)得

$$X = H\theta + V, \quad (2)$$

其中: $H = [h^T, \dots, h^T]^T$, $H \in \mathbb{R}^{N \times p}$. 记 $C_X = HC_\theta H^T + \text{diag}\{\sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2\}$, 则由式(2)可得 $X \sim \mathcal{N}(0, C_X)$.

由文献[15]易知基于观测 X 对 θ 的最小均方误差估计(minimum mean square error, MMSE)为

$$\hat{\theta} = GX, \quad (3)$$

误差协方差阵为

$$\hat{C}_\theta = C_\theta - GHC_\theta, \quad (4)$$

其中 $G = C_\theta H^T C_X^{-1}$.

由于传感器网络中带宽限制, 需要对每个传感器观测值进行量化后传输, 融合中心的最小均方误差估

计需基于量化值, 接下来设计量化器.

量化器设计: 设 q_n 表示传感器 n 的量化比特率, 其中 $q_n \geq 0, q_n \in \mathbb{Z}$. 记传感器 n 的量化分区为 $R_i^{(n)} := [\tau_i^{(n)}, \tau_{i+1}^{(n)})$, 其中 $\{\tau_i^{(n)}\}_{i=0}^{2^{q_n}}$ 为传感器 n 的量化阈值集, 且 $\tau_0^{(n)} = -\infty, \tau_{2^{q_n}}^{(n)} = \infty$.

传感器观测 x_n 的量化规则如下:

$$b_n = i, \text{ iff } x_n \in R_i^{(n)}, \quad (5)$$

其中二进制数 $i \in \{0, 1, \dots, 2^{q_n} - 1\}$ 表示量化输出, 量化器如图2所示. 基于上述一般量化器, 下面给出基于量化值的最小均方误差估计.

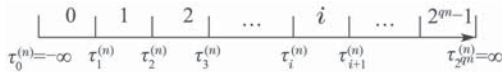


图2 量化器示意图

Fig. 2 Quantizer structure

基于量化值的最小均方误差估计: 本文所采用估计性能准则为均方误差(MSE), 当融合中心接收到量化观测 B , 设 $B = I, I = [i_1, i_2, \dots, i_N]^T$, 其中 i_n 表示 b_n 的量化输出值, 则基于量化观测 $B = I$ 对 θ 的最小均方误差估计^[16-17](QMMSE)为

$$\bar{\theta} = GE\{X|B = I\}, \quad (6)$$

状态后验协方差阵为

$$\bar{C}_\theta = \hat{C}_\theta + G\text{var}(X|B = I)G^T, \quad (7)$$

其中 $\text{var}(X|B = I)$ 表示条件分布 $p(X|B = I)$ 的协方差阵.

采用均方误差(MSE)作为估计性能准则, 定义

$$\text{MSE} := \text{tr}\{E_B(\bar{C}_\theta)\}, \quad (8)$$

其中期望是针对 B 取.

基于上述描述, 下面提出本文所要研究的主要问题.

问题提出: 由于传感器网络中的带宽限制, 假定在每个采样周期, 总共有 Q 位用于传输传感器的观测. 由于各传感器的观测噪声方差不一样, 因此均匀分配数据传输率将达不到最优估计性能, 本文所求的优化问题可概括为两方面, 一是基于量化观测作出对 θ 的最优估计, 二是最优分配比特率到各传感器, 此联合优化问题可描述如下:

$$\begin{aligned} & \min \text{MSE}, \\ & \text{s.t. } \sum_{n=1}^N q_n = Q, q_n \geq 0, q_n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (9)$$

注1 量化器(5)是所有量化器的一般表示, 最小均方误差估计(6)也是基于量化观测值 $B = I$ 对随机性参数 θ 的所有估计器的通用表达式, 通过求解上述优化问题, 期望得到最优量化器, 最优比特分配方案和QMMSE算法.

3 主要结论(Main results)

本小节将分别给出各传感器的渐近最优量化器、最优比特率分配方案以及QMMSE估计器算法, 同时考虑到当传感器数目比较大时, 初始的最优估计器算法运算量很大, 提出一种渐近等价于QMMSE估计器的准最小均方误差估计器算法. 考虑优化问题(9), 首先给出各传感器的渐近最优量化器定理.

