

参考轨迹更新的点到点迭代学习控制算法优化及应用

陶洪峰[†], 董晓齐, 杨慧中

(江南大学 教育部轻工过程先进控制重点实验室, 江苏 无锡 214122)

摘要: 针对受非重复扰动作用的离散线性系统的输出跟踪控制问题, 提出一种基于参考轨迹更新的点到点迭代学习控制算法. 首先通过构建性能指标函数对控制器进行范数优化, 并给出相应的收敛性条件, 使得系统输出能够跟踪上更新后参考轨迹处的期望点. 其次, 当系统输出端受到某批次非重复扰动的影响时, 进一步通过引入拉格朗日乘子算法构造多目标性能指标函数, 以优化鲁棒迭代学习控制器, 达到提高收敛速度和跟踪精度的目的. 最后将该算法应用于电机驱动的单机械臂控制系统中, 仿真结果验证了算法的合理性和有效性.

关键词: 参考轨迹更新; 迭代学习控制; 性能指标; 拉格朗日乘子; 点到点

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Optimal algorithm and application for point to point iterative learning control via updating reference trajectory

TAO Hong-feng[†], DONG Xiao-qi, YANG Hui-zhong

(Key laboratory of Advanced Process Control for Light Industry (Ministry of Education),
Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China)

Abstract: For the output tracking control problem of discrete linear system with non-repetitive disturbance, a point to point iterative learning control algorithm based on updating reference trajectory is proposed. Firstly, the iterative learning controller is optimized by constructing performance index with norm function, and the corresponding convergence conditions are given, then the system output can track with the desired points in updating reference trajectory. Furthermore, when the system output is affected by non-repetitive disturbance in some trials, a new multi-objective performance index function is constructed by Lagrange multiplier algorithm, and the robust iterative learning controller is optimized to improve the convergence speed and tracking accuracy. Finally, the simulation results of the motor driven single mechanical arm control system show the effectiveness and feasibility of the proposed algorithm.

Key words: updating reference trajectory; iterative learning control; performance index; Lagrange multiplier; point to point

1 引言(Introduction)

迭代学习控制(iterative learning control)利用系统先前执行重复任务中产生的数据信息不断修正控制输入信号, 最终在有限区间上实现对期望轨迹的快速、高精度和高性能的完全跟踪^[1-3].

但是随着工业自动化的发展, 在许多自动化生产过程中, 生产线上的目标物体总是处于不断运动的状态, 机器人的机械臂在不断执行抓取和放置任务时, 作者期望的跟踪误差仅与这些任务中机械臂取件的特定位置点有关. 还比如在某些较为复杂的工艺生产过程中, 由于部分设备的封闭性等原因, 导致系统无法检测全部数据, 只能在某些特定相关数据点上进行

有效检测, 因此, 针对这些特定数据点进行高精度的点到点跟踪控制研究具有重要的工程意义. 文献[4]提出一种基于初态的迭代学习算法, 该算法利用初始位置和速度作为操作变量, 终点位置和速度作为受控变量, 实现对运动控制系统快速高精度末态跟踪控制. 文献[5]提出一类基于特殊数据点的点到点迭代学习控制算法, 通过鲁棒稳定性和收敛性分析, 并通过多变量电机实验平台装置验证了算法的有效性. 为进一步加快控制算法的收敛速度, 文献[6]提出了一种基于批次输入信号和参考轨迹更新的迭代学习控制, 利用时域插值算法不断更新参考轨迹, 从而使得系统输出更快地逼近期望点. 文献[7]则进一步结合P型闭环迭

收稿日期: 2015-12-08; 录用日期: 2016-05-26.

[†]通信作者. E-mail: taohongfeng@hotmail.com; Tel.: +86 13621514714.

本文责任编辑: 王鞞维.

国家自然科学基金项目(61273070, 61203092)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61273070, 61203092).

代学习控制策略讨论了系统输出点跟踪控制算法的收敛性和鲁棒性. 然而, 上述点到点控制方法在迭代学习算法中并没有考虑算法的优化问题, 进而提升算法的收敛速度和控制精度.

目前, 点到点跟踪控制算法的优化问题主要分为单个终端点优化和多个点的优化问题. 文献[8]针对多输入多输出系统提出一种基于终端点控制的学习控制算法, 分别讨论了系统输出经过单个终端期望点和多个期望点的渐近收敛特性, 最后通过性能指标分析给出理想状态情况下的优化控制器设计方法. 文献[9]针对离散非线性系统提出一种最优终端迭代学习控制方法, 控制器的输入信号通过终点的误差信息进行更新, 但该算法仅局限于单个终端点状态的信息获取, 无法实现多个跟踪点的控制优化. 因此, 针对多个跟踪点的迭代学习控制问题, 文献[10]在频域中讨论了对点到点迭代学习控制算法的分析与应用. 但这种算法在实际应用中需要结合确定性系统参数, 不利于控制算法的鲁棒性设计, 存在一定的局限性. 文献[11]讨论了输入约束的点到点迭代学习控制, 采用最速度下降法和牛顿法两种策略分别对系统进行优化, 但未考虑外界不确定干扰因素的影响. 文献[12-13]分别对存在随机量的多点目标实现跟踪控制, 但并未对扰动作用下系统的多点跟踪控制进行整体鲁棒性分析和优化.

