

带丢失观测和不确定噪声方差系统改进的鲁棒协方差交叉融合稳态Kalman滤波器

王雪梅^{1,2}, 刘文强¹, 邓自立^{1†}

(1. 黑龙江大学 电子工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150080; 2. 黑龙江工商学院 计算机系, 黑龙江 哈尔滨 150025)

摘要: 对带丢失观测和不确定噪声方差的线性定常多传感器系统, 引入虚拟噪声将原系统转化为仅带不确定噪声方差的系统. 根据极大极小鲁棒估值原理, 用Lyapunov方程方法提出局部鲁棒稳态Kalman滤波器及其实际方差最小上界, 并利用保守的局部滤波误差互协方差, 提出一种改进的鲁棒协方差交叉(covariance intersection, CI)融合稳态Kalman滤波器及其实际方差最小上界. 证明了所提出的鲁棒局部和融合滤波器的鲁棒性, 并证明了改进的CI融合器鲁棒精度高于原始CI融合鲁棒精度, 且高于每个局部滤波器的鲁棒精度. 一个仿真例子验证所提出结果的正确性和有效性.

关键词: 多传感器系统; 不确定噪声方差; 丢失观测; 协方差交叉(CI)融合; 极大极小鲁棒Kalman滤波器; Lyapunov方程方法

中图分类号: O211.64 文献标识码: A

Modified robust covariance intersection fusion steady-state Kalman filter for systems with missing measurements and uncertain noise variances

WANG Xue-mei^{1,2}, LIU Wen-qiang¹, DENG Zi-li^{1†}

(1. Electronic Engineering College, Heilongjiang University, Harbin Heilongjiang 150080, China;

2. Department of Computer, Heilongjiang Technology and Business College, Harbin Heilongjiang 150025, China)

Abstract: For the linear time-invariant multisensor system with missing measurements and uncertain noise variances, by introducing the fictitious noises, the original system can be converted into one with only uncertain noise variances. According to the minimax robust estimation principle, using the Lyapunov equation approach, the local robust steady-state Kalman filters and the minimal upper bounds of their actual variances are presented, and a modified robust covariance intersection (CI) fusion steady-state Kalman filter and the minimal upper bound of its actual variances are presented using the conservative cross-covariances of the local filtering errors. The robustness of the robust local and fused filters is proved, and it is proved that the robust accuracy of the modified CI fuser is higher than that of the original CI fuser, and higher than that of each local filter. A simulation example verifies correctness and effectiveness of the proposed results.

Key words: multisensor system; uncertain noise variance; missing measurements; covariance intersection (CI) fusion; minimax robust Kalman filter; Lyapunov equation approach

1 引言(Introduction)

多传感器信息融合Kalman滤波在通信、国防军事、信号处理、无人机、GPS定位等许多领域引起广泛关注^[1]. 信息融合估计的目的是利用局部观测数据或局部估值器得到更精确的融合状态估值器. 常用的两种融合方法是集中式融合和分布式融合方法^[2]. 对

于分布式融合方法, 有按矩阵加权、按对角阵加权和按标量加权的3种最优加权状态融合方法^[3]. 为了得到最优加权状态融合Kalman滤波器, 要求计算局部滤波误差方差和互协方差, 但在实际应用中, 存在互协方差未知不确定, 或者互协方差计算复杂等问题^[2]. 为了克服这种缺点和局限性, Julier和Uhlmann在文献

收稿日期: 2015-07-17; 录用日期: 2016-03-04.

†通信作者. E-mail: dzl@hlju.edu.cn; Tel.: +86 13804583507.

本文责任编辑: 俞立.

国家自然科学基金项目(60874063, 60374026), 黑龙江大学研究生创新科研项目(YJSCX2015-002HLJU)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (60874063, 60374026) and Postgraduate Innovation Project of Heilongjiang Province (YJSCX2015-002HLJU).

[4-6]中提出了带未知互协方差系统协方差交叉(covariance intersection, CI)融合方法,并且被进一步发展^[7-8],且应用于跟踪、定位、遥感、传感网络等许多方面^[6,9].为了改善CI融合器的精度,引入局部估值的相互均值和相互协方差信息,椭圆交叉(ellipse intersection, EI)融合方法被提出^[7].为了减少CI融合方法的计算负担,将多传感器CI融合器化为递推的两传感器CI融合器,一种序贯CI融合方法被提出^[8].原始CI融合方法的优点是互协方差可以是不确定的,避免了互协方差的计算.但其缺点是假设局部状态估值及其误差方差的保守估值已知,且原始CI融合器仅利用了保守局部估值误差方差信息,没有利用局部估值误差的保守互协方差信息,因此给出的实际融合估值误差方差的上界有较大的保守性.

经典的Kalman滤波器方法,要求系统的模型参数和噪声方差都是精确已知的,但由于模型误差、参数随机扰动和噪声统计信息不完全等原因,使系统带有不确定性,导致常规Kalman滤波器性能降低甚至引起滤波发散^[10].这推动了鲁棒Kalman滤波器的研究,所谓鲁棒Kalman滤波器是指^[11],对于所有容许的不确定性,滤波器的实际滤波误差方差被保证有最小上界.对噪声方差精确已知而参数不确定的系统,常用Riccati方程方法^[11]和线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)方法^[12]设计鲁棒Kalman滤波器.但这两种方法主要针对噪声方差精确已知,而参数不确定的系统.最近对带不确定噪声方差,但参数精确已知的不确定系统,设计极大极小鲁棒Kalman滤波器的Lyapunov方程方法被提出^[13-16].