3.1 各传感器的渐近最优量化器(Asymptotically optimal quantizer of each sensor)

不失一般性, 假定各传感器之间的测量噪声满足 $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \leq \dots \leq \sigma_N^2$, 记传感器 n 的信噪比(signal-noise ratio, SNR)为

$$\gamma_n := \frac{\sqrt{hC_\theta h^T + \sigma_n^2}}{\sigma_n^2},$$

则 $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_N$.

定理1 各传感器的渐近最优量化器实际上为Lloyd-max量化器.

证 根据式(8)中MSE的定义, 可得

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= \text{tr}\{\hat{C}_\theta\} + \text{tr}\{GE_B[\text{var}(X|B = I)]G^T\} = \\ &= \text{tr}\{\hat{C}_\theta\} + \text{tr}\{GMG^T\}, \end{aligned} \quad (10)$$

其中 M 为量化协方差阵. 考虑高精度量化方案, 即量化比特率比较大, 量化分区间隔比较小, 根据文献[16-18], 高精度量化方案下的量化误差协方差阵 M 可表示为

$$M = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_N\}, \quad (11)$$

其中 m_n 为 x_n 的量化方差, 并且 $m_n = E\{[x_n - E(x_n|b_n)]^2\}$.

重写 $C_X = HC_\theta H^T + \text{diag}\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_N^2\}$, 即

$$C_X = \begin{pmatrix} hC_\theta h^T + \sigma_1^2 & \dots & hC_\theta h^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ hC_\theta h^T & \dots & hC_\theta h^T + \sigma_N^2 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

记 $\varphi = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2}, \psi = \prod_{n=1}^N \sigma_n^2$, 对 C_X 取行列式如下:

$$\begin{aligned} |C_X| &= \begin{vmatrix} hC_\theta h^T + \sigma_1^2 & \dots & hC_\theta h^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ hC_\theta h^T & \dots & hC_\theta h^T + \sigma_N^2 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} hC_\theta h^T + \sigma_1^2 & hC_\theta h^T & \dots & hC_\theta h^T \\ -\sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sigma_1^2 & 0 & \dots & \sigma_N^2 \end{vmatrix} = \\ &= (hC_\theta h^T + \sigma_1^2)\sigma_2^2 \dots \sigma_N^2 + hC_\theta h^T \sigma_1^2 \sigma_3^2 \dots \\ &= \sigma_N^2 + \dots + hC_\theta h^T \sigma_1^2 \sigma_2^2 \dots \sigma_{N-1}^2 = \\ &= \psi(hC_\theta h^T \varphi + 1). \end{aligned} \quad (13)$$

故 C_X 逆矩阵为

$$C_X^{-1} = \frac{1}{|C_X|} \times \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{21} & \cdots & (-1)^{1+N} M_{N1} \\ -M_{12} & M_{22} & \cdots & (-1)^{2+N} M_{N2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{N+1} M_{1N} & (-1)^{N+2} M_{2N} & \cdots & M_{NN} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

其中 M_{ij} 为 C_X 中去除第 i 行和第 j 列的余子式,且根据行列变换以及式(13)可得

$$M_{ii} = \frac{\psi}{\sigma_i^2} [hC_\theta h^T (\varphi - \frac{1}{\sigma_i^2}) + 1],$$

$$M_{ij} = (-1)^{i+j-1} \frac{hC_\theta h^T \psi}{\sigma_i^2 \sigma_j^2}, \quad i \neq j. \quad (15)$$

由式(14)和式(15)可得

$$H^T C_X^{-1} = \frac{1}{hC_\theta h^T \varphi + 1} \left[\frac{h^T}{\sigma_1^2}, \frac{h^T}{\sigma_2^2}, \dots, \frac{h^T}{\sigma_N^2} \right] \quad (16)$$

和

$$G = \frac{1}{hC_\theta h^T \varphi + 1} \left[\frac{C_\theta h^T}{\sigma_1^2}, \frac{C_\theta h^T}{\sigma_2^2}, \dots, \frac{C_\theta h^T}{\sigma_N^2} \right], \quad (17)$$

