

# 采用预测控制的龙门架式冗余自由度机械臂轨迹规划算法

汪乃茜, 李德伟<sup>†</sup>, 席裕庚

(上海交通大学 自动化系, 系统控制与信息处理教育部重点实验室, 上海 200240)

**摘要:** 为解决近年来工业常用的复杂结构大型机械臂的运动控制问题, 本文以龙门架式机械臂为研究对象, 首先结合材料力学分析, 对在双臂荷载下的横梁挠度公式进行推导, 进而对机械臂系统建立精确的运动学模型. 为了便于后期算法设计, 又在此基础上进行了降阶、线性化等模型简化工作. 针对这一具有关节限位等约束条件和冗余自由度的多输入多输出高维复杂系统, 提出了一种基于预测控制的轨迹规划算法. 该算法根据模型中不同关节的运动范围以及定位精度等特性, 划定其不同的运动优先级, 通过在优化问题中对各个关节控制量设置不同的权重, 来解决冗余问题. 同时通过实时更新与滚动优化, 很好的保证了控制的及时性. 仿真结果表明了本文所推导的挠度公式的准确性和所提出算法的有效性, 不仅很好地解决了冗余问题, 而且充分利用不同关节的运动特性, 针对不同类型的跟踪目标值给出相适应的轨迹规划方案.

**关键词:** 机械臂; 冗余; 轨迹规划; 预测控制; 柔性横梁

中图分类号: TP24 文献标识码: A

## The trajectory planning of redundant manipulator with gantry by using model predictive control

WANG Nai-qian, LI De-wei<sup>†</sup>, XI Yu-geng

(Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University,

Key Laboratory of System Control and Information Processing, Ministry of Education of China, Shanghai 200240, China)

**Abstract:** To solve the motion control problem of large-scale complex manipulators which are commonly used in industry recently, this paper focuses on manipulator system composed of a gantry and small-sized manipulators. Firstly the calculation formula for beam deflection under two independent concentrated loads is deduced by analyzing material mechanics. Then an accurate kinematics model of manipulator system is presented. On this basis, the model is simplified to be linear and low-order, for following algorithm design. For the multi-input multi-output (MIMO) high dimensional redundant model with joint constraints, an algorithm based on model predictive control (MPC) is proposed for trajectory planning. All of the joints are classified into different movement priorities according to their motion range and positioning accuracy. The redundancy problem can be solved by setting different weights for control variable of each joint in optimization problem. Meanwhile, rolling optimization style of MPC scheme makes it possible to online continuously make trajectory planning with updated information. The simulation results illustrate effectiveness of the algorithm proposed in this paper. In addition, for various setting points, different weighting selections are considered by analyzing joints' motion characteristics.

**Key words:** manipulators; redundancy; trajectory planning; model predictive control; flexible beam

### 1 引言(Introduction)

传统的六自由度支座型仿人手臂机器人, 类似于一个操作工人站立在固定位置, 完成某项单一的车间流水线型任务. 近年来, 工业变革对产业模式的颠覆, 使得自动化生产的形式更加多样化, 对于工业机械臂的功能需求也更加丰富化、灵活化. 随着工业自动化

的普及与机器人产业水平的提高, 越来越多的制造行业开始采用大型龙门架式机械臂结构. 各类新型机械手臂应运而生. 其结构由传统的支座型向门架型转变, 以适应更广阔的操作空间, 完成诸如码垛、搬运、喷涂、切割、焊接、装配、清洁等任务<sup>[1]</sup>. 同时为了适应复杂的操作空间, 也会适当增加自由度以满足特殊轨

收稿日期: 2016-01-11; 录用日期: 2016-05-26.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: dwli@sjtu.edu.cn; Tel.: +86 13917551024.

本文责任编辑: 陈虹.

国家自然科学基金项目(61374110, 61521063, 61590924, 61573239), 国家高新技术研究发展计划(“863”计划)项目(2015AA043102), 上海市自然科学基金项目(15ZR1418600)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61374110, 61521063, 61590924, 61573239), National High-tech R&D Program (“863” Program) (2015AA043102) and Shanghai Natural Science Foundation (15ZR1418600).