因此, 本文结合基于时域插值的目标轨迹更新算法和开环迭代学习控制律, 讨论了系统输出受非重复扰动作用情况下的鲁棒迭代学习控制问题, 通过构建性能指标函数对无扰动情形的控制量进行范数优化. 另外当系统输出端受非重复批次扰动影响时, 利用拉格朗日乘子算法建立新型多目标优化指标函数, 通过收敛性分析给出控制器的优化算法, 以改善系统的收敛速度和跟踪精度. 最后将该算法应用于电动机驱动单机械臂控制系统中, 验证算法的有效性.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑如下类多输入多输出离散线性时不变系统:

$$\begin{cases} x_k(t+1) = Ax_k(t) + Bu_k(t), \\ y_k(t) = Cx_k(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x_k(t) \in \mathbb{R}^m$, $u_k(t) \in \mathbb{R}^r$, $y_k(t) \in \mathbb{R}^n$ 分别为系统第 k 批次迭代的状态量、输入量及输出量, $x_k(0)$ 表示系统第 k 批次运行时的初始状态值, $t \in [0, T]$ 表示一个周期时间 T 内的采样点; A, B, C 分别为相应维数的实矩阵, 且 $CB \neq 0$.

针对式(1)形式的线性系统, 可将多输入多输出状态空间表达式转换为时间序列的输入输出矩阵模型:

$$y_k = Gu_k + d_k, \quad (2)$$

其中:

$$G = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \cdots & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{T-1}B & CA^{T-2}B & CA^{T-3}B & \cdots & CB \end{bmatrix},$$

$$d_k = [CA \ CA^2 \ CA^3 \ \cdots \ CA^T]^T x_k(0),$$

而 u_k 与 y_k 的输入与输出时间序列分别为

$$u_k = [u_k(0) \ u_k(1) \ \cdots \ u_k(T-1)]^T,$$

$$y_k = [y_k(1) \ y_k(2) \ \cdots \ y_k(T)]^T.$$

不失一般性, 若系统(1)的输出在第 $k+1$ 批次开始受到非重复扰动 ω_{k+1} 作用时, 系统可进一步描述为

$$y_{k+1} = Gu_{k+1} + d_{k+1} + \omega_{k+1}, \quad (3)$$

其中, 有界扰动量满足条件 $\sup_{t \in [0, T]} \|\omega_{k+1}\| \leq \xi$, 且系统各批次的迭代初值满足有界性条件:

$$b_{x_0} = \sup_{t \in [0, T]} \|d_{k+1} - d_k\|.$$

对于传统迭代学习控制算法, 参考轨迹通常是固定的, 轨迹跟踪要求系统输出在各个时刻随着迭代次数的进行不断靠近给定期望值, 即 $y_k(t) \rightarrow y_d(t)$, 其中 $t \in \{0, 1, \dots, T\}$. 但是, 点到点跟踪控制只要求在所有采样点中根据实际工程需要选取其中一些特定的数据点, 最终实现对这些特殊数据点的完全跟踪, 即满足跟踪条件: $r_k(t_i) = y_d(t_i)$, $i = 1, \dots, M$, 且 $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_M \leq T$. 因此, 不妨定义

$$r_{k+1}(t) = r_0(t) + h(t)f(t), \quad (4)$$

其中: $h(t) = (t-t_1)(t-t_2)\cdots(t-t_M)$, $f(t)$ 为任意离散函数, $r_0(t)$ 为系统需要跟踪的期望点.

观察式(4)可以发现, 这些需要跟踪的特殊数据点与期望参考点存在如下关系, 即

$$r_k(t_i) = r_0(t_i) = y_d(t_i).$$

为后续表达式的构造, 记

$$r_{k+1} = [r_{k+1}(0) \ r_{k+1}(1) \ \cdots \ r_{k+1}(T)]^T,$$

$$H = \text{diag}\{h(0) \ h(1) \ \cdots \ h(T)\},$$

$$f_k = [f(0) \ f(1) \ \cdots \ f(T)]^T.$$

将式(4)改写成为超级矢量的形式:

$$r_{k+1} = r_0 + Hf_k. \quad (5)$$

由于在需要跟踪的特殊数据点处要求与期望轨迹在该点处的值保持一致, 即 $r_k(t_i) = r_0(t_i) = y_d(t_i)$, 则不妨将式(5)进一步改写表示为任意采样点处的参考轨迹:

$$r_{k+1} = r_k + Hf_k. \quad (6)$$

不妨设计式(6)中 $f_k = F(r_k - y_k)$, 其中 F 为实对角

矩阵, 则式(6)可进一步表示为

$$r_{k+1} = r_k + HF(r_k - y_k). \quad (7)$$

由于式(7)中 H 和 F 均为实对角矩阵, 令 $\lambda_k = HF$, 则 λ_k 也为实对角矩阵, 因此, 式(7)可进一步表示为

$$r_{k+1} = r_k + \lambda_k(r_k - y_k). \quad (8)$$

接下来, 由式(8)可得

$$\begin{aligned} \|r_{k+1} - y_k\| &= \|(I + \lambda_k)(r_k - y_k)\| \leq \\ &\|I + \lambda_k\| \|(r_k - y_k)\|. \end{aligned}$$

若满足 $\|I + \lambda_k\| = 1$, 则很容易得到

$$\|r_{k+1} - y_k\| \leq \|(r_k - y_k)\|.$$

从而验证了本节给出 f_k 形式的正确性. 同时也可以看出, 随着迭代批次过程的进行, 更新参考轨迹与实际输出的逼近误差可以比固定参考轨迹的方式更加逼近, 即系统实际输出逼近更新参考轨迹点的速度比逼近固定参考轨迹更快.