因此,可得

$$\text{tr}\{GMG^T\} = \frac{hC_\theta C_\theta h^T}{(hC_\theta h^T \varphi + 1)^2} \sum_{n=1}^N \frac{m_n}{\sigma_n^4}. \quad (18)$$

由于 $\text{tr}\{\hat{C}_\theta\}$ 为一常量,于是优化问题(9)可转换为

$$\min \sum_{n=1}^N \frac{m_n}{\sigma_n^4},$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{n=1}^N q_n = Q, \quad q_n \geq 0, \quad q_n \in \mathbb{Z}. \quad (19)$$

接下来,根据式(19),对任意给定的量化比特率,极小化 $\sum_{n=1}^N \frac{m_n}{\sigma_n^4}$ 必需极小化 $\{m_n\}_{n=1}^N$,因此传感器的渐近最优量化器即为著名的Lloyd-max量化器^[5-6],定理得证.

注2 由于网络中各传感器之间不存在通讯,因此量化器必须单独设计,而融合中心联合解码.由定理1可知,在渐近意义上,最优量化实际上等价于观测信号的最优恢复,即为Lloyd-max量化器.

3.2 最优量化比特率分配方案(Optimal quantization bit rate allocation scheme)

定理1说明各传感器的渐近最优量化器实际上为Lloyd-max量化器,下面基于各传感器的渐近最优量化器讨论各传感器的渐近最优量化比特率分配方案.

定理2 各传感器的渐近最优量化比特率 $\{q_n^*\}_{n=1}^N$ 满足下式:

$$\frac{2^{q_i^*}}{2^{q_j^*}} = \frac{\gamma_i}{\gamma_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (20)$$

即

$$q_n^* = \frac{Q}{N} + \log_2 \left(\frac{\gamma_n}{\left(\prod_{k=1}^N \gamma_k \right)^{\frac{1}{N}}} \right), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (21)$$

其中最优激活传感器数目 S 和量化比特率的次优非负整数解可由交替序列比特分配算法得到^[19-20],简述如下:

首先分配第一位给信噪比最大的传感器 k , $k \in \{1, 2, \dots, N\}$,然后其信噪比通过下式修正,即

$$\frac{1}{2} \gamma_k \rightarrow \gamma_k, \quad (22)$$

接着再找信噪比最大的传感器分配第2位,然后同样按式(22)修正,依次直到所有比特分配完毕.

证 考虑Lloyd-max量化器的高精度量化方案,根据文献[6]有

$$m_n = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \times \frac{hC_\theta h^T + \sigma_n^2}{4^{q_n}}. \quad (23)$$

根据各传感器的信噪比(SNR),则有

$$\min \sum_{n=1}^N \frac{m_n}{\sigma_n^4} \Leftrightarrow \min \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n^2}{4^{q_n}}. \quad (24)$$

在总带宽限制 Q 下,根据均值不等式^[21]可得式(20),且

$$q_n^* = \frac{Q}{N} + \log_2 \left(\frac{\gamma_n}{\left(\prod_{k=1}^N \gamma_k \right)^{\frac{1}{N}}} \right), \quad (25)$$

其中: q_n^* 为传感器 n 的渐近最优比特率, $n = 1, 2, \dots, N$.

由于式(25)并不保证 $\{q_n^*\}_{n=1}^N$ 为非负整数,因此可利用交替序列比特分配算法^[19-20]得到次优非负整数解,即证.

注3 定理2中所述的交替序列比特分配算法与文献[19-20]中的算法原理一样,所解决的问题不同,文献[19-20]主要从信号恢复角度来研究向量信源最优恢复的比特分配问题,在给定总带宽限制下,其信源各分量的最优比特率仅由其信号方差决定,方差越大的分量所分配的比特率越大,而本文从估计的角度来研究最优比特分配问题,根据信噪比定义,最优比特分配不仅与信号方差有关,更与其观测噪声方差有关,因其反映了传感器对待估计状态的观测质量.

