

## 多值逻辑网络的输出跟踪牵制控制

宋平平, 李海涛<sup>†</sup>, 杨琪琪, 刘衍胜

(山东师范大学 数学科学学院, 山东 济南 250014)

**摘要:** 本文利用代数状态空间方法, 研究了多值逻辑控制网络的输出跟踪牵制控制. 首先利用矩阵的半张量积给出了带牵制控制的多值逻辑控制网络的代数表示. 其次基于该代数表示, 定义了一组合适的能达集, 并建立了多值逻辑控制网络输出跟踪牵制控制器的设计方法. 再次, 利用多值逻辑哑算子的性质, 给出了多值逻辑控制网络分布式输出跟踪控制问题可解的充要条件. 最后将所得的理论结果应用于网络演化博弈的演化行为分析.

**关键词:** 多值逻辑网络; 牵制控制; 输出跟踪; 分布式控制系统; 矩阵半张量积

中图分类号: TP273 文献标识码: A

## Pinning output tracking control of multi-valued logical networks

SONG Ping-ping, LI Hai-tao<sup>†</sup>, YANG Qi-qi, LIU Yan-sheng

(School of Mathematical Science, Shandong Normal University, Jinan Shandong 250014, China)

**Abstract:** This paper investigates the pinning control for the output tracking of multi-valued logical networks by using the algebraic state space representation method, and presents some new results. First, the dynamics of multi-valued logical networks with pinning control is converted to an algebraic form via the semi-tensor product of matrices. Second, based on the algebraic form, a series of proper reachable sets is defined for multi-valued logical networks, and a constructive procedure is proposed to design pinning output tracking controllers of multi-valued logical networks. Third, using the property of multi-valued dummy operator, a necessary and sufficient condition is presented for the solvability of distributed output tracking control of multi-valued logical networks. Finally, the obtained new results are applied to the evolutionary behavior analysis of networked evolutionary games.

**Key words:** multi-valued logical network; pinning control; output tracking; distributed control systems; semi-tensor product of matrices

### 1 引言(Introduction)

多值逻辑网络(multi-valued logical networks, MVLNs)广泛地存在于基因调控<sup>[1]</sup>、多值逻辑电路设计<sup>[2]</sup>、网络演化博弈(networked evolutionary games, NEGs)<sup>[3-4]</sup>、模糊控制<sup>[5-7]</sup>、图着色<sup>[8]</sup>以及有限自动机<sup>[9,10]</sup>等研究领域. 在一个 $k$ 值逻辑网络中( $k$ 为大于等于2的自然数), 网络节点的状态取值被量化为 $0, 1, \dots, k-1$ 这 $k$ 个值, 网络中各节点通过一个有向图相互连接, 从而每一时刻的节点状态由上一时刻入度邻居节点状态的 $k$ 值逻辑差分方程所决定<sup>[11]</sup>. 由于多值逻辑网络模型结构简单, 可用于较大型系统的建模, 对于该模型的研究引起了国内外很多学者的浓厚兴趣<sup>[12-15]</sup>. 作为多值逻辑网络系统理论体系中一个非常重要的课题, 多值逻辑网络的控制不仅具有重要的理

论意义, 而且对于基因调控、电路设计以及博弈演化等实际问题具有关键的指导意义.

近年来, 程代展教授提出了一种新的矩阵乘积, 称为矩阵的半张量积(semi-tensor product of matrices)<sup>[16]</sup>. 该矩阵乘积将普通矩阵乘积推广到任意维数的两个矩阵之间, 并保留了普通矩阵乘积的重要性质. 利用矩阵的半张量积理论, 人们可以方便地将逻辑网络系统转化为(双)线性形式, 从而可以利用经典的控制理论和方法来分析和控制逻辑网络系统. 程代展教授为逻辑网络系统的分析与控制发展了一种代数状态空间方法(algebraic state space representation)<sup>[17]</sup>. 到目前为止, 国内外已有很多专家学者利用代数状态空间方法开始研究逻辑网络系统, 并得到了很多优秀的研究成果<sup>[18-27]</sup>.

收稿日期: 2015-12-12; 录用日期: 2016-05-26.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: haitaoli09@gmail.com; Tel.: +86 15253130216.

本文责任编辑: 武玉强.

国家自然科学基金项目(61374065, 61503225), 山东省自然科学基金项目(ZR2015FQ003)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61374065, 61503225) and Natural Science Foundation of Shandong Province (ZR2015 FQ003).

在许多实际网络模型中, 由于量测条件、不可测变量等因素的影响, 状态变量可能无法直接量测, 但是输出变量往往是可以获得的. 此时, 为了得到期望的结果, 人们可以设计控制器使系统的输出跟踪一个期望的信号, 这个问题在控制论中称为输出跟踪控制(output tracking control). 在过去的几十年, 尽管人们对于线性系统和非线性系统的输出跟踪控制问题进行了较为深入的研究, 并取得了很多优秀的研究成果<sup>[28-29]</sup>, 但是关于逻辑控制网络输出跟踪控制的研究, 据作者所知, 还很少有文献报道<sup>[30]</sup>.

需要指出的是, 现存的关于多值逻辑网络控制问题的研究结果均考虑的是集中式控制(centralized control), 即所设计的控制器是基于系统的全局状态信息. 而在实际的多值逻辑网络中, 网络节点的个数往往是很多的, 并且受成本等因素的影响, 网络节点之间的通信带宽也往往会受到限制. 因此, 现存的集中式控制的研究结果很难应用于实际的多值逻辑网络. 最近, 在文献[31-32]中, 牵制控制(pinning control)被引入到多值逻辑网络的控制问题研究之中. 该类控制的优点在于, 通过控制极少的节点便可实现预期的控制目标. 另外, 在网络化系统的研究中, 分布式控制(distributed control)已成为一个热门课题. 与集中式控制相比, 分布式控制只需要利用受控网络节点的入度邻居节点的状态信息. 因此, 对于较大规模网络化系统的控制, 牵制控制和分布式控制比集中式控制更灵活, 操作更方便, 对通信带宽的要求更低. 但是, 据作者所知, 关于多值逻辑控制网络输出跟踪牵制控制和分布式控制的研究, 目前国内外还没有相关文献报道.