3 点到点鲁棒迭代学习控制(Point to point robust iterative learning control)

考虑如下轨迹更新的点到点迭代学习控制算法:

$$\begin{cases} u_{k+1} = u_k + L(r_{k+1} - y_k), \\ r_{k+1} = r_k + \lambda_k(r_k - y_k), \end{cases} \quad (9)$$

其中: λ_k 为实对角阵, r_k 为第 $k - 1$ 次更新后的参考轨迹, L 为控制律的开环增益.

定理 1 针对输出受有界非重复扰动影响的系统(1), 基于参考轨迹更新迭代学习控制律(9), 若控制系统的谱半径满足条件: $\rho(I - GL) < 1$, 则当 $k \rightarrow \infty$ 时, 系统的跟踪输出误差满足收敛性条件: $0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|e_{k+1}\| \leq \frac{1}{1 - \rho}(\xi + b_{x_0})$. 特别地, 当 $\xi = 0, b_{x_0} = 0$ 时, 系统输出误差 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_{k+1}\| = 0$.

证 在第 $k + 1$ 批次, 系统(1)的输出误差表示为

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= r_{k+1} - y_{k+1} = \\ &r_k + \lambda_k(r_k - y_k) - Gu_k - d_k - \\ &GL(r_k + \lambda_k(r_k - y_k) - y_k) + d_k - \\ &d_{k+1} - \omega_{k+1} = \\ &(I - GL)(I + \lambda_k)(r_k - y_k) + \\ &d_k - d_{k+1} - \omega_{k+1}. \end{aligned} \quad (10)$$

对式(10)两端取范数并令 $\|(I - GL)\| = \rho$, 由于在参考轨迹跟踪点处满足 $\|I + \lambda_k\| = 1$, 式(10)可表示为

$$\|e_{k+1}\| \leq \rho \|e_k\| + \xi + b_{x_0}, \quad (11)$$

则系统经 k 次迭代后误差可改写为

$$\|e_{k+1}\| = \rho^{k+1} \|e_0\| + \frac{1 - \rho^{k+1}}{1 - \rho}(\xi + b_{x_0}). \quad (12)$$

若 $\rho < 1$, 则

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|e_{k+1}\| \leq \frac{1}{1 - \rho}(\xi + b_{x_0}).$$

特别地, 当 $\xi = 0, b_{x_0} = 0$ 时, 经 k 次迭代后系统的输出误差为零. 实际上, 在理想状态下, 若各批次运行时的初值严格一致, 则由式(11)进一步可得

$$\|e_{k+1}\| \leq \rho \|e_k\|.$$

由于系统的收敛条件满足条件 $0 < \rho < 1$, 则可得 $\|e_{k+1}\| \leq \|e_k\|$ 的结论, 即系统的输出误差具有严格单调收敛的特性.

第3部分对于系统输出受到一定有界非重复扰动情形的分析, 仅给出了基于轨迹更新迭代学习控制算法的鲁棒性分析, 接下来的第4, 5部分将分别针对系统输出的无扰动情形和受扰情形, 讨论优化理论框架下的范数性能指标优化控制算法问题.

4 无扰动情形迭代学习范数性能指标优化(Norm performance index optimal iterative learning without disturbance)

在实际工程应用中, 系统输入量 u_{k+1} 通常反映的是控制过程中消耗的能量, 较小的控制能量及其控制振荡对控制器及其最终执行器的损耗至关重要, 因此在优化过程中需要在考虑误差的基础上同时考虑控制量的优化条件. 下面首先针对系统输出在无扰动量作用条件下的运行过程, 考虑如下性能指标函数:

$$\min J_{k+1} = \|e_{k+1}\|_Q^2 + \|u_{k+1} - u_k\|_R^2 + \|u_{k+1}\|_S^2, \quad (13)$$

其中 Q, R 和 S 为相应的对称正定权阵.

由于 $e_{k+1} = r_{k+1} - Gu_{k+1} - d_{k+1}$, 将 e_{k+1} 进一步展开后可得

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= \prod_{i=0}^k (I + \lambda_i)r_0 - \prod_{i=1}^k (I + \lambda_i)\lambda_0 Gu_0 - \\ &\prod_{i=2}^k (I + \lambda_i)\lambda_1 Gu_1 - \dots - \\ &(I + \lambda_k)\lambda_{k-1} Gu_{k-1} - \lambda_k Gu_k - Gu_{k+1} - \\ &\lambda_k d_k - d_{k+1} - \prod_{i=2}^k (I + \lambda_i)\lambda_1 d_1 - \\ &\dots - (I + \lambda_k)\lambda_{k-1} d_{k-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

将式(14)代入性能指标(13), 并对 u_{k+1} 微分后得到

$$\begin{aligned} -G^T Q(r_{k+1} - Gu_{k+1} - d_{k+1}) + \\ R(u_{k+1} - u_k) + Su_{k+1} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