对于传感网络系统,传统的估值算法中,被估计的状态信息一定包含在传感器观测信息中,但由于跟踪目标的高机动性、网络拥塞、意外的传感器故障和网络数据传输延迟等原因,会造成目标跟踪观测丢失.在这种情形下观测信号仅是以已知概率出现的传感器噪声信号,不含状态信息.1969年,由Nahi首次提出带丢失观测的估值问题^[17],并且用Bernoulli白噪声描写丢失观测序列,用Kalman滤波方法导出了线性最小方差估值器.近年来,这方面取得了一系列研究成果^[18-21],引起广泛关注.对带丢失观测和不确定参数或随机滞后的多传感器系统,分别用最小方差估计方法或LMI方法^[18],提出了集中式融合Kalman滤波器.对带相关丢失观测的多传感器系统,基于最小二乘估计方法,提出分布式和集中式融合Kalman滤波器^[19].对带丢失观测、随机滞后和丢包的多传感器系统,一种矩阵加权融合鲁棒Kalman滤波器被提出^[20].对带丢失观测和乘性噪声的多传感器系统,用加权最小二乘法和矩阵满秩分解,提出了加权观测融合Kalman滤波器^[21].上述文献对带丢失观测多传感器系统的研究限于假设系统噪声方差已知的情形.到目前为止,关

于带丢失观测和不确定噪声方差多传感器系统鲁棒融合Kalman滤波尚未见报道.

对于带丢失观测和不确定噪声方差的多传感器系统,本文引入虚拟噪声,将其转化为仅带不确定噪声方差系统.为了克服传统CI融合方法的缺点,应用极大极小鲁棒估值原理^[13-16],基于带噪声方差保守方差上界的最坏情形保守系统,设计了“最小方差”局部滤波器,即极大极小鲁棒局部滤波器,进而提出了一种带保守互协方差的改进鲁棒CI融合Kalman滤波器,给出了它的实际滤波融合误差方差的最小上界,克服了原始CI融合方法的缺点,推广了文献[14-16]的结果到带丢失观测和不确定噪声方差系统的改进CI融合算法.

2 问题的提出(Problem formulation)

考虑带丢失观测和不确定噪声方差的多传感器系统

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma w(t), \quad (1)$$

$$y_i(t) = \gamma_i(t) H_i x(t) + v_i(t), \quad i = 1, \dots, L, \quad (2)$$

其中: $t \geq 0$ 是离散时间,在时刻 t 的状态 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$ 是第 i 个子系统的观测,输入噪声 $w(t) \in \mathbb{R}^r$, $v_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$ 是第 i 个子系统的观测噪声. Φ , Γ 和 H_i 是已知适当维数常阵, L 为传感器的个数.

假设 1 $\gamma_i(t)$ 是取值1或者0的互不相关的Bernoulli白噪声,取值概率为

$$\begin{aligned} P[\gamma_i(t) = 1] &= \lambda_i, \\ P[\gamma_i(t) = 0] &= 1 - \lambda_i, \quad i = 1, \dots, L, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 λ_i 已知,且 $0 \leq \lambda_i \leq 1$. 由式(3)得知

$$\begin{aligned} E[\gamma_i(t)] &= \lambda_i, \quad E[\gamma_i(t) - \lambda_i] = 0, \\ E[(\gamma_i(t) - \lambda_i)^2] &= \lambda_i(1 - \lambda_i), \end{aligned} \quad (4)$$

其中记号 E 表示数学期望.

假设 2 $w(t)$ 和 $v_i(t)$ 是带零均值的互不相关白噪声,它们分别有未知不确定的实际噪声方差 \bar{Q} 和 \bar{R}_i ,

$$\begin{aligned} E \left[\begin{pmatrix} w(t) \\ v_i(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^T(k) & v_j^T(k) \end{pmatrix} \right] = \\ \begin{bmatrix} \bar{Q} & 0 \\ 0 & \bar{R}_i \delta_{ij} \end{bmatrix} \delta_{tk}, \quad \forall t, i, j, \end{aligned} \quad (5)$$

其中: 记号 T 表示转置, \forall 表示任意, δ_{tk} 是克罗内克函数, $\delta_{tt} = 1, \delta_{tk} = 0 (t \neq k)$, 且它们不相关 $\gamma_i(t)$.

假设 3 Q 和 R_i 各为不确定实际噪声方差 \bar{Q} 和 \bar{R}_i 的已知保守上界,满足如下关系:

$$\bar{Q} \leq Q, \quad \bar{R}_i \leq R_i. \quad (6)$$

假设 4 Φ 是稳定矩阵.

问题是设计状态 $x(t)$ 的鲁棒局部和改进CI融合稳态Kalman滤波器 $\hat{x}_i(t|t)$ 和 $\hat{x}_{CI}(t|t)$.

引理 1^[22] 考虑Lyapunov方程

$$P = FPF^T + U, \quad (7)$$

其中 U 是对称矩阵, 如果矩阵 F 是稳定的, 且 U 是正定(或半正定)矩阵, 则该Lyapunov方程存在唯一对称且正定(或半正定)解 P . 特别地, 若 $U = 0$, 则 $P = 0$.