3.3 QMMSE估计器算法(QMMSE estimator algorithm)

定理1和定理2分别讨论了各传感器的渐近最优量化器、各传感器的渐近最优量化比特率,接下来讨论

QMMSE估计器算法,同时当QMMSE估计器算法计算量较大时,提出一种渐近等价于QMMSE估计器的准最小均方误差估计器算法.在给出结论之前,给出一些表示和引理.

记 $B_{1:n} := [b_1, b_2, \dots, b_n]^T, n = 1, 2, \dots, S$, 进而有

$$\begin{cases} \bar{\theta}(n) := E\{\theta|B_{1:n}\}, \\ \bar{C}_\theta(n) := E\{[\theta - \bar{\theta}(n)][\theta - \bar{\theta}(n)]^T|B_{1:n}\}. \end{cases} \quad (26)$$

记归一化的阈值集为

$$\phi_n(i) := \frac{\tau_i^{(n)} - \mu(n)}{\sigma_{x_n}},$$

其中: $\mu(n) = h\bar{\theta}(n-1)$, $\sigma_{x_n}^2 = h\bar{C}_\theta(n-1)h^T + \sigma_n^2$, 当融合中心接收到量化观测集 $\{b_n = i_n\}_{n=1}^S$ 时, 令

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\phi_n^2(i_n)/2} - e^{-\phi_n^2(i_n+1)/2}}{F[\phi_n(i_n+1)] - F[\phi_n(i_n)]}, \quad (27)$$

$$\beta_n = \alpha_n^2 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{\phi_n(i_n)e^{-\phi_n^2(i_n)/2} - \phi_n(i_n+1)e^{-\phi_n^2(i_n+1)/2}}{F[\phi_n(i_n+1)] - F[\phi_n(i_n)]}, \quad (28)$$

其中 $F(x) := \int_{-\infty}^x \mathcal{N}(x; 0, 1)dx$.

引理 1 对于随机变量 $\theta \in \mathbb{R}^{p \times 1}$, 设先验分布为 $f(\theta)$, 若观测集为 $B_S = [b_1, b_2, \dots, b_S]$, 则有

$$f(\theta|B_S) = f(\theta) \times \frac{p(b_1|\theta)}{p(b_1)} \times \frac{p(b_2|b_1, \theta)}{p(b_2|b_1)} \times \dots \times \frac{p(b_S|b_{S-1}, \dots, b_1, \theta)}{p(b_S|b_{S-1}, \dots, b_1)}. \quad (29)$$

证 根据贝叶斯原理, 有

$$p(\theta|B_S) = \frac{p(\theta, B_S)}{p(B_S)},$$

对上式右边项展开即得式(29). 证毕.

基于上述表示及引理, 下面给出主要结论.

定理 3 QMMSE估计器算法需要计算一 S 维零均值高斯随机向量观测在给定量化的观测下的条件均值和条件方差. 若 S 比较大, 此算法需要蒙特卡罗积分方法^[22], 因此对该算法进行修正如下.

在状态分布 $f(\theta|B_{1:n-1})$ 的高斯假定下, 即 $f(\theta|B_{1:n-1}) = \mathcal{N}(\theta; \bar{\theta}(n-1), \bar{C}_\theta(n-1))$, 提出一种渐近等价于QMMSE估计器的准最小均方误差估计算法(quasi-QMMSE), 表述如下:

对迭代序列 $n = 1, 2, \dots, S$, 有

$$\bar{\theta}(n) = \bar{\theta}(n-1) + \frac{\alpha_n \bar{C}_\theta(n-1)h^T}{\sqrt{h\bar{C}_\theta(n-1)h^T + \sigma_n^2}}, \quad (30)$$

$$\bar{C}_\theta(n) = \bar{C}_\theta(n-1) - \frac{\beta_n \bar{C}_\theta(n-1)h^T h \bar{C}_\theta(n-1)}{h\bar{C}_\theta(n-1)h^T + \sigma_n^2}, \quad (31)$$

其中: $\bar{\theta}(0) := 0, \bar{C}_\theta(0) := C_\theta$. 在每个采样周期, 融合中心迭代运算式(30)和式(31) S 次, 最终可得到 $\bar{\theta} = \bar{\theta}(S)$, 且 $\bar{C}_\theta = \bar{C}_\theta(S)$.