整理可得

$$\begin{aligned} (G^T QG + R + S)u_{k+1} = \\ Ru_k + G^T Qr_{k+1} - G^T Qd_{k+1}. \end{aligned} \quad (16)$$

实际上, 由于在跟踪点处满足条件 $\|I + \lambda_k\| = 1$, 即

λ_k 矩阵所对应的期望参考点阵中的元素均为0, 即 $r_k(t_i) = r_0(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, M$. 将式(16)进一步化简为如下形式:

$$(G^T QG + R + S)u_{k+1} = Ru_k + G^T Qr_0 - G^T Qd_{k+1}. \quad (17)$$

若式(17)中的对称正定矩阵 R 和 S 分别取 rI 和 sI , 显然当 $(r+s)I > 0$, $G^T QG > 0$ 时, 式(17)可变换为

$$u_{k+1} = (G^T QG + R + S)^{-1} Ru_k + (G^T QG + R + S)^{-1} G^T Qr_0 - (G^T QG + R + S)^{-1} G^T Qd_{k+1}. \quad (18)$$

同时, 式(17)可表示为

$$(G^T QG + R + S)u_{k+1} = (R + G^T QG)u_k + G^T Q(r_0 - y_k) - G^T Q(d_{k+1} - d_k), \quad (19)$$

即

$$u_{k+1} = (G^T QG + R + S)^{-1} (R + G^T QG)u_k - (G^T QG + R + S)^{-1} G^T Q(d_{k+1} - d_k) + (G^T QG + R + S)^{-1} G^T Qe_k. \quad (20)$$

令 $Z_u = (G^T QG + R + S)^{-1} (R + G^T QG)$, $Z_e = (G^T QG + R + S)^{-1} G^T Q$, 则式(20)的优化控制量可进一步表示为

$$u_{k+1} = Z_u u_k + Z_e e_k - Z_e (d_{k+1} - d_k). \quad (21)$$

定理 2 在优化迭代学习控制律(21)的作用下, 若控制系统(1)满足以下条件:

- 1) 谱半径: $\rho((G^T QG + R + S)^{-1} R) < 1$;
- 2) 权矩阵 S 取零矩阵;
- 3) 各批次迭代初值 $x_k(0)$ 严格一致, 则当迭代批次 $k \rightarrow \infty$ 时, 系统的跟踪输出误差满足严格单调收敛特性.

证 记系统(1)的期望输入为 u_d , 则由式(21)得

$$u_d - u_{k+1} = u_d - Z_u u_k - Z_e e_k + Z_e (d_{k+1} - d_k). \quad (22)$$

对式(22)两边同时左乘传输算子 G , 并取范数后可得

$$\|e_{k+1}\| \leq \|Z_u - Z_e G\| \|e_k\| + U,$$

其中 $U = \|G - Z_u G\| \|u_d\| + \|Z_e\| \|d_{k+1} - d_k\| + \|Z_u d_k - d_{k+1}\|$. 因此, 当谱半径满足条件

$$\rho(Z_u - Z_e G) = \rho((G^T QG + R + S)^{-1} R) < 1, \quad (23)$$

则系统输出跟踪误差收敛.

在实际的控制过程中, 不妨设定权矩阵 S 为零阵, 且系统各批次迭代初始状态 $x_k(0)$ 严格一致时: Z_u 为单位矩阵, 并且 $\|G - Z_u G\| = 0$, $\|d_{k+1} - d_k\| = 0$,

$\|Z_u d_k - d_{k+1}\| = 0$, 此时

$$\|e_{k+1}\| \leq \rho \|e_k\| \leq \|e_k\|, \quad (24)$$

系统输出误差 e_{k+1} 随迭代次数严格单调收敛.

通过对比发现定理2中的收敛条件与Amann^[14-15], Owens^[16-17]等优化学习律的收敛性结果类似, 但结果的形式不同, 因为这里采用的是根据控制算法式(9)构造的范数优化性能指标, 由于定义的指标形式与文献[15]不同, 那么优化后的控制器结果也不同. 在优化的过程中, 控制器的形式发生根本性变化, 不像参数优化方法只改变控制的增益参数^[16]. 本文所设计的鲁棒控制器经第3部分的收敛性分析后仅能保证系统输出误差收敛到一定范围, 因此在第4部分讨论系统输出在无扰动量情况下控制算法的优化问题基础上, 接下来将进一步对优化控制器的某些性能参数进行分析, 以保证系统(1)输出在非重复有界扰动作用下能够实现精确跟踪.