在观测方程(2)中, 用 $\gamma_i(t)$ 的均值 λ_i 代替 $\gamma_i(t)$, 并引入一个虚拟噪声 $v_{ai}(t)$, 用它来补偿式(2)中的乘性噪声项, 则式(2)转化为带常观测阵的观测方程

$$y_i(t) = H_{ai}x(t) + v_{ai}(t), \quad i = 1, \dots, L, \quad (8)$$

其中 $H_{ai} = \lambda_i H_i$, 定义虚拟噪声 $v_{ai}(t)$ 为

$$v_{ai}(t) = [\gamma_i(t) - \lambda_i] H_i x(t) + v_i(t). \quad (9)$$

由假设1和假设2容易证明虚拟噪声 $v_{ai}(t)$ 是带零均值的互不相关白噪声. 定义实际系统状态稳态方差为 $\bar{X} = E[x(t)x^T(t)]$, 其中 $x(t)$ 为带实际噪声方差 \bar{Q} 的实际系统状态, 根据假设2和假设4, 由式(1)有 \bar{X} 满足实际Lyapunov方程

$$\bar{X} = \Phi \bar{X} \Phi^T + \Gamma \bar{Q} \Gamma^T. \quad (10)$$

由式(4), $v_{ai}(t)$ 的实际方差 $\bar{R}_{ai} = E[v_{ai}(t)v_{ai}^T(t)]$ 为

$$\bar{R}_{ai} = \lambda_i(1 - \lambda_i) H_i \bar{X} H_i^T + \bar{R}_i. \quad (11)$$

对带保守上界 Q 和 R_i 的最坏情形保守系统(1)和(8), 定义保守状态方差 $X = E[x(t)x^T(t)]$, 其中 $x(t)$ 为用保守上界 Q 由式(1)生成的保守系统状态, 则有 X 满足保守的Lyapunov方程

$$X = \Phi X \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T. \quad (12)$$

由式(4)和式(9), 有 $v_{ai}(t)$ 的保守方差

$$R_{ai} = \lambda_i(1 - \lambda_i) H_i X H_i^T + R_i. \quad (13)$$

3 局部鲁棒稳态Kalman滤波器(Local robust steady-state Kalman filter)

考虑带噪声方差保守上界 Q 和 R_{ai} 的最坏情形保守系统(1)和(8), 应用标准Kalman滤波算法^[22]得到保守的局部稳态线性最小方差Kalman滤波器

$$\hat{x}_i(t|t) = \Psi_{fi} \hat{x}_i(t-1|t-1) + K_{fi} y_i(t), \quad (14)$$

$$\Psi_{fi} = [I_n - K_{fi} H_{ai}] \Phi, \quad (15)$$

$$K_{fi} = \Sigma_i H_{ai}^T (H_{ai} \Sigma_i H_{ai}^T + R_{ai})^{-1}, \quad (16)$$

$$P_i = [I_n - K_{fi} H_{ai}] \Sigma_i, \quad (17)$$

其中: I_n 表示 $n \times n$ 单位阵, Ψ_{fi} 是稳定矩阵^[22], 保守稳态预报误差方差 Σ_i 满足Riccati方程

$$\Sigma_i = \Phi [\Sigma_i - \Sigma_i H_{ai}^T (H_{ai} \Sigma_i H_{ai}^T + R_{ai})^{-1} \times H_{ai} \Sigma_i] \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T. \quad (18)$$

易导出滤波误差系统为

$$\tilde{x}_i(t|t) = \Psi_{fi} \tilde{x}_i(t-1|t-1) +$$

$$[I_n - K_{fi} H_{ai}] \Gamma w(t-1) - K_{fi} v_{ai}(t). \quad (19)$$

记保守滤波误差 $\tilde{x}_i(t|t) = x(t) - \hat{x}_i(t|t)$, $x(t)$ 是保守系统状态, $\hat{x}_i(t|t)$ 是保守Kalman滤波器(14). 应用式(19)得到保守局部稳态滤波误差方差和互协方差满足Lyapunov方程

$$P_i = \Psi_{fi} P_i \Psi_{fi}^T + [I_n - K_{fi} H_{ai}] \Gamma Q \Gamma^T \times [I_n - K_{fi} H_{ai}]^T + K_{fi} R_{ai} K_{fi}^T, \quad (20)$$

$$P_{ij} = \Psi_{fi} P_{ij} \Psi_{fj}^T + [I_n - K_{fi} H_{ai}] \Gamma Q \Gamma^T \times [I_n - K_{fj} H_{aj}]^T, \quad i \neq j. \quad (21)$$

注 1 式(14)中, 保守观测 $y_i(t)$ 是由带保守上界 Q , R_i 的保守系统式(1)和式(2)生成, 是不可利用的, 而实际观测 $y_i(t)$ 由带实际方差 \bar{Q} 和 \bar{R}_i 实际系统式(1)和式(2)生成, 是已知的. 因此用已知的实际观测 $y_i(t)$ 替代保守观测 $y_i(t)$ 就得到实际局部Kalman滤波器(14).

类似地, 由式(19)得到实际局部滤波误差方差和互协方差满足Lyapunov方程

$$\bar{P}_i = \Psi_{fi} \bar{P}_i \Psi_{fi}^T + [I_n - K_{fi} H_{ai}] \Gamma \bar{Q} \Gamma^T \times [I_n - K_{fi} H_{ai}]^T + K_{fi} \bar{R}_{ai} K_{fi}^T, \quad (22)$$

$$\bar{P}_{ij} = \Psi_{fi} \bar{P}_{ij} \Psi_{fj}^T + [I_n - K_{fi} H_{ai}] \Gamma \bar{Q} \Gamma^T \times [I_n - K_{fj} H_{aj}]^T, \quad i \neq j. \quad (23)$$

定理 1 对带丢失观测和不确定噪声方差的多传感器系统(1)和(2), 在假设1-4下, 实际局部稳态Kalman滤波器(14)是鲁棒的, 即对所有容许的满足式(6)的不确定实际噪声方差 \bar{Q} 和 \bar{R}_i , 相应的由式(22)给出的实际滤波器方差 \bar{P}_i 有上界 P_i ,

$$\bar{P}_i \leq P_i, \quad i = 1, \dots, L, \quad (24)$$

且 P_i 是 \bar{P}_i 的最小上界.