本文的主要目的是利用矩阵半张量积的方法研究多值逻辑控制网络的输出跟踪牵制控制和分布式控制. 首先, 作者给出了带牵制控制的多值逻辑控制网络的代数表示. 基于该代数表示, 作者建立了多值逻辑控制网络输出跟踪牵制控制器的设计方法, 并利用多值逻辑哑算子的性质, 给出了多值逻辑控制网络分布式输出跟踪控制问题可解的充要条件. 最后, 作为应用, 作者利用所得的理论结果来分析网络演化博弈的演化行为.

本文的剩余部分安排如下: 第2部分列出了一些必要的预备知识; 第3部分利用矩阵半张量积的方法将带牵制控制的多值逻辑控制网络转化成其代数形式; 第4部分给出本文的主要结果; 第5部分将所得的理论结果应用于网络演化博弈的演化行为分析; 第6部分给出本文的结论.

## 2 预备知识(Preliminaries)

首先列出本文中用到的记号:

- $\delta_k^i$  表示单位矩阵  $I_k$  的第  $i$  列;
- $\Delta_k := \{\delta_k^i | i = 1, 2, \dots, k\}$ ;

- $\mathcal{D}_k := \{1, \frac{k-2}{k-1}, \frac{k-3}{k-1}, \dots, \frac{1}{k-1}, 0\}$ . 定义  $\frac{i}{k-1} \sim \delta_k^{k-i}$ , 其中“ $\sim$ ”表示同一对象的两种不同形式,  $i = 1, 2, \dots, k-1$ ;

• 一个  $n \times t$  维矩阵  $A$  称作逻辑矩阵, 如果  $A = [\delta_n^{i_1} \delta_n^{i_2} \dots \delta_n^{i_t}]$ . 简记  $A$  为  $A = \delta_n [i_1 \ i_2 \ \dots \ i_t]$ . 定义所有  $n \times t$  维逻辑矩阵的集合为  $\mathcal{L}_{n \times t}$ ;

•  $\text{col}_i(A)$  和  $\text{row}_j(A)$  分别表示矩阵  $A$  的第  $i$  列和第  $j$  行. 矩阵  $A$  的所有列组成的集合记为  $\text{col}(A)$ ;

• 设  $A, B \in \mathcal{L}_{n \times r}$ , 则  $A \times B := [\text{col}_1(A) \otimes \text{col}_1(B), \dots, \text{col}_r(A) \otimes \text{col}_r(B)]$ , 其中  $\otimes$  表示矩阵的 Kronecker 积.

下面介绍矩阵半张量积的定义和基本性质<sup>[16]</sup>.

**定义 1** 两个矩阵  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  和  $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$  的半张量积定义为

$$A \times B = (A \otimes I_{\frac{\alpha}{p}})(B \otimes I_{\frac{\alpha}{q}}), \quad (1)$$

其中  $\alpha = \text{lcm}(n, p)$  是  $n$  和  $p$  的最小公倍数.

**注 1** 在不引起混淆的情况下, 本文省略符号“ $\times$ ”.

**引理 1** 矩阵半张量积有如下性质:

i) 设  $X \in \mathbb{R}^{t \times 1}$  是一个列向量,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , 则  $X \times A = (I_t \otimes A) \times X$ .

ii) 设  $X \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  和  $Y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  是两个列向量, 则  $Y \times X = W_{[m,n]} \times X \times Y$ , 其中  $W_{[m,n]} \in \mathbb{R}^{mn \times mn}$  是换位矩阵.

**引理 2** 设  $f(x_1, x_2, \dots, x_s) : \mathcal{D}_k^s \rightarrow \mathcal{D}_k$  是一个  $k$  值逻辑函数. 则存在唯一的矩阵  $M_f \in \mathcal{L}_{k \times k^s}$ , 称作  $f$  的结构矩阵, 使得

$$f(x_1, x_2, \dots, x_s) = M_f \times_{i=1}^s x_i, \quad x_i \in \Delta_k. \quad (2)$$

## 3 代数形式(Algebraic form)

考虑如下带牵制控制的多值逻辑网络:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t)), \\ \vdots \\ x_r(t+1) = f_r(x_1(t), \dots, x_n(t), u_r(t)), \\ x_{r+1}(t+1) = f_{r+1}(x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ y_j(t) = h_j(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad j = 1, 2, \dots, p, \end{cases} \quad (3)$$

其中:  $r < n$ ,  $f_i : \mathcal{D}_k^{n+1} \rightarrow \mathcal{D}_k$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ ;  $f_i : \mathcal{D}_k^n \rightarrow \mathcal{D}_k$ ,  $i = r+1, \dots, n$ ;  $h_j : \mathcal{D}_k^n \rightarrow \mathcal{D}_k$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$  是  $k$  值逻辑函数;  $x_i, u_s \in \Delta_k$ ,  $s = 1, 2, \dots, r$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**注 2** 从网络(3)可以看出, 本文所研究的带牵制控制的多值逻辑网络只在前  $r$  个节点上分别加了一个控制, 这是与文献中多值逻辑网络的不同之处.

下面利用矩阵半张量积将网络(3)转化为其等价的代数形式.

令  $x(t) = \times_{i=1}^n x_i(t) \in \Delta_{k^n}$ ,  $x^1(t) = \times_{i=1}^r x_i(t) \in \Delta_{k^r}$ ,  $x^2(t) = \times_{i=r+1}^n x_i(t) \in \Delta_{k^{n-r}}$ ,  $u(t) = \times_{i=1}^r u_i(t) \in \Delta_{k^r}$ ,  $y(t) = \times_{i=1}^p y_i(t) \in \Delta_{k^p}$ . 由引理2, 设  $F_i, H_j$  分别为  $k$  值逻辑函数  $f_i, h_j$  的结构矩阵,  $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, p$ . 则有