5 非重复扰动情形迭代学习范数指标优化 (Norm index optimal iterative learning with non-repetitive disturbance)

类似于定理1中分析, 将系统的第 $k+1$ 批次误差表示为

$$e_{k+1} = r_0 - Gu_{k+1} - d_{k+1} - \omega_{k+1}. \quad (25)$$

定义系统的性能指标函数为

$$\min J_{k+1} = \|r_0 - Gu_{k+1} - d_{k+1} - \omega_{k+1}\|_Q^2 + \|u_{k+1} - u_k\|_R^2 + \|u_{k+1}\|_S^2. \quad (26)$$

为获得优化控制器, 等价于求取

$$\min_{u_{k+1}} \max_{\omega_{k+1}} J(u_{k+1}, \omega_{k+1}) = \|r_0 - Gu_{k+1} - d_{k+1} - \omega_{k+1}\|_Q^2 + \|u_{k+1} - u_k\|_R^2 + \|u_{k+1}\|_S^2. \quad (27)$$

由于 $\|\omega_{k+1}\|$ 有界, 必须考虑扰动量对性能指标函数的取值影响, 对于性能函数(27)中存在 ω_{k+1} 使得 $\|r_0 - Gu_{k+1} - d_{k+1} - \omega_{k+1}\|_Q^2$ 的值最大化. 首先讨论如下最大化问题:

$$\max_{\omega_{k+1}} \|r_0 - Gu_{k+1} - d_{k+1} - \omega_{k+1}\|_Q^2.$$

由于不等式约束条件 $\|\omega_{k+1}\| \leq \xi$ 的存在, 本文引入拉格朗日乘子 γ , 构造新的性能指标函数 $\max J_1(\omega_{k+1}, \gamma)$, 即

$$J_1(\omega_{k+1}, \gamma) = \|r_0 - Gu_{k+1} - d_{k+1} - \omega_{k+1}\|_Q^2 - \gamma(\|\omega_{k+1}\|^2 - \xi^2). \quad (28)$$

对于不等式的约束条件, 要求拉格朗日乘子 $\gamma \geq 0$, 由库恩-塔克条件可知, 分别对式(28)中 ω_{k+1} 和 γ 微分可

得

$$Q(r_0 - Gu_{k+1} - d_{k+1}) = (Q - \gamma I)\omega_{k+1}, \quad (29)$$

$$\xi^2 = \|\omega_{k+1}\|^2. \quad (30)$$

显然要求 $Q - \gamma I \geq 0$, 保证性能函数(26)为凸优化要求. 对式(29)进行整理后可得

$$\omega_{k+1} = (Q - \gamma I)^+ Q(r_0 - Gu_{k+1} - d_{k+1}), \quad (31)$$

其中 $(Q - \gamma I)^+$ 表示 $Q - \gamma I$ 矩阵的伪逆. 将式(31)代入式(30)后得到

$$\begin{aligned} \xi^2 &= (r_0 - Gu_{k+1} - d_{k+1})^T Q(Q - \gamma I)^+ \times \\ &\quad (Q - \gamma I)^+ Q(r_0 - Gu_{k+1} - d_{k+1}). \end{aligned} \quad (32)$$

从式(31)–(32)中可以看出, ω_{k+1} , γ 的取值均取决于 u_{k+1} , 对于此类混合参数问题求最值问题一般比较复杂, 必须将此类问题进行转化, 为此引入函数 $\Theta(\gamma)$:

$$\begin{aligned} \Theta(\gamma) &= (r_0 - Gu_{k+1} - d_{k+1})^T Q(I + \\ &\quad (Q - \gamma I)^+ Q) \times \\ &\quad (r_0 - Gu_{k+1} - d_{k+1}) - \gamma \xi^2. \end{aligned} \quad (33)$$

对式(33)中 γ 微分后可以得到式(32). 因此对式(28)求最大化等价于求式(33)的最小化问题:

$$\begin{aligned} \min_{0 \leq \gamma \leq \|Q\|} \Theta(\gamma) &= \\ \min_{0 \leq \gamma \leq \|Q\|} (r_0 - Gu_{k+1} - d_{k+1})^T Q(I + \\ &\quad (Q - \gamma I)^+ Q)(r_0 - Gu_{k+1} - d_{k+1}) + \gamma \xi^2. \end{aligned} \quad (34)$$

因此, 进一步将上述最小化–最大化问题转化为最小化–最小化问题, 即

$$\max J_1(\omega_{k+1}, \gamma) = \min_{0 \leq \gamma \leq \|Q\|} \Theta(\gamma). \quad (35)$$

对式(27)表示的问题也可以进一步等价于

$$\begin{aligned} \min_{0 \leq \gamma \leq \|Q\|} \min_{u_{k+1}} J(u_{k+1}, \omega_{k+1}) &= \\ \Theta(\gamma) + \|u_{k+1}\|_S^2 + \|u_{k+1} - u_k\|_R^2. \end{aligned} \quad (36)$$

接下来, 对式(36)中的 u_{k+1} 进行微分并整理后得到

$$\begin{aligned} (G^T \Sigma G + R + S)u_{k+1} &= \\ Ru_k + G^T \Sigma r_0 - G^T \Sigma d_{k+1}. \end{aligned} \quad (37)$$

其中 $\Sigma = Q[I + (Q - \gamma I)^+ Q]$, 对式(37)移项整理得

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= (G^T \Sigma G + R + S)^{-1} Ru_k + \\ &\quad (G^T \Sigma G + R + S)^{-1} G^T \Sigma r_0 - \\ &\quad (G^T \Sigma G + R + S)^{-1} G^T \Sigma d_{k+1}. \end{aligned} \quad (38)$$