证 记 $\Delta P_i = P_i - \bar{P}_i$, 由式(20)减式(22)得Lyapunov方程

$$\Delta P_i = \Psi_{fi} \Delta P_i \Psi_{fi}^T + [I_n - K_{fi} H_{ai}] \times \Gamma (Q - \bar{Q}) \Gamma^T [I_n - K_{fi} H_{ai}]^T + K_{fi} (R_{ai} - \bar{R}_{ai}) K_{fi}^T. \quad (25)$$

为了证明式(24)成立, 先要证明 $R_{ai} - \bar{R}_{ai} \geq 0$. 事实上, 令 $\Delta R_{ai} = R_{ai} - \bar{R}_{ai}$, 由式(13)减去式(11)有

$$\Delta R_{ai} = \lambda_i(1 - \lambda_i) H_i (X - \bar{X}) H_i^T + R_i - \bar{R}_i. \quad (26)$$

因为 $0 \leq \lambda_i \leq 1$, 且由式(6)有 $R_i - \bar{R}_i \geq 0$, 于是证明 $\Delta R_{ai} \geq 0$ 的问题归结为证明 $\Delta X = X - \bar{X} \geq 0$. 由式(12)减去式(10)得Lyapunov方程

$$\Delta X = \Phi \Delta X \Phi^T + \Gamma (Q - \bar{Q}) \Gamma^T. \quad (27)$$

由式(6)有 $Q - \bar{Q} \geq 0$ 引出 $\Gamma (Q - \bar{Q}) \Gamma^T \geq 0$, 根据引理1和 Φ 的稳定性有该Lyapunov方程有唯一半正定

解 $\Delta X \geq 0$, 即 $X - \bar{X} \geq 0$, 则由式(6)和式(26)得到 $R_{ai} \geq \bar{R}_{ai}$, 再由 Ψ_{fi} 的稳定性, 对式(25)应用引理1, 有 $\Delta P_i \geq 0$, 即式(24)成立. 这表明对满足式(6)的所有容许的噪声方差 \bar{Q} 和 \bar{R}_i , P_i 是 \bar{P}_i 的上界. 特别取满足式(6)的 $\bar{Q} = Q$, $\bar{R}_i = R_i$, 对式(25)应用引理1得 $\Delta P_i = 0$, 即 $\bar{P}_i = P_i$, 这表明 P_i 是 \bar{P}_i 的最小上界. 事实上, 如果假设存在另一上界 P_i^* , 使 $P_i^* < P_i$, 则取 $\bar{Q} = Q$, $\bar{R}_i = R_i$, 有 $\bar{P}_i \leq P_i^* < P_i$, 这与 $\bar{P}_i = P_i$ 矛盾. 证毕.

称实际局部Kalman滤波器式(14)为鲁棒局部Kalman滤波器.

4 改进的鲁棒CI融合稳态Kalman滤波器 (Modified robust CI fusion steady-state Kalman filter)

对最坏情形保守系统或实际系统, 根据CI融合算法^[1, 81], 保守的或实际的稳态CI融合Kalman滤波器为

$$\hat{x}_{CI}(t|t) = P_{CI}^* \sum_{i=1}^L \omega_i P_i^{-1} \hat{x}_i(t|t), \quad (28)$$

$$P_{CI}^* = \left[\sum_{i=1}^L \omega_i P_i^{-1} \right]^{-1}, \quad (29)$$

其中 $\hat{x}_i(t|t)$ 是局部保守或鲁棒Kalman滤波器, 最优加权系数 $\omega_i \geq 0$ 满足约束

$$\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_L = 1, \quad (30)$$

且极小化性能指标

$$\min \operatorname{tr} P_{CI}^* = \min_{\substack{\omega_i \in [0, 1] \\ \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_L = 1}} \operatorname{tr} \left\{ \left[\sum_{i=1}^L \omega_i P_i^{-1} \right]^{-1} \right\}, \quad (31)$$

其中记号 tr 表示矩阵的迹. 这是一个在 R^L 维欧氏空间中带约束非线性最优化问题, 可以用MATLAB工具箱中的“fmincon”求解最优加权系数 $\omega_1, \cdots, \omega_L$. 由式(29)有

$$x(t) = P_{CI}^* \sum_{i=1}^L \omega_i P_i^{-1} x(t). \quad (32)$$

用式(32)减去式(28)得到CI融合滤波误差

$$\tilde{x}_{CI}(t|t) = P_{CI}^* \sum_{i=1}^L \omega_i P_i^{-1} \tilde{x}_i(t|t). \quad (33)$$

由式(33)分别得到带互协方差 P_{ij} 和 \bar{P}_{ij} 的保守和实际CI融合的滤波误差方差为

$$P_{CI} = P_{CI}^* \left[\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \omega_i P_i^{-1} P_{ij} P_j^{-1} \omega_j \right] P_{CI}^*, \quad (34)$$

$$\bar{P}_{CI} = P_{CI}^* \left[\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \omega_i P_i^{-1} \bar{P}_{ij} P_j^{-1} \omega_j \right] P_{CI}^*. \quad (35)$$

用类似于文献[13]中定理2的配方证明方法容易证明原始CI融合器的实际融合误差方差 \bar{P}_{CI} 有用式(29)给出的保守上界 P_{CI}^* , 即

$$\bar{P}_{CI} \leq P_{CI}^*. \quad (36)$$

由式(29)知 P_{CI}^* 不包含保守互协方差信息, 因此上界 P_{CI}^* 具有较大的保守性, 即它不是最小上界. 下面由定理2提出改进的CI融合器, 利用了保守的互协方差信息给出了 \bar{P}_{CI} 的最小上界 P_{CI} .