$$\begin{aligned} x^1(t+1) &= \\ F_1 x(t) u_1(t) \cdots F_r x(t) u_r(t) &= \\ F_1 (I_{k^{n+1}} \otimes F_2) W_{[k^n, k^{n+1}]} M_{r, k^n} x(t) u_1(t) & \\ u_2(t) \cdots F_r x(t) u_r(t) = \cdots = & \\ F_1 \times_{i=2}^r [(I_{k^{n+i-1}} \otimes F_i) W_{[k^n, k^{n+i-1}]} M_{r, k^n}] & \\ x(t) u(t) = & \\ F_1 \times_{i=2}^r [(I_{k^{n+i-1}} \otimes F_i) W_{[k^n, k^{n+i-1}]} M_{r, k^n}] & \\ W_{[k^r, k^n]} u(t) x(t) := & \\ L_1 u(t) x(t), & \\ x^2(t+1) = F_{r+1} x(t) \cdots F_n x(t) = & \\ (F_{r+1} \times F_{r+2} \times \cdots \times F_n) x(t) := & \\ L_2 x(t), & \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} L_1 &= F_1 \times_{i=2}^r [(I_{k^{n+i-1}} \otimes F_i) W_{[k^n, k^{n+i-1}]} \\ & \quad M_{r, k^n}] W_{[k^r, k^n]} \in \mathcal{L}_{k^r \times k^{r+n}}, \\ L_2 &= F_{r+1} \times F_{r+2} \times \cdots \times F_n \in \mathcal{L}_{k^{n-r} \times k^n}, \\ M_{r, k^n} &= \text{diag}\{\delta_{k^n}^1, \delta_{k^n}^2, \dots, \delta_{k^n}^{k^n}\} \in \mathcal{L}_{k^{2n} \times k^n} \end{aligned}$$

是多值逻辑降幂矩阵, 满足  $x \times x = M_{r, k^n} \times x, \forall x \in \Delta_{k^n}$ .

因此

$$\begin{aligned} x(t+1) &= L_1 u(t) x(t) L_2 x(t) = \\ L_1 (I_{k^{n+r}} \otimes L_2) (I_{k^r} \otimes M_{r, k^n}) u(t) x(t) &:= \\ Lu(t) x(t), & \end{aligned}$$

其中

$$L = L_1 (I_{k^{n+r}} \otimes L_2) (I_{k^r} \otimes M_{r, k^n}) \in \mathcal{L}_{k^n \times k^{n+r}}. \tag{4}$$

类似地, 有

$$\begin{aligned} y(t) &= H_1 x(t) \cdots H_p x(t) = \\ (H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_p) x(t) &:= Hx(t), \end{aligned}$$

其中

$$H = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_p \in \mathcal{L}_{k^p \times k^n}. \tag{5}$$

综上, 网络(3)等价于如下代数形式:

$$\begin{cases} x(t+1) = Lu(t)x(t), \\ y(t) = Hx(t). \end{cases} \tag{6}$$

## 4 主要结果(Main results)

### 4.1 网络(3)的输出跟踪牵制控制器设计 (Pinning control design for output tracking of network (3))

本部分研究的输出跟踪牵制控制问题. 设计如下形式的牵制控制:

$$\begin{cases} u_1(t) = z_1(x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ \vdots \\ u_r(t) = z_r(x_1(t), \dots, x_n(t)), \end{cases} \tag{7}$$

使得网络(3)的输出跟踪一个给定的参考信号  $Y_s = (y_1^s, \dots, y_p^s) \in \mathcal{D}_k^p$ . 记网络(3)从初始状态  $x(0) \in \Delta_{k^n}$  开始的状态轨迹为  $x(t; x(0), u)$ , 输出轨迹为  $y(t; x(0), u)$ . 即存在一个整数  $\tau > 0$ , 对于任意的  $x(0) \in \Delta_{k^n}$  和任意的  $t \geq \tau$  有  $y(t; x(0), u) = Y_s$  成立. 其中  $z_i: \mathcal{D}_k^n \rightarrow \mathcal{D}_k$  是  $k$  值逻辑函数 ( $i = 1, 2, \dots, r$ ).

利用矩阵半张量积, 控制(7)等价于

$$u(t) = Kx(t), \tag{8}$$

其中:  $K = K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_r \in \mathcal{L}_{k^r \times k^n}$ ,  $K_i$  为  $k$  值逻辑函数  $z_i$  的结构矩阵,  $i = 1, 2, \dots, r$ . 同时, 给定参考信号的代数形式是  $y_s = \times_{i=1}^p y_i^s = \delta_{k^p}^\alpha$ , 其中  $\alpha$  由  $y_i^s$  唯一确定,  $i = 1, 2, \dots, p$ . 这样, 输出跟踪牵制控制问题就变为如何去设计控制增益矩阵  $K \in \mathcal{L}_{k^r \times k^n}$ .

考虑网络(3)的状态转移矩阵  $L = \delta_{k^n}^{i_1, i_2, \dots, i_{k^{n+r}}}$  和给定的参考信号  $y_s = \delta_{k^p}^\alpha$ , 定义集合

$$\mathcal{B}(\alpha) = \{c \in \mathbb{N} : \text{col}_c(H) = \delta_{k^p}^\alpha, 1 \leq c \leq k^n\}, \tag{9}$$

则集合  $\{\delta_{k^n}^c : c \in \mathcal{B}(\alpha)\}$  包含了系统(3)的所有输出为  $y_s$  的状态. 不妨设  $\mathcal{B}(\alpha) \neq \emptyset$ . 反之, 若  $\mathcal{B}(\alpha) = \emptyset$ , 则输出跟踪牵制控制问题就没有解.

对于任意给定的非空集合  $\Theta \subseteq \Delta_{k^n}$  和  $m = 1, 2, \dots$ , 定义

$$\begin{aligned} \Omega_m(\Theta) &= \\ \{x(0) \in \Delta_{k^n} : \exists u(0), u(1), \dots, u(m-1) \in \Delta_{k^r} & \\ \text{使得 } x(m; x(0), u) \in \Theta\}. & \end{aligned} \tag{10}$$

于是有下面的结论.

**定理 1** 对于网络(3), 输出跟踪牵制控制问题可解的充分必要条件是存在非空集合  $\Theta \subseteq \{\delta_{k^n}^c : c \in \mathcal{B}(\alpha)\}$  和整数  $1 \leq \tau \leq k^n$  使得

$$\begin{cases} \Theta \subseteq \Omega_1(\Theta), \\ \Omega_\tau(\Theta) = \Delta_{k^n}. \end{cases} \tag{11}$$

**证** (充分性.) 假设式(11)成立, 下面设计输出跟踪牵制控制器使系统(3)的输出跟踪  $y_s$ .

对  $m = 1, 2, \dots, \tau$ , 令  $\Omega_m^0(\Theta) = \Omega_m(\Theta) \setminus \Omega_{m-1}(\Theta)$ , 其中  $\Omega_0(\Theta) := \emptyset$ .