若系统谱半径满足

$$\rho((G^T \Sigma G + R + S)^{-1} R) < 1. \quad (39)$$

则输出跟踪误差系统满足收敛性要求. 同理, 对式

(33)中的拉格朗日乘子 γ 微分后可得

$$\begin{aligned} \xi^2 &= (r_0 - Gu_{k+1} - d_{k+1})^T Q(Q - \gamma I)^+ \times \\ &\quad (Q - \gamma I)^+ Q(r_0 - Gu_{k+1} - d_{k+1}). \end{aligned} \quad (40)$$

因此, 通过式(38)和式(40)很容易找到式(36)最小化–最小化问题的解, 则当 $k \rightarrow \infty$ 时, 系统优化控制量可表示为

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= (G^T \Sigma G + S)^{-1} G^T \Sigma r_0 - \\ &\quad (G^T \Sigma G + S)^{-1} G^T \Sigma d_{k+1}. \end{aligned} \quad (41)$$

系统输出跟踪误差表示为

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= r_0 - G(G^T \Sigma G + S)^{-1} G^T \Sigma r_0 + \\ &\quad G(G^T \Sigma G + S)^{-1} G^T \Sigma d_{k+1} - \\ &\quad d_k + \omega_{k+1}. \end{aligned} \quad (42)$$

类同于第4部分的分析, 在实际控制过程中, 设定权矩阵 S 为零阵, 且系统迭代各批次初态严格一致时, 理论上系统输出误差最终将收敛到有界范围内.

6 仿真研究(Simulation study)

为验证本文中基于轨迹更新的点到点迭代学习控制及相关优化算法, 考虑如下电机驱动单机械臂控制系统^[18], 其动态模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{N}{\Psi_t} x_1 - \frac{B_c}{\Psi_t} x_2 + \frac{K_t}{\Psi_t} x_3, \\ \dot{x}_3 = -\frac{K_b}{\Gamma} x_2 - \frac{R_r}{\Gamma} x_3 + \frac{1}{\Gamma} u, \\ y = x_1, \end{cases} \quad (43)$$

其中: $N = m_2 gl + m_1 gl$, $\Psi_t = \Xi + (1/3)m_2 l^2 + (1/10)m_1 l^2 D_c$, $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = i$, g 为重力加速度, θ 为连杆角度, i 为电流, K_t 为扭矩, K_b 为反电动势系数, B_c 为轴承粘滞摩擦系数, D_c 为负载系数, l 为连杆长度, m_1 为负载质量, m_2 为连杆质量, R_r 为电阻, u 为电机控制电压, Ξ 为执行器转动惯量, Γ 为电抗. 电机控制系统的实际变量参数分别设定为

$$\begin{aligned} K_t &= 1 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad K_b = 0.085 \text{ V} \cdot \text{s/rad}, \\ R_r &= 0.075 \text{ } \Omega, \quad B_c = 0.015 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}, \quad D_c = 0.05, \\ l &= 0.6 \text{ m}, \quad m_1 = 0.05 \text{ kg}, \quad m_2 = 0.01 \text{ kg}, \\ \Xi &= 0.05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad \Gamma = 0.0008 \text{ } \Omega, \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

系统仿真时间设定为 $t = 2 \text{ s}$, 采样时间设定为 $t_s = 0.1 \text{ s}$, 则系统的离散状态空间表达式的矩阵参数可表示为

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1.021 & 0.043 & 0.009 \\ 0.298 & 0.076 & 0.023 \\ -0.329 & -0.127 & -0.038 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.666 \\ 10.961 \\ 1.421 \end{bmatrix}, \\ C &= [1 \ 0 \ 0], \quad D = 0. \end{aligned}$$

由仿真时间和采样时间可知系统运行的采样间隔为 $T \in \{0, 1, 2, \dots, 20\}$, 不失一般性, 在系统运动过程中选取其中 $M = 7$ 个点作为期望点进行跟踪, 即 $t_i \in \{0, 2, 6, 10, 14, 18, 20\}$. 同时设定系统初态为 $x_k(0) = k^{-1}[0 \ 0.1 \ 0.01]^T$. 对于对角阵 λ_k 的对角元素选取相应随机数, 但对于在跟踪的特殊期望数据点处要求其对角元素为0. 对于权矩阵 Q, R, S 分别选取 $Q = I, R = 0.005I, S = 0$.

当系统不存在非重复扰动情况下, 同时考虑传统常规P型迭代控制器: $u_{k+1} = u_k + k_p e_k$, 优化前的控制器为文中式(9), 优化后的控制器采用文中式(21), 则系统输出的点到点跟踪效果随迭代次数关系、输出误差及性能指标函数分别如图1-3所示.