定理2 对带丢失观测和不确定噪声方差的多传感器系统(1)和(2), 在假设1-4下, 则实际CI融合Kalman滤波器式(28)是鲁棒的, 即对所有容许的满足式(6)的不确定噪声方差 \bar{Q} 和 \bar{R}_i , 相应的CI融合实际误差方差 \bar{P}_{CI} 有由式(34)给出的最小上界 P_{CI} , 即

$$\bar{P}_{CI} \leq P_{CI}, \quad (37)$$

且

$$P_{CI} \leq P_{CI}^*, \quad (38)$$

且有矩阵迹精度关系

$$\operatorname{tr} \bar{P}_{CI} \leq \operatorname{tr} P_{CI} \leq \operatorname{tr} P_{CI}^* \leq \operatorname{tr} P_i, \quad i = 1, 2, \cdots, L. \quad (39)$$

称带最小上界 P_{CI} 的实际CI融合Kalman滤波器式(28)为改进的鲁棒CI融合Kalman滤波器.

证 定义

$$\Omega_i^{CI} = \omega_i P_{CI}^* P_i^{-1}, \quad i = 1, 2, \cdots, L, \quad (40)$$

$$\Omega_{CI} = [\Omega_1^{CI}, \cdots, \Omega_L^{CI}], \quad (41)$$

则CI融合器式(28)及误差方差式(33)有矩阵加权形式

$$\hat{x}_{CI}(t|t) = \sum_{i=1}^L \Omega_i^{CI} \hat{x}_i(t|t), \quad (42)$$

$$\tilde{x}_{CI}(t|t) = \sum_{i=1}^L \Omega_i^{CI} \tilde{x}_i(t|t). \quad (43)$$

对式(43)两边取方差运算, 则式(34)和式(35)可简写为

$$\begin{cases} P_{CI} = \Omega_{CI} P \Omega_{CI}^T, \\ \bar{P}_{CI} = \Omega_{CI} \bar{P} \Omega_{CI}^T, \end{cases} \quad (44)$$

其中定义总体保守和实际滤波误差方差阵 P 和 \bar{P} 各为

$$P = (P_{ij})_{nL \times nL}, \quad \bar{P} = (\bar{P}_{ij})_{nL \times nL}, \quad (45)$$

其中: P 的第 (i, j) 子块为 P_{ij} , \bar{P} 的第 (i, j) 子块为 \bar{P}_{ij} , P_{ij} 和 \bar{P}_{ij} 分别由式(20)–(23)计算, 且记 $P_i = P_{ii}$, $\bar{P}_i = \bar{P}_{ii}$. 易知 P 和 \bar{P} 分别满足总体Lyapunov方程

$$P = \Psi_f P \Psi_f^T + K_a Q_a K_a^T + K_f R_a K_f^T, \quad (46)$$

$$\bar{P} = \Psi_f \bar{P} \Psi_f^T + K_a \bar{Q}_a K_a^T + K_f \bar{R}_a K_f^T, \quad (47)$$

其中定义

$$\Psi_f = \operatorname{diag}\{\Psi_{f1}, \cdots, \Psi_{fL}\},$$

$$K_f = \operatorname{diag}\{K_{f1}, \cdots, K_{fL}\},$$

$$R_a = \operatorname{diag}\{R_{a1}, \cdots, R_{aL}\},$$

$$\bar{R}_a = \operatorname{diag}\{\bar{R}_{a1}, \cdots, \bar{R}_{aL}\},$$

$$K_a = \operatorname{diag}\{(I_n - K_{f1} H_{a1}) \Gamma, \cdots,$$

$$(I_n - K_{fL} H_{aL}) \Gamma\}, \quad (48)$$

$$Q_a = \begin{bmatrix} Q & \cdots & Q \\ \vdots & & \vdots \\ Q & \cdots & Q \end{bmatrix}, \bar{Q}_a = \begin{bmatrix} \bar{Q} & \cdots & \bar{Q} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{Q} & \cdots & \bar{Q} \end{bmatrix}. \quad (49)$$

由 Ψ_{f_i} 的稳定性易知 Ψ_f 是稳定的. 用式(46)减去式(47), 记 $\Delta P = P - \bar{P}$, 有Lyapunov方程

$$\Delta P = \Psi_f \Delta \Sigma \Psi_f^T + K_a (Q_a - \bar{Q}_a) K_a^T + K_f (R_a - \bar{R}_a) K_f^T. \quad (50)$$