证 根据引理1可知, 可基于所激活传感器的量化观测 $\{b_n\}_{n=1}^S$ 采用迭代的方式对 θ 进行估计, 即先基于 b_1 得到 θ 的当前最优估计, 然后再基于 b_2 对状态估计进行更新, 如此重复直到所有激活传感器的量化观测利用完毕, 此种迭代算法等价于QMMSE的并行融合算法.

下面推导定理中迭代融合算法的具体形式.

考虑第 n 步迭代过程, 在状态分布 $f(\theta|B_{1:n-1})$ 为高斯假定下, 即

$$f(\theta|B_{1:n-1}) = \mathcal{N}[\theta; \bar{\theta}(n-1), \bar{C}_\theta(n-1)], \quad (32)$$

则 $x_n \sim N(\mu(n), \sigma_{x_n}^2)$. 根据文献[16], 有

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(n) &= \bar{\theta}(n-1) + g(n) \times \\ &[\mathbb{E}\{x_n|B_{1:n-1}, b_n = i_n\} - \mu(n)], \end{aligned} \quad (33)$$

且

$$\begin{aligned} \bar{C}_\theta(n) &= \\ &\bar{C}_\theta(n-1) - g(n)h\bar{C}_\theta(n-1)h^T + \\ &g(n)\text{var}\{x_n|B_{1:n-1}, b_n = i_n\}g^T(n), \end{aligned} \quad (34)$$

其中 $g(n) = \frac{\bar{C}_\theta(n-1)h^T}{\sigma_{x_n}^2}$.

由于

$$\mathbb{E}\{x_n|B_{1:n-1}, b_n = i_n\} =$$

$$\frac{\int_{\tau_{i_n}^{(n)}}^{\tau_{i_n+1}^{(n)}} x_n \mathcal{N}[x_n; \mu(n), \sigma_{x_n}^2] dx_n}{\int_{\tau_{i_n}^{(n)}}^{\tau_{i_n+1}^{(n)}} \mathcal{N}[x_n; \mu(n), \sigma_{x_n}^2] dx_n} =$$

$$\begin{aligned} &\mu(n) + \frac{\sigma_{x_n}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\phi_n^2(i_n)/2} - e^{-\phi_n^2(i_n+1)/2}}{F[\phi_n(i_n+1)] - F[\phi_n(i_n)]} = \\ &\mu(n) + \sigma_{x_n} \alpha_n. \end{aligned} \quad (35)$$

根据式(33), 得

$$\bar{\theta}(n) = \bar{\theta}(n-1) + \frac{\alpha_n \bar{C}_\theta(n-1)h^T}{\sqrt{h\bar{C}_\theta(n-1)h^T + \sigma_n^2}}. \quad (36)$$

定理中的式(30)即证.

另外, 有

$$\text{var}\{x_n|B_{1:n-1}, b_n = i_n\} =$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\{x_n^2|B_{1:n-1}, b_n = i_n\} - \mathbb{E}^2\{x_n|B_{1:n-1}, b_n = i_n\} = \\ &\mathbb{E}\{x_n^2|B_{1:n-1}, b_n = i_n\} - [\mu(n) + \sigma_{x_n} \alpha_n]^2. \end{aligned} \quad (37)$$

由于

$$E\{x_n^2 | B_{1:n-1}, b_n = i_n\} = \frac{\int_{\tau_{i_n}^{(n)}}^{\tau_{i_n+1}^{(n)}} x_n^2 N[x_n; \mu(n), \sigma_{x_n}^2] dx_n}{\int_{\tau_{i_n}^{(n)}}^{\tau_{i_n+1}^{(n)}} N[x_n; \mu(n), \sigma_{x_n}^2] dx_n} = \frac{\sigma_{x_n}^2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\phi_n(i_n)e^{-\phi_n^2(i_n)/2} - \phi_n(i_n+1)e^{-\phi_n^2(i_n+1)/2}}{F[\phi_n(i_n+1)] - F[\phi_n(i_n)]} + \sigma_{x_n}^2 + 2\mu(n)\sigma_{x_n}\alpha_n + \mu^2(n), \quad (38)$$

因此

$$\text{var}\{x_n | B_{1:n-1}, b_n = i_n\} = \sigma_{x_n}^2 \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Delta}{F[\phi_n(i_n+1)] - F[\phi_n(i_n)]} - \alpha_n^2 + 1 \right] = \sigma_{x_n}^2 (1 - \beta_n), \quad (39)$$

其中 $\Delta = \phi_n(i_n)e^{-\phi_n^2(i_n)/2} - \phi_n(i_n+1)e^{-\phi_n^2(i_n+1)/2}$.