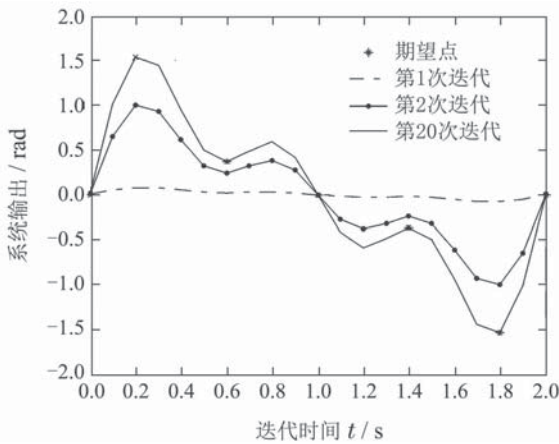


图1 系统实际输出与参考点跟踪曲线

Fig. 1 The curves of system actual output and reference point tracking

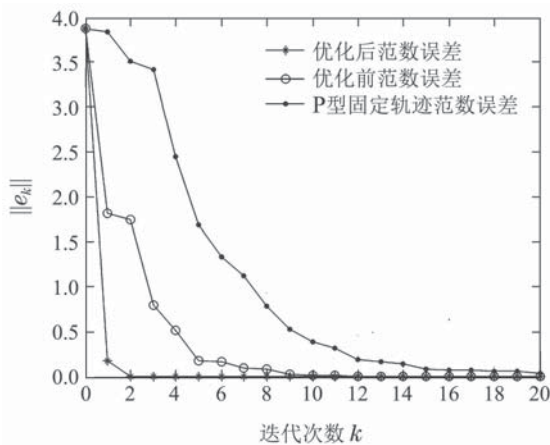


图2 系统输出无扰情形范数误差曲线

Fig. 2 The curves of system output error without disturbance

图1表示系统(43)在控制器(9)作用时, 电机在 $-\frac{\pi}{2}$ 弧度和 $\frac{\pi}{2}$ 弧度之间旋转并驱动机械臂运动, 跟踪实际期望点. 由图2可以明显看出, 经范数优化后的点到点迭代控制器作用于控制系统时, 收敛速度明显优于轨迹更新迭代学习控制器, 而轨迹更新迭代学习

控制算法作用于系统的收敛速度又优于传统的常规P型迭代控制器. 同时, 由于系统设定的各批次初值不严格一致, 系统输出的跟踪误差仅能无限逼近于零, 从图2可以看出经相同批次的迭代, 经优化后的控制器具有较高的跟踪精度. 另外, 从图3可以发现, 优化后的控制系统性能指标函数迅速下降, 并最终达到稳定状态, 而参考轨迹更新迭代算法和传统常规P型迭代学习算法则需要更多批次迭代才能达到该性能.

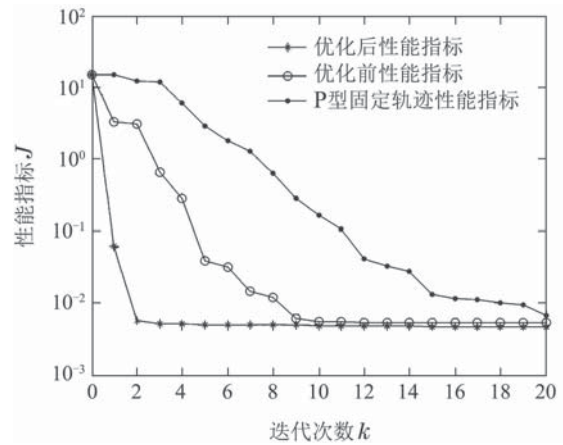


图3 系统无扰情形性能指标曲线

Fig. 3 The curves of system performance index without disturbance

当系统(43)的机械臂输出在迭代过程的第10批次开始受到有界扰动量 $0.01k(\sin t + \cos t)$ 的影响时, 根据第5部分的理论分析, 取优化控制器中的调整参数 γ 为0.5时, 控制系统的输出误差及性能函数随迭代次数的关系分别如图4-5所示.

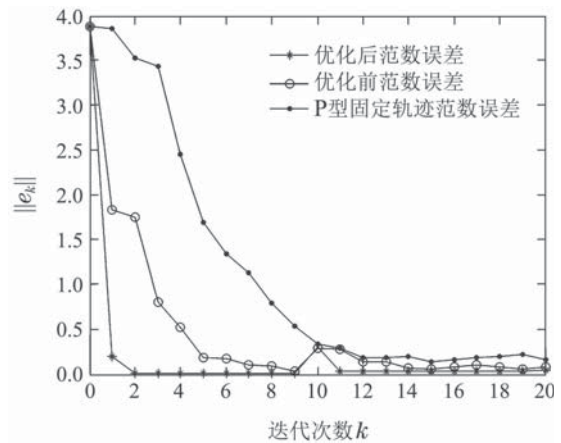


图4 系统输出有扰动情形范数误差曲线

Fig. 4 The curves of system output error with disturbance

由图4可以发现, 当系统在第10个迭代批次开始受到随机量干扰时, 跟踪系统性能变差, 但随着迭代次数的继续增加, 本文方法可以有效抑制这种随机误差对跟踪精度的影响, 在同样的迭代次数下, 经优化后的控制器控制精度比常规P型控制器的控制精度效果更好.

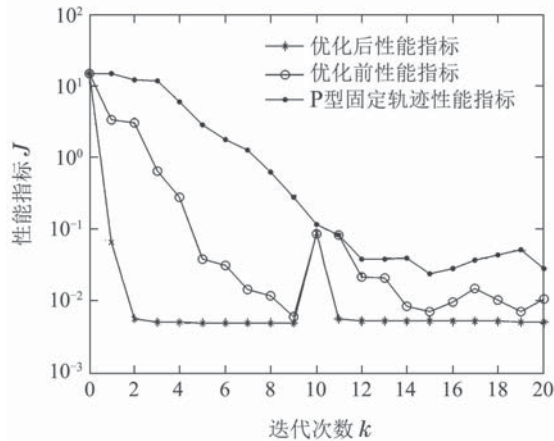


图5 系统有扰情形性能指标曲线

Fig. 5 The curves of system performance index with disturbance

从图5也可以看出,系统性能最终也将收敛于一个稳态值.实际上,在目标优化理论框架内,在有界干扰下鲁棒迭代学习控制系统的跟踪误差在一定程度上不可能完全收敛到零,但优化方法对于性能指标函数通常可给出直接下降的方向,从而在一定程度上也可以实现较好的控制效果.