在定理1的证明中, 已经证明了 $R_{ai} - \bar{R}_{ai} \geq 0$, 于是由式(48)中 R_a 的定义利用文献[13]的引理2得

$$R_a - \bar{R}_a \geq 0. \quad (51)$$

由式(6)和文献[13]的引理1得

$$Q_a - \bar{Q}_a \geq 0. \quad (52)$$

因此对式(50)应用引理1得出 $\Delta P \geq 0$, 且由式(44)有

$$P_{CI} - \bar{P}_{CI} = \Omega_{CI} \Delta P \Omega_{CI}^T. \quad (53)$$

由 $\Delta P \geq 0$ 引出式(37)成立, 即 P_{CI} 是 \bar{P}_{CI} 的一个上界. 用完全类似于定理1的证明方法, 容易证明 P_{CI} 是 \bar{P}_{CI} 的最小上界. 由式(36)有 P_{CI}^* 是 \bar{P}_{CI} 的一个上界, 故有式(38)成立. 在式(31)中特别取 $\omega_i = 1, \omega_j = 0 (j \neq i)$, 则有 $\text{tr} P_{CI}^* = \text{tr} P_i$. 因 $\text{tr} P_{CI}^*$ 在约束(30)下被极小化, 故有 $\text{tr} P_{CI}^* \leq \text{tr} P_i$, 即式(39)的第3个不等式成立. 对式(37)和式(38)取矩阵迹运算引出式(39)的前2个不等式成立. 证毕.

注 2 根据文献[13], 用估值误差方差阵的迹作为精度指标, 较小的迹意味着较高的精度. 分别定义 $\text{tr} \bar{P}_{CI}$ 和 $\text{tr} P_{CI}^*$ 为CI融合器的实际精度和保守的鲁棒精度, 定义 $\text{tr} P_{CI}$ 为CI融合器的改进的鲁棒精度. 对式(24)取矩阵迹运算, 有

$$\text{tr} \bar{P}_i \leq \text{tr} P_i, \quad i = 1, 2, \dots, L. \quad (54)$$

分别定义 $\text{tr} \bar{P}_i$ 和 $\text{tr} P_i$ 为局部滤波器的实际精度和鲁棒精度. 精度关系式(39)和式(54)意味着局部和CI融合滤波器的实际精度高于相应的鲁棒精度. 改进CI融合器的鲁棒精度 $\text{tr} P_{CI}$ 高于原始CI融合器的保守鲁棒精度 $\text{tr} P_{CI}^*$, 且高于每个局部滤波器的鲁棒精度.

注 3 本文与文献[23]相比, 除了应用虚拟噪声补偿原理, 极大极小鲁棒估计原理及CI融合原理上有相同之处外, 具体内容、方法和结果是本质不同的: 首先本文考虑的是带丢失观测和不确定噪声方差系统, 而文献[23]考虑的是带不确定模型参数和不确定噪声方差系统, 它们两类本质不同的不确定系统. 其次, 文献[23]采用原始CI融合算法, 它的缺点是所给出的实际融合误差方差上界具有较大保守性, 降低了鲁棒精度, 因为它没有利用保守的局部滤波误差互协方差信息. 而本文则提出改进的CI融合算法, 由于它利用了保守的局部滤波误差互协方差信息给出了实际融合误差方差最小上界, 从而提高了CI融合器的鲁棒精度. 改进的CI融合算法同原始CI融合算法是本质不同的. 再次, 文献[23]的CI融合器要求搜索不确定模型参数的鲁棒域, 以保证CI融合器的鲁

棒性. 文献[23]的仿真例子仅给出了一维(标量)不确定参数的鲁棒域搜索方法, 而在多维不确定参数情形下, 鲁棒域的搜索问题尚未解决.

5 仿真例子(Simulation examples)

考虑带丢失观测和不确定噪声方差的两传感器系统(1)-(2), 其中 $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$. 在仿真中取

$$\begin{aligned} Q &= 1.2, \quad \bar{Q} = 0.75Q, \\ R_1 &= 1.5, \quad \bar{R}_1 = 0.75R_1, \\ R_2 &= 0.5R_2, \quad \bar{R}_2 = \text{diag}\{16, 2.5\}, \\ \lambda_1 &= 0.65, \quad \lambda_2 = 0.85, \\ H_1 &= [1 \ 0], \quad H_2 = I_2, \\ \Phi &= \begin{bmatrix} 0.93 & 0.21 \\ -0.65 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.93 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (55)$$

其中 Φ 为稳定矩阵. 保守和实际的滤波误差方差如表1所示, 表1验证了精度关系式(39)和式(54), 即鲁棒Kalman滤波器的实际精度高于其鲁棒精度, 且改进的CI融合器的鲁棒精度高于每一个局部滤波器的鲁棒精度和原始CI融合器的保守鲁棒精度.

表 1 鲁棒精度和实际精度的比较

Table 1 The comparison of robust and actual accuracies

$\text{tr} \bar{P}_1$	$\text{tr} P_1$	$\text{tr} \bar{P}_2$	$\text{tr} P_2$	$\text{tr} \bar{P}_{CI}$	$\text{tr} P_{CI}$	$\text{tr} P_{CI}^*$
5.5288	7.3718	4.2667	6.3899	3.5780	5.2337	6.3415

为了给出方差矩阵精度比较的几何解释, 定义方差 $P_\theta, \theta = 1, 2$, CI的协方差椭圆是满足 $\{x : x^T P_\theta^{-1} x = c\}$ 的 R^n 中点 x 的轨迹, 不失一般性取常数 $c = 1$. 文献[8]中已证明, $P_1 \leq P_2$ 等价于 P_1 的椭圆被包含在 P_2 的椭圆内. 图1给出了基于协方差椭圆的方差矩阵精度比较, 可看到 \bar{P}_i 的椭圆被包含在 P_i 的椭圆内, \bar{P}_{CI} 的椭圆被包含在 P_{CI} 的椭圆内, 且 P_{CI} 的椭圆被包含在 P_{CI}^* 内, 这验证精度关系式(24)(37)-(38).