故根据式(34), 可得

$$\bar{C}_\theta(n) = \bar{C}_\theta(n-1) - \frac{\beta_n \bar{C}_\theta(n-1) h^T h \bar{C}_\theta(n-1)}{h \bar{C}_\theta(n-1) h^T + \sigma_n^2}, \quad (40)$$

即式(31).

又根据引理1, 融合中心迭代运算式(30)–(31) S 次, 最终可得 $\bar{\theta} = \bar{\theta}(S)$, 且 $\bar{C}_\theta = \bar{C}_\theta(S)$. 证毕.

注 4 定理3中 quasi-QMMSE 迭代算法采用高斯假定, 类似假设见文献[23–25]等. 若 Q 比较大, 则其渐近成立, 因此其渐近等价于 QMMSE 估计算法. 采用迭代融合方法, 计算负担大大减轻, 且对存在时延和丢包网络亦适用, 即若融合中心仅接收到部分量化观测, 则融合中心可根据当前接收的量化观测作出对 θ 的最优估计, 当新的量化观测来到时, 即可对 θ 估计进行更新, 增强了融合算法的鲁棒性.

注 5 若待估计的随机变量退化为标量, 且观测为标量, 设观测模型为

$$x_n = h_n \theta + v_n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (41)$$

其中: $\theta \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\theta^2)$, $\{h_n\}_{n=1}^N$ 为给定标量常数集, 且 $v_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, 则可把模型(41)变换为

$$x'_n = \theta + v'_n, \quad (42)$$

其中: $x'_n = \frac{x_n}{h_n}$, $v'_n = \frac{v_n}{h_n}$, 故可量化信号 x'_n , 且其信噪比为

$$\gamma'_n = \frac{h_n \sqrt{h_n^2 \sigma_\theta^2 + \sigma_n^2}}{\sigma_n^2},$$

因此其最优比特分配和估计算法同定理2和定理3中向量情形类似.

4 仿真研究(Simulation research)

本小节用 MATLAB 仿真研究本文提出的渐近最优量化器和最优比特分配算法. 在所有仿真模拟中, 假定 $N = 10$, $\theta \sim \mathcal{N}(0, I_2)$, 且 $h = [1, 1]$, 各传感器的观测噪声方差及信噪比如表1所示.

表1给出了不同总带宽限制下传感器的最优比特分配值, 其中 $q_n = 0$ 表示传感器 n 未激活. 由表1可以看出, 信噪比越大的传感器, 其所分配的量化比特率亦越大.

表 1 最优比特分配

Table 1 Optimal bit allocation

σ_n^2	γ_n	$Q(5)$	$Q(10)$	$Q(20)$	$Q(30)$	$Q(40)$	$Q(50)$
0.26	5.7820	2	3	5	6	7	8
0.37	4.1608	2	3	4	5	6	7
0.62	2.6107	1	2	3	4	5	6
1.24	1.4516	0	1	3	4	5	6
2.68	0.8072	0	1	2	3	4	5
3.76	0.6383	0	0	1	2	3	4
5.53	0.4962	0	0	1	2	3	4
8.41	0.3836	0	0	1	2	3	4
12.52	0.3044	0	0	0	1	2	3
15.27	0.2721	0	0	0	1	2	3

图3给出了信噪比随观测噪声方差变化的曲线, 从图3可以看出, 信噪比随传感器观测噪声方差增加而递减, 当噪声方差较小时, 信噪比变化很快; 当信噪比较大时, 信噪比变化缓慢, 这说明传感器的噪声方差较小时其对量化比特率的分配影响较大, 而噪声方差较大时, 其对量化比特率的分配影响不大.