则  $\forall m_1, m_2 \in \{1, 2, \dots, \tau\}, m_1 \neq m_2, \Omega_{m_1}^0(\Theta) \cap \Omega_{m_2}^0(\Theta) = \emptyset$ , 且  $\bigcup_{m=1}^{\tau} \Omega_m^0(\Theta) = \Delta_{k^n}$ . 所以, 对任意的整数  $1 \leq j \leq k^n$ , 总存在唯一的整数  $1 \leq m_j \leq \tau$  使得  $\delta_{k^n}^j \in \Omega_{m_j}^0(\Theta)$ .

对任意的整数  $1 \leq j \leq k^n$ , 下分两种情况讨论:

- 当  $m_j = 1$  时, 存在整数  $1 \leq p_j \leq k^r$  使得  $l := (p_j - 1)k^n + j$  满足  $1 \leq l \leq k^{r+n}$  和  $\delta_{k^n}^i \in \Theta$ .
- 当  $2 \leq m_j \leq \tau$  时, 存在整数  $1 \leq p_j \leq k^r$  使得  $l := (p_j - 1)k^n + j$  满足  $1 \leq l \leq k^{r+n}$  和  $\delta_{k^n}^i \in \Omega_{m_j-1}(\Theta)$ .

令  $K = \delta_{k^r}[p_1, p_2, \dots, p_{k^n}] \in \mathcal{L}_{k^r \times k^n}$ . 则对任意的初始状态  $x(0) = \delta_{k^n}^j \in \Delta_{k^n}$ , 有  $x(m_j; x(0), u) \in \Theta, \forall 1 \leq j \leq k^n$ . 由  $\Theta \subseteq \Omega_1(\Theta)$  可得  $x(t; x(0), u) \in \Theta$  对于  $\forall t \geq \tau$  和  $\forall x(0) \in \Delta_{k^n}$  成立. 所以, 对  $\forall t \geq \tau, \forall x(0) \in \Delta_{k^n}$ , 有  $y(t; x(0), u) = Hx(t; x(0), u) = y_s$ .

因此, 控制  $u(t) = \delta_{k^r}[p_1 \ p_2 \ \dots \ p_{k^n}]x(t)$  可使系统(3)的输出跟踪  $y_s$ .

(必要性.) 假设输出跟踪牵制控制问题可解, 则存在牵制控制  $u(t) = Kx(t), K \in \mathcal{L}_{k^r \times k^n}$ , 使得网络(3)的输出跟踪  $y_s$ . 下证存在非空集合  $\Theta \subseteq \{\delta_{k^n}^c : c \in \mathcal{B}(\alpha)\}$  和整数  $1 \leq \tau \leq k^n$  使得式(11)成立.

网络(3)在控制  $u(t) = Kx(t)$  下形成闭环系统:

$$\begin{cases} x(t+1) = \hat{L}x(t), \\ y(t) = Hx(t), \end{cases} \quad (12)$$

其中  $\hat{L} = LKM_{\tau, k^n}$ .

定义  $\Theta$  为网络(12)的极限集(包括所有的不动点和环),  $1 \leq T_t \leq k^n$  为过渡周期<sup>[16]</sup>, 显然, 式(11)对于  $\Theta$  和  $\tau = T_t$  成立.

下面只需证明  $\Theta \subseteq \{\delta_{k^n}^c : c \in \mathcal{B}(\alpha)\}$ . 用反证法. 若  $\Theta \not\subseteq \{\delta_{k^n}^c : c \in \mathcal{B}(\alpha)\}$ , 则存在  $\delta_{k^n}^i \in \Theta$ , 但  $i \notin \mathcal{B}(\alpha)$ . 因为  $\delta_{k^n}^i$  是网络(12)的一个不动点或者一个环上的元素, 则存在整数  $T > 0$ , 对  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 有  $\delta_{k^n}^i = x(nT; \delta_{k^n}^i)$ . 因此  $y(nT; \delta_{k^n}^i) = Hx(nT; \delta_{k^n}^i) \neq y_s, \forall n \in \mathbb{N}$ . 这与假设矛盾. 所以  $\Theta \subseteq \{\delta_{k^n}^c : c \in \mathcal{B}(\alpha)\}$ .

证毕.

**注 3** 本定理的证明中建立了如下多值逻辑控制网络输出跟踪牵制控制器的设计方法:

考虑网络(3), 其状态转移矩阵  $L = \delta_{k^n}[i_1, i_2, \dots, i_{k^n+r}]$ , 假设存在非空集合  $\Theta \subseteq \{\delta_{k^n}^c : c \in \mathcal{B}(\alpha)\}$  和整数  $1 \leq \tau \leq k^n$  使得式(11)成立. 则对于任意的整数  $1 \leq j \leq k^n$ , 总存在唯一的整数  $1 \leq m_j \leq \tau$  使得  $\delta_{k^n}^j \in \Omega_{m_j}^0(\Theta)$ . 令  $1 \leq p_j \leq k^r$  使得  $1 \leq l \leq k^{r+n}$  和

$$\begin{cases} \delta_{k^n}^i \in \Theta, m_j = 1, \\ \delta_{k^n}^i \in \Omega_{m_j-1}(\Theta), 2 \leq m_j \leq \tau \end{cases}$$

成立, 其中  $l = (p_j - 1)k^n + j$ . 则多值逻辑控制网络输出跟踪牵制控制器可以设计为  $u(t) = Kx(t), K = \delta_{k^r}[p_1 \ p_2 \ \dots \ p_{k^n}]$ .

## 4.2 网络(3)的分布式输出跟踪控制(Distributed output tracking control of network (3))

在网络(3)和控制(7)中, 如果只考虑每一节点的邻居(包含本身), 可把式(3)写成

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(N_1(x_1(t)), u_1(t)), \\ \vdots \\ x_r(t+1) = f_r(N_r(x_r(t)), u_r(t)), \\ x_{r+1}(t+1) = f_{r+1}(N_{r+1}(x_{r+1}(t))), \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(N_n(x_n(t))), \\ y_j(t) = h_j(x_1(t), \dots, x_n(t)), j = 1, 2, \dots, p, \end{cases} \quad (13)$$

其中:  $N_i(x_i(t)) = \{x_{j_1}^i(t), x_{j_2}^i(t), \dots, x_{j_{|N_i|}}^i(t)\}$  表示  $x_i(t)$  的所有邻居(包含本身)组成的集合,  $|N_i|$  表示  $x_i(t)$  的邻居(包含本身)的个数,  $i = 1, 2, \dots, n, 1 \leq j_1^i < j_2^i < \dots < j_{|N_i|}^i \leq n, f_i, h_j$  为合适维数的  $k$  值逻辑函数.