7 结论(Conclusions)

本文以受非重复扰动的线性离散系统为研究对象,提出基于参考轨迹更新的点到点迭代学习控制律,并讨论了其收敛性和鲁棒性及优化问题.提高了算法的收敛速度和控制精度,验证了跟踪误差单调收敛性问题.最后将算法应用到电机驱动单机械臂控制系统上,验证算法的有效性.本文算法将可进一步推广应用于注塑成型、生物发酵等间歇重复过程.

参考文献(References):

- [1] ZHANG Hongwei, YU Fashan, BU Xuhui, et al. Robust iterative learning control for permanent magnet linear motor [J]. *Electric Machines and Control*, 2012, 6(16): 81 – 86.
(张宏伟, 余发山, 卜旭辉, 等. 基于鲁棒迭代学习的永磁直线电机控制[J]. 电机与控制学报, 2012, 6(16): 81 – 86.)
- [2] BU X H, YU F S, HOU Z S, et al. Iterative learning control for a class of linear discrete-time switched systems [J]. *Automatica*, 2013, 39(9): 1564 – 1569.
- [3] WANG H B, WANG Y. Iterative learning control for nonlinear systems with uncertain state delay and arbitrary initial error [J]. *Control Theory & Application*, 2011, 9(4): 541 – 547.
- [4] XU J X, HUANG D Q. Initial state iterative learning for final state control in motion systems [J]. *Automatica*, 2008, 44(12): 3162 – 3169.
- [5] DINH T V, FREEMAN C T, LEWIN P L, et al. Convergence and robustness of a point-to-point iterative learning control algorithm [C]

//The 51st IEEE Conference on Decision and Control. Maui, Hawaii, USA: IEEE, 2012: 4678 – 4683.

- [6] SON T D, AHN H S, KEVIN L M. Iterative learning control in optimal tracking problems with specified data points [J]. *Automatica*, 2013, 49(1): 1465 – 1471.
- [7] AN Tongjian, LIU Xiangguan. Point to point robust iterative learning control via reference trajectory regulating [J]. *Journal of Zhejiang University*, 2015, 49(1): 87 – 93.
(安通鉴, 刘祥官. 目标更新的点到点鲁棒迭代学习控制 [J]. 浙江大学学报, 2015, 49(1): 87 – 92.)
- [8] SON T D, AHN H S. Terminal iterative learning control for optimal multiple point tracking [C] //2011 American Control Conference. San Francisco, USA: IEEE, 2011: 3651 – 3656.
- [9] CHI R H, HOU Z S, WANG D W, et al. An optimal terminal iterative learning control approach for nonlinear discrete-time systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 1025 – 1030.
- [10] FREEMAN C T, CAI Z L, ROGERS E, et al. Iterative learning control for multiple point-to-point tracking application [J]. *IEEE Transactions Control Systems Technology*, 2011, 19(3): 590 – 600.
- [11] FREEMAN C T, TAN Y. Point-to-point iterative learning control with mixed constraints [C] //2011 American Control Conference. San Francisco, USA: AACC, 2011: 3657 – 3662.
- [12] SHEN D, WANG Y Q. Iterative learning control for stochastic point-to-point tracking system [C] //The 12th International Conference on Control. Guangzhou: IEEE, 2012: 480 – 485.
- [13] SON T D, NGUYEN D H, AHN H S. Iterative learning control for optimal multiple point tracking [C] //The 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference. Oriando, USA: IEEE, 2011: 6025 – 6030.
- [14] AMANN N, OWENS D H, ROGERS E. Iterative learning control using optimal feedback and feedforward actions [J]. *International Journal of Control*, 1996, 62(2): 277 – 293.
- [15] AMANN N, OWENS D H, ROGERS E. Robustness of norm optimal iterative learning control [C] //1996 International Conference on Control. Exeter, UK: IEEE, 1996: 1119 – 1124.
- [16] OWENS D H, CHU B, SONG J M. Parameter optimal iterative learning control using polynomial representations of the inverse plant [J]. *International Journal of Control*, 2012, 85(5): 533 – 544.
- [17] OWENS D H. Multivariable norm optimal and parameter optimal iterative learning control: a unified formulation [J]. *International Journal of Control*, 2012, 85(8): 1010 – 1025.
- [18] LIU Jinkun. *Design of Robot Control System and MATLAB Simulation* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2008.
(刘金琨. 机器人控制系统的设计与MATLAB仿真 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.)

作者简介:

陶洪峰 (1979–), 男, 博士, 副教授, 硕士生导师, 目前研究方向为故障检测与容错控制, E-mail: taohongfeng@hotmail.com;

董晓齐 (1989–), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为迭代学习控制及优化, E-mail: d.qsimon@163.com;

杨慧中 (1955–), 女, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为复杂过程建模及优化控制, E-mail: yhzjn@163.com.