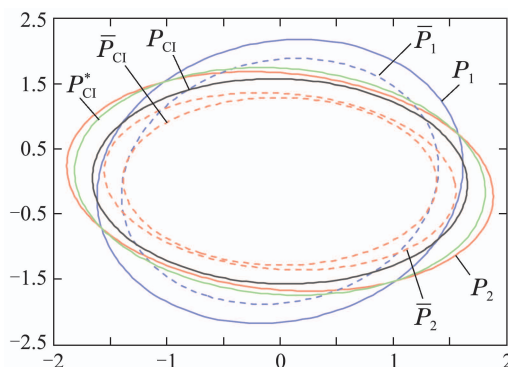


图 1 基于协方差椭圆的方差矩阵精度比较

Fig. 1 The comparison of variance matrix accuracies based on covariance ellipses

图2中, 任意取10组满足式(6)不同的实际误差方

差 $(\bar{Q}^{(k)}, \bar{R}_1^{(k)}, \bar{R}_2^{(k)})$, $\bar{Q}^{(k)} = 0.1kQ$, $\bar{R}_1^{(k)} = 0.1kR_1$, $\bar{R}_2^{(k)} = 0.1kR_2$, $k = 1, 2, \dots, 10$. 对应地得到10个实际CI融合误差方差 $\bar{P}_{CI}^{(k)}$ 的椭圆, 它们都被包含在 P_{CI} 和 P_{CI}^* 的椭圆里面. 特别地, 当 $k = 10$ 时, 有 $\bar{P}_{CI}^{(10)} = P_{CI}$, 即 P_{CI} 是 $\bar{P}_{CI}^{(k)}$ 的最小上界, 这意味着同 P_{CI}^* 的椭圆相比, P_{CI} 的椭圆是包括所有容许实际方差 $\bar{P}_{CI}^{(k)}$ 椭圆的最紧的椭圆, 这验证了精度关系式(37)和式(38).

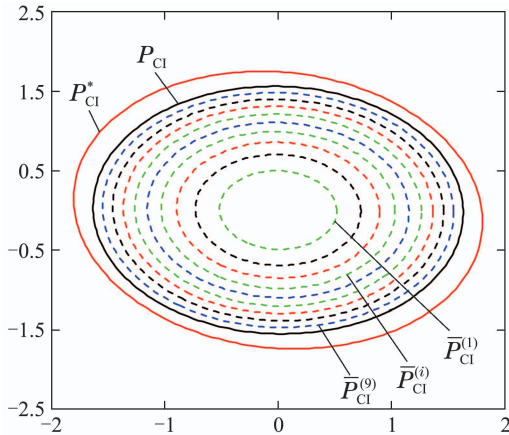


图2 基于协方差椭圆原始和改进的CI融合器方差矩阵精度比较

Fig. 2 The comparison of variance matrix accuracies of the original and modified CI fusers based on covariance ellipses

为了验证理论精度关系, 图3给出了进行1000次Monte-Carlo仿真实验得到的局部和改进的CI融合的均方误差(mean square error, MSE)曲线 $MSE_{\theta}(t)$, $\theta = 1, 2, CI$, 均方误差可看成是实际误差方差阵的采样方差阵的迹, 直线代表相应的实际误差方差阵的迹, 或最小上界方差阵的迹. 从图3中可看出MSE曲线接近相应的直线, 这验证了采样方差的一致性.

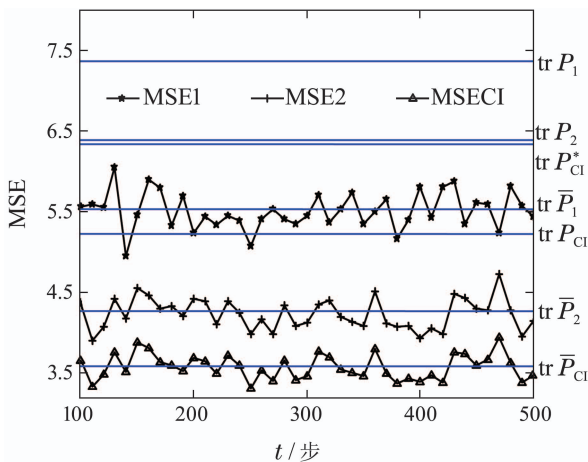


图3 局部和CI融合鲁棒Kalman滤波器的MSE曲线

Fig. 3 The MSE curves of the local and CI fused robust Kalman filters

6 结论(Conclusions)

对于带丢失观测和不确定噪声方差的多传感器系统, 本文主要贡献如下: 引入虚拟噪声, 将带丢失观测的系统转化为仅带不确定噪声方差的多传感器系统, 根据极大极小鲁棒估计原理, 用Lyapunov方程方法提出了局部鲁棒Kalman滤波器, 给出了局部滤波误差方差的最小上界, 并应用保守局部滤波误差互协方差信息提出了改进的CI融合鲁棒稳态Kalman滤波器及融合误差方差最小上界, 推广了仅带不确定噪声方差系统改进的CI融合Kalman滤波器^[16]到带丢失观测和不确定噪声方差系统. 证明了改进的CI融合器的鲁棒精度高于原始CI融合器的保守的鲁棒精度, 且高于局部Kalman滤波器的鲁棒精度, 克服了原始CI融合器要求假设已知局部滤波估值及误差方差保守估值的缺点和给出的实际融合滤波误差上界有较大保守性的缺点.