本部分研究的分布式输出跟踪控制问题: 设计如下形式的分布式控制

$$\begin{cases} u_1(t) = z_1(N_1(x_1(t))), \\ \vdots \\ u_r(t) = z_r(N_r(x_r(t))), \end{cases} \quad (14)$$

使得网(13)的输出跟踪一个给定的参考信号  $Y_s = (y_1^s, \dots, y_p^s) \in \mathcal{D}_k^p$ . 即存在一个整数  $\tau > 0$ , 对于任意的  $x(0) \in \Delta_{k^n}$  和任意的  $t \geq \tau$  有  $y(t; x(0), u) = Y_s$  成立. 其中  $z_i$  是合适维数的  $k$  值逻辑函数,  $i = 1, 2, \dots, r$ .

定义

$$\Psi_0 = \begin{cases} I_k, & j_1^i = 1, \\ E_{d,k}^{j_1^i-1}, & j_1^i > 1, \end{cases}$$

其中  $E_{d,k} = \underbrace{[I_k \ \dots \ I_k]}_k$  是  $k$  值逻辑哑算子.

当  $1 \leq \rho \leq |N_i| - 1$  时, 定义

$$\begin{aligned} \Psi_\rho &= \begin{cases} I_k, & j_{\rho+1}^i - j_\rho^i = 1, \\ E_{d,k}^{j_{\rho+1}^i - j_\rho^i - 1}, & j_{\rho+1}^i - j_\rho^i > 1, \end{cases} \\ W_\rho &= \begin{cases} I_k, & j_{\rho+1}^i - j_\rho^i = 1, \\ W_{[k^\rho, k^{j_{\rho+1}^i - j_\rho^i - 1}]}, & j_{\rho+1}^i - j_\rho^i > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

当  $\rho = |N_i|$  时, 定义

$$\begin{aligned} \Psi_{|N_i|} &= \begin{cases} I_k, & j_{|N_i|}^i = n, \\ E_{d,k}^{n - j_{|N_i|}^i}, & j_{|N_i|}^i < n. \end{cases} \\ W_{|N_i|} &= \begin{cases} I_k, & j_{|N_i|}^i = n, \\ W_{[k^{|N_i|}, k^{n - j_{|N_i|}^i}]}, & j_{|N_i|}^i < n. \end{cases} \end{aligned}$$

令  $x^{N_i}(t) = x_{j_1^i}(t)x_{j_2^i}(t) \dots x_{j_{|N_i|}^i}(t)$ , 利用矩阵半张量积的性质和上面定义的矩阵, 有

$$\begin{aligned}
 x^{N_i}(t) &= x_{j_1^i}(t)x_{j_2^i}(t)\cdots x_{j_{|N_i|}^i}(t) = \\
 &\Psi_{|N_i|}x_{j_{|N_i|}^i+1}(t)x_{j_{|N_i|}^i+2}(t)\cdots x_n(t) \\
 &x_{j_1^i}(t)x_{j_2^i}(t)\cdots x_{j_{|N_i|}^i}(t) = \\
 &\Psi_{|N_i|}W_{|N_i|}x_{j_1^i}(t)x_{j_2^i}(t)\cdots x_{j_{|N_i|}^i}(t) \\
 &x_{j_{|N_i|}^i+1}(t)\cdots x_n(t) = \\
 &\Psi_{|N_i|}W_{|N_i|}\Psi_{|N_i|-1}x_{j_{|N_i|}^i+1}(t)\cdots \\
 &x_{j_{|N_i|}^i-1}(t)x_{j_1^i}(t)x_{j_2^i}(t)\cdots \\
 &x_{j_{|N_i|}^i}(t)x_{j_{|N_i|}^i+1}(t)\cdots x_n = \cdots = \\
 &\Psi_{|N_i|}W_{|N_i|}\times_{\rho=|N_i|-1}^1(\Psi_\rho W_\rho)\Psi_0x(t) := \\
 &\Lambda_i x(t), i = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned}$$

综上分析, 有以下引理.

**引理 3**  $x^{N_i}(t)(i = 1, 2, \dots, n)$ 可表示为 $x^{N_i}(t) = \Lambda_i x(t)$ , 其中 $\Lambda_i = \Psi_{|N_i|}W_{|N_i|}\times_{\rho=|N_i|-1}^1(\Psi_\rho W_\rho)\Psi_0$ .

下面利用矩阵半张量积和引理式3将式(13)和(14)转化为其等价的代数形式.

由引理 1, 设  $Q_i, H_j, K_m$  分别为  $k$  值逻辑函数  $f_i, h_j, z_m$  的结构矩阵,  $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, p; m = 1, 2, \dots, r$ , 则有

$$\begin{aligned}
 x^1(t+1) &= Q_1x^{N_1}(t)u_1(t)\cdots Q_r x^{N_r}(t)u_r(t) = \\
 &Q_1\Lambda_1x(t)u_1(t)\cdots Q_r\Lambda_r x(t)u_r(t) = \\
 &\cdots = \\
 &(Q_1\Lambda_1)\times_{i=2}^r[(I_{k^{n+i-1}}\otimes(Q_i\Lambda_i))\times \\
 &W_{[k^n, k^{n+i-1}]}M_{r, k^n}]W_{[k^r, k^n]}u(t)x(t) := \\
 &\hat{Q}_1u(t)x(t), \\
 x^2(t+1) &= Q_{r+1}\Lambda_{r+1}x(t)\cdots Q_n\Lambda_n x(t) = \\
 &[(Q_{r+1}\Lambda_{r+1})\times\cdots\times(Q_n\Lambda_n)]x(t) := \\
 &\hat{Q}_2x(t),
 \end{aligned}$$

$$\hat{Q}_1 = (Q_1\Lambda_1)\times_{i=2}^r[(I_{k^{n+i-1}}\otimes(Q_i\Lambda_i))\times W_{[k^n, k^{n+i-1}]}M_{r, k^n}]W_{[k^r, k^n]},$$

$$\hat{Q}_2 = (Q_{r+1}\Lambda_{r+1})\times\cdots\times(Q_n\Lambda_n).$$

因此

$$\begin{aligned}
 x(t+1) &= x^1(t+1)x^2(t+1) = \\
 &\hat{Q}_1u(t)x(t)\hat{Q}_2x(t) = \\
 &\hat{Q}_1(I_{k^{n+r}}\otimes\hat{Q}_2)(I_{k^r}\otimes M_{r, k^n})u(t)x(t) := \\
 &Qu(t)x(t),
 \end{aligned}$$

其中  $Q = \hat{Q}_1(I_{k^{n+r}}\otimes\hat{Q}_2)(I_{k^r}\otimes M_{r, k^n})$ .