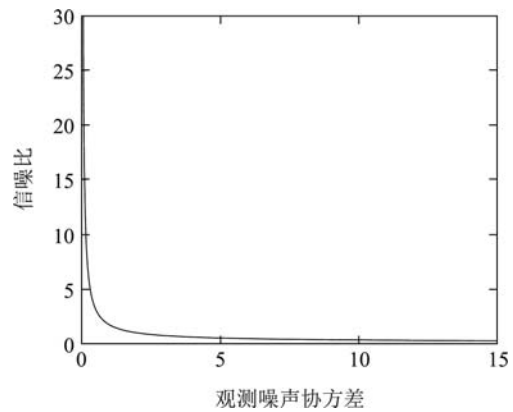


图 3 信噪比随噪声方差变化趋势, 其中 $h = [1, 1]$

Fig. 3 Signal-to-noise ratio varies with respect to the noise variance, where $h = [1, 1]$

图4给出了最优分配和均匀分配的 quasi-QMMSE 估计器的 MSE 曲线及理论不可达的 MSE 下界 (MMSE 估计器的 MSE), 其中对于均匀分配, 若 $Q < N$, 则笔者给前 Q 个信噪比最大的传感器各分配一位. 图4中的每个 MSE 数据为由 5000 次独立模拟运行的估计误差平方的平均值, 从图4可以看出, 本文提出的最优比特分配方案估计性能明显优于一般的均匀比特分配方案, 且当总带宽足够大时, 各估计器的 MSE 曲线都趋近于其理论下界.

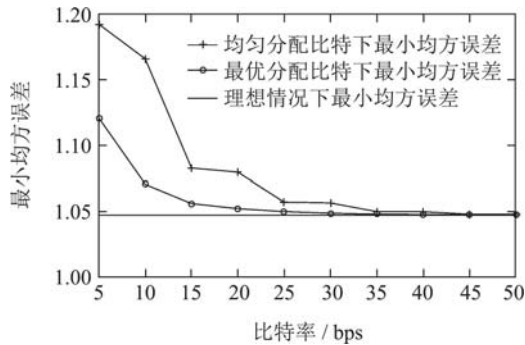


图4 估计器MSE比较

Fig. 4 MSE comparison of estimations

5 结论(Conclusions)

本文研究基于向量状态标量观测模型的分布式量化估计问题, 主要考虑其渐近最优量化器和比特分配问题以及QMMSE算法, 得到各传感器的渐近最优量化器实际为著名的Lloyd-max量化器, 且传感器的渐近最优量化级数与信噪比(SNR)成正比, 信噪比反映了传感器的综合观测质量, 其由传感器的观测噪声方差以及观测向量共同决定. 另外, 本文针对QMMSE最优估计算法计算量较大时提出一种渐近等价于QMMSE最优估计算法的迭代融合算法(quasi-QMMSE), 相比QMMSE并行融合算法, 其运算量大大降低, 且在存在延迟或丢包的网络环境中亦适用, 这增强了算法的鲁棒性. 仿真结果表明, 信噪比越大的传感器, 其所分配的量化比特率亦越大; 本文提出的最优比特分配方案估计性能明显优于一般的均匀比特分配方案, 且当总带宽足够大时, 各估计器的均方误差曲线趋于其理论下界.

参考文献(References):