参考文献(References):

- [1] LIGGAINS M E, HALL D L, LLINAS J. *Handbook of Multisensor Data Fusion: Theory and Practice* [M]. Second Edition. New York: CRC Press, 2009: 319 – 342.
- [2] DENG Zili. *Information Fusion Estimation Theory with Applications* [M]. Beijing: Science Press, 2012: 1 – 25. (邓自立. 信息融合估计理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2012: 1 – 25.)
- [3] DENG Z L, ZHANG P, QI W J. The accuracy comparison of multisensor covariance intersection fuser and three weighting fusers [J]. *Information Fusion*, 2013, 14(2): 177 – 185.
- [4] JULIER S J, UHLMANN J K. A non-divergent estimation algorithm in the presence of unknown correlations [C] // *Proceedings of the IEEE American Control Conference*. New Mexico: IEEE, 1997: 2369 – 2373.
- [5] UHLMANN J K. Covariance consistency methods for fault-tolerant distributed data fusion [J]. *Information Fusion*, 2003, 4(3): 201 – 215.
- [6] JULIER S J, UHLMANN J K. Using covariance intersection for S-LAM [J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2007, 55(1): 3 – 20.
- [7] SIJS J, LAZAR M. State fusion with unknown correlation: Ellipsoidal intersection [J]. *Automatica*, 2012, 48(8): 1874 – 1878.
- [8] DENG Z L, ZHANG P, QI W J. Sequential covariance intersection fusion Kalman filter [J]. *Information Sciences*, 2012, 189(7): 293 – 309.
- [9] QI W J, ZHANG P, DENG Z L. Robust sequential covariance intersection fusion Kalman filtering over multi-agent sensor networks with measurement delays and uncertain noise variances [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(11): 2632 – 2642.
- [10] SRIYANANDA H. A simple method for the control of divergence in Kalman filter algorithms [J]. *International Journal of Control*, 1972, 16(6): 1101 – 1106.
- [11] LEWIS F L, XIE L H, POPA D. *Optimal and Robust Estimation* [M]. Second Edition. New York: CRC Press, 2007: 315 – 340.
- [12] XIE L H, SOH Y C, CARLOS E D S. Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(6): 1310 – 1314.
- [13] QI W J, ZHANG P, DENG Z L. Robust weighted fusion Kalman filters for multisensor time-varying systems with uncertain noise variances [J]. *Signal Processing*, 2014, 99(6): 185 – 200.

- [14] QI W J, ZHANG P, NIE G H, et al. Robust weighted fusion Kalman predictors with uncertain noise variances [J]. *Digital Signal Processing*, 2014, 30(1): 37 – 54.
- [15] QI W J, ZHANG P, DENG Z L. Robust weighted fusion time-varying Kalman smoothers for multisensor system with uncertain noise variances [J]. *Information Science*, 2014, 282(11): 15 – 37.
- [16] QI W J, ZHANG P, DENG Z L. Weighted fusion robust steady-state Kalman filters for multisensor system with uncertain noise variances [J]. *Journal of Applied Mathematics*, 2014, 2014(1): 1 – 11.
- [17] NAHI N E. Optimal recursive estimation with uncertain observation [J]. *IEEE Transaction on Information Theory*, 1969, 15(4): 457 – 462.
- [18] QU X M, ZHOU J. The optimal robust finite-horizon Kalman filtering for multiple sensors with different stochastic failure rates [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2013, 26(1): 80 – 86.
- [19] AGUILA R C, GARRIDO I G, PEREZ J L. Information fusion algorithms for state estimation in multi-sensor systems with correlated missing measurements [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 226(1): 548 – 563.
- [20] CHEN B, ZHANG W A, YU L. Distributed fusion estimation with missing measurements, random transmission delays and packet dropouts [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(7): 1961 – 1967.
- [21] WU Liming, MA Jing, SUN Shuli. Weighted measurement fusion estimation for stochastic uncertain systems with multiple sensors of different missing measurement rates [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(2): 244 – 249.
(吴黎明, 马静, 孙书利. 有不同观测丢失率多传感器随机不确定系统的加权观测融合估计 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(2): 244 – 249.)
- [22] KAILATH T, SAYED A H, HASSIBI B. *Linear Estimation* [M]. New York: Prentice Hall, 2000: 766 – 772.
- [23] WANF Xuemei, LIU Wenqiang, DENG Zili. Robust Covariance Intersection fusion steady-state Kalman filter for systems with missing measurements and uncertain noise variances [J]. *Journal of Elections & Information Technology*, 2015, 37(8): 1900 – 1905.
(王雪梅, 刘文强, 邓自立. 不确定系统鲁棒协方差交叉融合稳态Kalman滤波器[J]. *电子与信息学报*, 2015, 37(8): 1900 – 1905.)

作者简介:

王雪梅 (1978–), 女, 博士研究生, 副教授, 目前研究方向为多传感器信息融合、鲁棒Kalman滤波, E-mail: dengzili889@163.com;

刘文强 (1980–), 男, 博士研究生, 讲师, 目前研究方向为多传感器信息融合、鲁棒Kalman滤波, E-mail: dengzili890@163.com;

邓自立 (1938–), 男, 教授, 目前研究方向为状态估计、多传感器信息融合、鲁棒Kalman滤波, E-mail: dzl@hlj.edu.cn.