类似地, 有

$$\begin{aligned}
 y(t) &= H_1x(t)\cdots H_px(t) = \\
 &(H_1\times\cdots\times H_p)x(t) := Hx(t),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u(t) &= K_1\Lambda_1x(t)\cdots K_r\Lambda_r x(t) = \\
 &[(K_1\Lambda_1)\times\cdots\times(K_r\Lambda_r)]x(t) := Kx(t),
 \end{aligned}$$

其中:  $H = H_1\times\cdots\times H_p, K = (K_1\Lambda_1)\times\cdots\times(K_r\Lambda_r)$ .

综上, 网络(13)和控制(14)等价于如下代数形式:

$$\begin{cases} x(t+1) = Qu(t)x(t), \\ y(t) = Hx(t), \end{cases} \quad (15)$$

$$u(t) = Kx(t). \quad (16)$$

同时, 给定参考信号的代数形式是  $y_s = \times_{i=1}^p y_i^s = \delta_{k^p}^\alpha$ , 其中  $\alpha$  由  $y_i^s$  唯一确定,  $i = 1, 2, \dots, p$ .

**定理 2** 对于网络(13), 分布式输出跟踪控制问题可解的充分必要条件是存在逻辑矩阵  $K_i \in \mathcal{L}_{k\times k^{|N_i|}}, i = 1, 2, \dots, r$  和整数  $1 \leq \tau \leq k^n$  使得

$$\text{row}_c((QKM_{r, k^n})^\tau) = \mathbf{0}_{k^n}, \forall c \notin \mathcal{B}(\alpha), \quad (17)$$

其中  $K = (K_1\Lambda_1)\times(K_2\Lambda_2)\times\cdots\times(K_r\Lambda_r)$ .

**证** (充分性.) 假设式(17)成立, 下证分布式输出跟踪控制问题可解.

对任意的初始状态  $x(0) = \Delta_{k^n}, \forall t \geq \tau$  有

$$\begin{aligned}
 x(t; x(0), u) &= Qu(t-1)x(t-1) = \\
 QKx(t-1)x(t-1) &= QKM_{r, k^n}x(t-1) = \\
 \cdots &= (QKM_{r, k^n})^t x(0) = \\
 (QKM_{r, k^n})^\tau [(QKM_{r, k^n})^{t-\tau} x(0)].
 \end{aligned}$$

由式(17)可得  $\text{col}((QKM_{r, k^n})^\tau) \subseteq \{\delta_{k^n}^c : c \in \mathcal{B}(\alpha)\}$ . 因此, 对  $\forall t \geq \tau, \forall x(0) = \Delta_{k^n}$ , 有

$$\begin{aligned}
 x(t; x(0), u) &= \\
 (QKM_{r, k^n})^\tau [(QKM_{r, k^n})^{t-\tau} x(0)] &\in \\
 \{\delta_{k^n}^c : c \in \mathcal{B}(\alpha)\} &\quad (18)
 \end{aligned}$$

成立. 所以  $y(t; x(0), u) = Hx(t; x(0), u) = y_s = \delta_{k^p}^\alpha$  对  $\forall t \geq \tau, \forall x(0) = \Delta_{k^n}$  成立. 即分布式输出跟踪控制问题可解.

(必要性.) 假设对于网络(13), 分布式输出跟踪控制问题可解, 则存在正整数  $\tau$ , 对任意的  $x(0) \in \Delta_{k^n}$  和任意的  $t \geq \tau$ , 有  $y(t; x(0), u) = \delta_{k^p}^\alpha$ . 所以对  $\forall t \geq \tau, \forall x(0) = \Delta_{k^n}, x(t; x(0), u) \in \{\delta_{k^n}^c : c \in \mathcal{B}(\alpha)\}$ , 则由式(18)可得存在逻辑矩阵  $K_i \in \mathcal{L}_{k\times k^{|N_i|}}, i = 1, 2, \dots, r$  和正整数  $\tau$  使得(17)成立.

下面只需证明  $\hat{\tau} \leq k^n$ , 其中  $\hat{\tau}$  为满足(17)成立的所有正整数  $\tau$  中最小者.

用反证法, 若  $\hat{\tau} > k^n$ , 则存在  $x(0) \in \Delta_{k^n}$  使得  $x(\hat{\tau}-1; x(0), u) \notin \{\delta_{k^n}^c : c \in \mathcal{B}(\alpha)\}$ . 因为  $\Delta_{k^n}$  有  $k^n$  个元素, 所以必存在两个整数  $t_1, t_2$  满足  $0 \leq t_1 < t_2 \leq \hat{\tau}-1$  使得  $x(t_1; x(0), u) = x(t_2; x(0), u)$ . 由于在控制  $u(t) = Kx(t)$  的作用下, 原系统形成了闭环控制(一

个  $k$  值逻辑网络), 所以闭环系统从  $x(0)$  出发的轨线形成了环  $\{x(t_1; x(0), u), x(t_1 + 1; x(0), u), \dots, x(t_2; x(0), u)\}$ . 所以  $\forall t \geq t_1, x(t; x(0), u) \in \{\delta_{k^n}^c : c \in \mathcal{B}(\alpha)\}$ . 显然, 这与  $\hat{\tau}$  的定义矛盾. 因此,  $\hat{\tau} \leq k^n$ . 所以, 存在逻辑矩阵  $K_i \in \mathcal{L}_{k \times k | N_i}, i = 1, 2, \dots, r$  和正整数  $\tau = \hat{\tau}$  使得式(17)成立. 证毕.