- [1] EPHRAIM Y, GRAY R M. A unified approach for encoding clean and noisy sources by means of waveform and autoregressive model vector quantization [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1988, 34(4): 826 – 834.
- [2] AYANOGLU E. On optimal quantization of noisy sources [J]. *IEEE Transaction on Information Theory*, 1990, 36(6): 1450 – 1452.
- [3] LAM W M, REIBMAN A R. Design of quantizers for decentralized estimation systems [J]. *IEEE Transactions on Communication*, 1993, 41(11): 1602 – 1605.
- [4] GUBNAR J A. Distributed estimation and quantization [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1993, 39(4): 1456 – 1459.
- [5] MAX J. Quantizing for minimum distortion [J]. *IRE Transactions on Information Theory*, 1960, 6(1): 7 – 12.
- [6] LLOYD S P. Least squares quantization in PCM [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1982, 28(2): 129 – 137.
- [7] ZHANG K S, LI X R. Optimal sensor data quantization for best linear unbiased estimation fusion [C] // *The 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. Atlantis, Bahamas: IEEE, 2004, 3: 2856 – 2661.
- [8] MARANO S, MATTA V, WILLETT P. Asymptotic design of quantizers for decentralized MMSE estimation [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(11): 5485 – 5496.
- [9] COVER T M, THOMAS J A. *Elements of Information Theory* [M]. The 2nd Edition. Hoboken: John Wiley, 2006.
- [10] MOHAMMADI A, ASIF A, ZHONG X H, et al. Decentralized Bayesian estimation with quantized observations: theoretical performance bounds [C] // *Distributed Computing in Sensor Systems (D-COSS)*. Cambridge, USA: IEEE, 2013: 149 – 156.
- [11] PRABHAKARAN V, TSE D, RAMCHANDRAN K. Rate region of the quadratic Gaussian CEO problem [C] // *2004 IEEE International Symposium on Information Theory*. Chicago, USA: IEEE, 2004: 119 – 126.
- [12] CHEN J, ZHANG X, BERGER T, et al. An upper bound on the sum-rate distortion function and its corresponding rate allocation schemes for the CEO problem [J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2004, 22(6): 977 – 987.
- [13] WANG Lin, PENG Hui, ZHU Huayong, et al. Cooperative tracking of ground moving target using unmanned aerial vehicles in cluttered environment [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(3): 300 – 308.
(王林, 彭辉, 朱华勇, 等. 复杂环境下多无人机协作式地面移动目标跟踪 [J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(3): 300 – 308.)
- [14] WANG Changcheng, QI Guoqing, LI Yinya, et al. Consensus-based distributed filtering algorithm in sensor networks [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(12): 1645 – 1650.
(王长城, 戚国庆, 李银佺, 等. 传感器网络一致性分布式滤波算法 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(12): 1645 – 1650.)
- [15] KAY S M. *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory* [M]. 1st Edition. New Jersey, USA: PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993.
- [16] CURRY R E. *Estimation and Control with Quantized Measurements* [M]. New York, USA: The MIT Press, 1970.
- [17] CRISTESCU R, BEFERULL L B. Lossy network correlated data gathering with high-resolution coding [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(6): 2817 – 2824.
- [18] LINDER T, ZAMIR R. Causal coding of stationary sources and individual sequences with high resolution [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(2): 662 – 680.
- [19] RAMSTAD T A. Sub-band coder with a simple adaptive bit-allocation algorithm: a possible candidate for digital mobile telephony [C] // *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. Paris, France: IEEE, 1982, 7: 203 – 207.
- [20] SEGALL A. Bit allocation and encoding for vector sources [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1976, 22(2): 162 – 169.
- [21] STEELE J M. *An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities* [M]. Cambridge, USA: Cambridge University Press, 2004.
- [22] RUDOY D, WOLFE P J. Monte carlo methods for multi-modal distributions [C] // *Fortieth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*. Cambridge, USA: IEEE, 2006, 2019 – 2023.
- [23] HUBER M F, HANEBECK U D. Gaussian filtering for polynomial systems based on moment homotopy [C] // *International Conference on Information Fusion*. Istanbul, Turkey: IEEE, 2013: 1080 – 1087.
- [24] MSECJU E J, ROUMELIOTIS S I, RIBEIRO A, et al. Decentralized quantized Kalman filtering with scalable communication cost [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(8): 3727 – 3741.
- [25] WANG X X, QUAN P. Nonlinear Gaussian filter with the colored measurement noise [C] // *International Conference on Information Fusion*. Salamanca, Spain: IEEE, 2014: 1 – 7.

作者简介:

沈志萍 (1984–), 女, 博士, 副教授, 目前研究方向为网络化控制、分布式量化估计等, E-mail: zpshen@htu.cn;

陈军勇 (1983–), 男, 博士, 高级工程师, 目前研究方向为网络化控制、分布式量化估计等, E-mail: junonchern@yahoo.com;

鄂依林 (1970–), 男, 博士, 教授, 目前研究方向为分布式信号处理、网络化控制等, E-mail: lyw@gdei.edu.cn.