**注 4** 本定理给出了多值逻辑控制网络分布式输出跟踪控制问题可解的充要条件. 与定理1相比, 定理1给出了设计集中式控制增益矩阵的方法, 但是定理2仅给出了分布式输出跟踪控制器存在的充要条件, 不能设计出分布式控制增益矩阵. 关于分布式输出跟踪控制器的设计问题, 需要在今后的研究工作中予以解决.

**注 5** 本文在输出跟踪控制设计中应用到了参考信号. 这是因为本文的设计方法是首先寻找非空集合  $\Theta \subseteq \{\delta_{k^n}^c : c \in \mathcal{B}(\alpha)\}$  使其满足式(11), 然后再利用定理1设计增益矩阵  $K$ . 这里  $\mathcal{B}(\alpha)$  用到了参考信号.

### 5 例子(An example)

本部分将所得的理论结果应用于网络演化博弈的演化行为分析.

一个网络演化博弈包含玩家、网络图、基本博弈及策略升级规则4个组成部分. 用网络图中的节点表示博弈中的玩家, 边表示各个玩家之间的信息传递关系. 这样每个玩家通过与邻居做基本博弈, 利用策略升级规则更新自己下一步的策略.

下面, 本文回顾一下囚徒困境博弈<sup>[3]</sup>. 每个玩家可以选择坦白或者不坦白两个策略. 两个玩家进行囚徒困境博弈时, 如果两人都选择坦白则各判6年; 如果一人坦白另一人不坦白, 则坦白的释放, 不坦白的判9年; 如果都不坦白则因证据不足各判一年. 则有如下表1的支付矩阵. 表中: 1代表不坦白, 2代表坦白.

表 1 支付矩阵

Table 1 Payoff matrix

$x_1 \setminus x_2$	1	2
1	(1, 1)	(9, 0)
2	(0, 9)	(6, 6)

现考虑一个由4个玩家参与的网络演化博弈, 其中玩家记为  $N = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ , 网络图见图1, 其中  $P_1$  是一个伪玩家, 可自由选择自己每一步的策略, 每个玩家有相同的策略集合  $\{1, 2\}$ . 策略升级规则为:  $P_2, P_3, P_4$  中每个玩家只与自己邻居进行囚徒困境博弈, 并且选择邻居(包含本身)中收益最小的玩家的策略作为自己下一时刻的策略, 如果邻居(包含本身)中有最小收益相同者, 取标号小的玩家的策略.

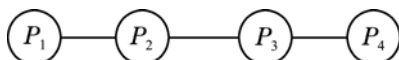


图 1 网络图

Fig. 1 Network graph

记  $t$  时刻  $P_1, P_2, P_3, P_4$  的策略分别为  $u(t), x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ , 则该网络演化博弈的动态方程为

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)), \\ x_2(t+1) = f_2(x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \\ x_3(t+1) = f_3(x_2(t), x_3(t)), \end{cases}$$

其中:  $f_i$  为合适维数的布尔函数 ( $i = 1, 2, 3$ ).

在本例中, 只观测玩家  $P_4$  在  $t$  时刻的策略  $x_3(t)$ , 因此该网络演化博弈的输出方程为  $y(t) = x_3(t)$ .

本文的目的是寻找分布式控制  $u(t) = k(x_1(t), x_2(t))$  使得该网络演化博弈的输出在某个时刻  $t$  之后全为“坦白”.

记  $i \sim \delta_2^i, i = 1, 2$ . 令  $x(t) = x_1(t) \times x_2(t) \times x_3(t)$ . 利用矩阵半张量积, 引理1和引理3, 该网络演化博弈的代数形式如下:

$$\begin{cases} x(t+1) = Qu(t)x(t), \\ y(t) = Hx(t). \end{cases}$$

其中:  $Q = \delta_8[1 \ 4 \ 8 \ 4 \ 7 \ 8 \ 8 \ 8 \ 5 \ 8 \ 8 \ 8 \ 5 \ 8 \ 8 \ 8], H = \delta_2[1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2]$ .

类似地, 分布式控制  $u(t) = k(x_1(t), x_2(t))$  的代数形式为  $u(t) = K_1 x_1(t) x_2(t)$ , 其中  $K_1$  为  $2 \times 4$  的逻辑矩阵, 共有16种选择. 由定理2, 经过简单计算可得, 存在  $K_1 = \delta_2[2 \ 1 \ 1 \ 1]$  或  $\delta_2[2 \ 1 \ 1 \ 2]$  或  $\delta_2[2 \ 2 \ 1 \ 1]$  或  $\delta_2[2 \ 2 \ 1 \ 2]$  使得该网络演化博弈的输出在  $\tau = 3$  之后全为“坦白”.

为了验证理论结果的正确性, 本文取初始值  $x(0) = \delta_8^1, K_1 = \delta_2[2 \ 1 \ 1 \ 1]$ , 得闭环系统的输出轨线如图2所示. 从仿真图可以看出, 闭环系统的输出在  $t = 3$  以后跟上参考信号  $\delta_2^2$ , 这与理论结果相符.

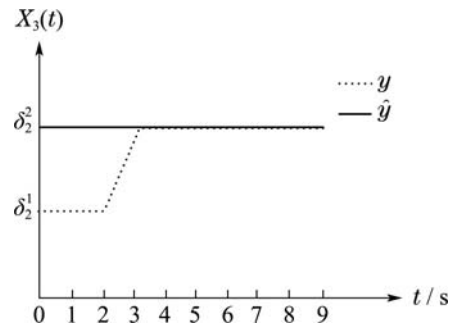


图 2 闭环系统的输出轨线

Fig. 2 Output trajectory of the closed-loop system

### 6 结论(Conclusion)

本文研究了多值逻辑控制网络的输出跟踪牵制控制和分布式输出跟踪控制. 基于矩阵的半张量积, 给出了带牵制控制的多值逻辑控制网络的代数表示. 基

于该代数表示,建立了多值逻辑控制网络输出跟踪牵制控制器的设计方法.利用多值逻辑哑算子的性质,给出了多值逻辑控制网络分布式输出跟踪控制问题可解的充要条件.仿真结果表明所得结果在多值逻辑控制网络的输出跟踪牵制控制和分布式输出跟踪控制设计方面是非常有效的.需要指出的是,本文提出的设计方法只能处理参考信号为常值的情形.对于时变参考信号,本文给出的研究方法无法处理,需要进一步研究.

## 参考文献(References):

- [1] KAUFFMAN S. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets [J]. *Journal of Theoretical Biology*, 1969, 22(3): 437 – 467.
- [2] LIU Z, WANG Y, LI H. A new approach to derivative calculation of multi-valued logical functions with application to fault detection of digital circuits [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2014, 8(8): 554 – 560.
- [3] CHENG D, HE F, QI H, et al. Modeling, analysis and control of networked evolutionary games [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(9): 2402 – 2415.
- [4] GUO P L, WANG Y Z, LI H T. Algebraic formulation and strategy optimization for a class of evolutionary network games via semi-tensor product method [J]. *Automatica*, 2013, 49(11): 3384 – 3389.
- [5] CHENG D Z, FENG J, LV H L. Solving fuzzy relational equations via semi-tensor product [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2012, 20(2): 390 – 396.
- [6] DUAN Peiyong, LV Hongli, FENG Jun'e, et al. Fuzzy relation matrix model control system for indoor thermal comfort [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(2): 215 – 221.  
(段培永, 吕红丽, 冯俊娥, 等. 室内热舒适环境的模糊关系矩阵模型控制系统 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(2): 215 – 221.)
- [7] GE Aidong, WANG Yuzhen, WEI Airong, et al. Control design for multi-variable fuzzy systems with application to parallel hybrid electric vehicles [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(8): 998 – 1004.  
(葛爱东, 王玉振, 魏爱荣, 等. 多变量模糊系统控制设计及其在并行混合动力汽车中的应用 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(8): 998 – 1004.)
- [8] WANG Y Z, ZHANG C H, LIU Z B. A matrix approach to graph maximum stable set and coloring problems with application to multi-agent systems [J]. *Automatica*, 2012, 48(7): 1227 – 1236.
- [9] XU X R, HONG Y G. Matrix expression and reachability analysis of finite automata [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2012, 10(2): 210 – 215.
- [10] XU X R, HONG Y G. Matrix approach to model matching of asynchronous sequential machines [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(11): 2974 – 2979.
- [11] CHENG D Z, QI H S, ZHAO Y. Analysis and control of general logical networks-An algebraic approach [J]. *Annual Reviews in Control*, 2012, 36(1): 11 – 25.
- [12] QI H S, CHENG D Z. Logic and logic-based control [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2008, 6(1): 123 – 133.
- [13] CHENG D Z, XU X R. Bi-decomposition of multi-valued logical functions and its applications [J]. *Automatica*, 2013, 49(7): 1979 – 1985.
- [14] CHENG Daizhan, ZHAO Yin, XU Xiangru. From Boolean algebra to Boolean calculus [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(10): 1513 – 1523.  
(程代展, 赵寅, 徐相如. 从布尔代数到布尔微积分 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(10): 1513 – 1523.)
- [15] ZHAO Y, LI Z Q, CHENG D Z. Optimal control of logical control networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(8): 1766 – 1776.
- [16] CHENG D Z, QI H S, LI Z Q. *Analysis and Control of Boolean Networks: A Semi-Tensor Product Approach* [M]. London: Springer, 2011.
- [17] CHENG D Z, QI H S, ZHAO Y. *An Introduction to Semi-Tensor Product of Matrices and Its Applications* [M]. Singapore: World Scientific, 2012.
- [18] CHENG D Z, QI H S. Controllability and observability of Boolean control networks [J]. *Automatica*, 2009, 45(7): 1659 – 1667.
- [19] LASCHOV D, MARGALOT M. Controllability of Boolean control networks via the Perron-Frobenius theory [J]. *Automatica*, 2012, 48(6): 1218 – 1223.
- [20] LI F F, SUN J T. Controllability of probabilistic Boolean control networks [J]. *Automatica*, 2011, 47(12): 2765 – 2771.
- [21] ZHAO Y, CHENG D Z, QI H S. Input-state incidence matrix of Boolean control networks and its applications [J]. *Systems & Control Letters*, 2010, 59(12): 767 – 774.
- [22] LI Zhiqiang, SONG Jinli. Controllability and observability of Boolean control networks [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(8): 998 – 1004.  
(李志强, 宋金利. 布尔控制网络的能控性与能观性 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(8): 998 – 1004.)
- [23] FORNASINI E, VALCHER M. On the periodic trajectories of Boolean control networks [J]. *Automatica*, 2013, 49(5): 1506 – 1509.
- [24] CHEN H, SUN J T. Global stability and stabilization of switched Boolean network with impulsive effects [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 224(4): 625 – 634.
- [25] LI R, YANG M, CHU T G. State feedback stabilization for Boolean control networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(7): 1853 – 1857.
- [26] YANG M, LI R, CHU T G. Controller design for disturbance decoupling of Boolean control networks [J]. *Automatica*, 2013, 49(1): 273 – 277.
- [27] FENG J E, YAO J, CUI P. Singular Boolean networks: Semi-tensor product approach [J]. *Science China Information Sciences*, 2013, 56(11): 1 – 14.
- [28] FRANCIS B A. The linear multivariable regulator problem [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1977, 15(3): 486 – 505.
- [29] HUANG J, CHEN Z. A general framework for tackling the output regulation problem [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(12): 2203 – 2218.
- [30] LI H, WANG Y, XIE L. Output tracking control of Boolean control networks via state feedback: constant reference signal case [J]. *Automatica*, 2015, 59: 54 – 59.
- [31] LU J, ZHONG J, HUANG C, et al. On pinning controllability of Boolean control networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(6): 1658 – 1663.
- [32] LI F. Pinning control design for the stabilization of Boolean networks [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2016, 27(7): 1585 – 1590.

## 作者简介:

宋平平 (1990–), 女, 硕士研究生, 目前研究方向为逻辑动态系统, E-mail: 934433250@qq.com;

李海涛 (1985–), 男, 副教授, 目前研究方向为逻辑动态系统、切换系统, E-mail: haitaoli09@gmail.com;

杨琪琪 (1992–), 女, 硕士研究生, 目前研究方向为逻辑动态系统, E-mail: 52933578@qq.com;

刘衍胜 (1966–), 男, 博士生导师, 教授, 目前研究方向为非线性泛函分析、分数阶系统理论, E-mail: yanshliu@gmail.com.