迹、避免奇异位置、躲避障碍等灵活操作的需求. 在实际的工业应用中, 一方面希望增加机械臂的自由度以提高灵活性, 另一方面又不希望冗余度过多以增加控制难度. 因此, 大多数情况下, 只在之前的基础上增加一个关节自由度, 使用七自由度机械臂. 如日本安川VA1400弧焊7轴工业机械臂<sup>[2]</sup>、北京航空航天大学研究设计的BUAA-RR七自由度机械臂<sup>[3]</sup>等. 以此为例子, 也催生出许多关于冗余机械臂轨迹规划的控制算法研究. 由于冗余度较低, 一种基本的思路是将七自由度退化到六自由度来求运动学逆解<sup>[4]</sup>. 基于雅可比矩阵的梯度投影法<sup>[5]</sup>也是冗余机械臂逆运动学求解的经典方法, 较为直接的路径规划方法有C-空间法、人工势场法<sup>[6]</sup>. 此外也有采用位姿分解法与代数迭代法相结合的方式求运动学逆解<sup>[7]</sup>. 然而大多数的七自由度机械臂只是在灵活性和冗余度之间的折衷, 并不能很好地满足各类领域内的自动化需求. 在工业领域, 有别于传统的低自由度中型机器人, 在广阔操作空间内的门架式大型机械臂和用于准确抓取小件物体的灵巧手成为了近年来的研究热点, 如龙门架式焊接机械臂系统<sup>[8]</sup>、北京航空航天大学和国防科技大学研制的BH-1、BH-4型三指九自由度的灵巧手<sup>[9]</sup>等. 带有龙门架式的分段组合结构在提高操作能力的同时, 也不可避免地增加了关节自由度. 引入门架横梁也会在运动过程中产生形变, 加重关节间的耦合. 由此造成的弹性形变与模型冗余, 在提高灵活性的同时, 也提升了运动控制的难度. 要对这类机械臂系统进行控制, 关键在于如何在精确模型描述的基础上解决自由度冗余问题. 当机械臂的结构复杂时, 即使使用机构简化的方法, 也很难得到解析解. 可以通过增加约束条件的方法求得在给定末端位姿下的全部关节角<sup>[10]</sup>. 但由于增加的硬约束是强制将某几个关节联系起来, 因此此类方法成立的合理性依赖于机械臂的特定结构造型. 更为常用的方法是基于雅可比矩阵或者基于工作空间的数学迭代方法<sup>[11-13]</sup>. 而在实际工业生产过程中, 运动控制是一个完整、连续的过程, 一次性的轨迹规划很难应对在操作过程中遭遇的外界扰动或者机构本身的执行偏差. 之前提到的针对冗余自由度的诸多数学迭代方法, 虽然付出了庞大的计算量, 但仍然无法完全保证轨迹规划的有效性. 预测控制算法是一种产生于工业过程的算法. 它用有限时域的滚动优化代替一次性优化的做法, 可以借用到机器人的轨迹规划中. 但因滚动规划需要实时求解, 如何对轨迹规划问题高效求解, 便成为一个关键的问题. 本文首先结合材料力学知识, 描述系统不同状态下的横梁挠度, 以完成对复杂机械臂系统的建模工作. 在分析了九自由度机械臂结构的基础上, 归纳了其各个关节不同的运动特性. 由于对冗余机械臂进行轨迹规划的主要难点来源于运动学逆解. 因此本文提出一种基于预测控

制的算法方案, 借助预测控制中的滚动优化思想, 将定点跟踪与系统镇定的控制要求写作优化目标, 将关节限位及电机速度等纳入约束条件, 直接通过优化问题的求解获得各时刻的关节姿态, 避免了运动学逆解过程中的多解和不确定性. 既能解决自由度冗余问题, 也能保证规划的实时性和控制的有效性.

## 2 龙门架式机械臂结构介绍(Structure of gantry manipulator)

龙门架式结构是把标准的六自由度工业机械臂固定在龙门架的操作臂上. 龙门架负责机械臂在前后、左右、上下3个方向的大范围移动, 工业机械臂负责针对工件的具体工作. 在系统中, 龙门架与小机械臂实现协调运动形成一个九轴以上的复杂机械臂系统. 此类结构的优势是能对多种位置、多种尺寸的工件进行操作, 并且保证机械臂能从大型工件上方的任意方向完成相应工作. 一般工业生产中使用时, 会在操作车间内铺设两条平行导轨, 龙门架可沿导轨前后移动, 横梁上有分别沿水平方向和竖直方向移动的滑动关节, 为独立的平动关节. 在竖直关节末端连接小型工业机械臂, 进行较为精准的操作. 通用的龙门架机械臂关节结构如图1所示.



图1 龙门架式双臂系统示意图

Fig. 1 The structure of manipulator system with gantry

在龙门架式机械臂系统中, 双臂之间只通过门架互相关联, 其余自由度彼此独立, 因此可以分别进行规划. 本文后续具体的控制算法设计将以其中的单臂结构为例, 在竖直关节末端连接六自由度的旋转关节机械臂, 形成九自由度龙门架式带有柔性横梁的机械臂系统, 如图2所示, 以此为研究对象进行轨迹规划.

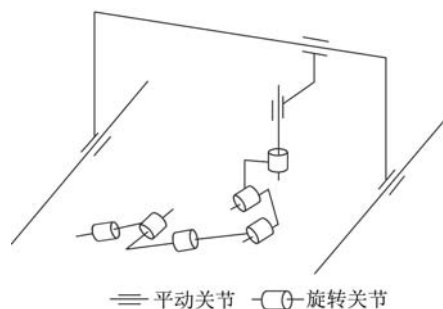


图2 九自由度机械臂关节示意图

Fig. 2 The structure of 9-DOF manipulator system

### 3 九自由度机械臂建模(Model establishment of 9-DOF manipulator)

#### 3.1 横梁挠度推导(Calculation formula for the deflection of beam)

在此类结构的系统中, 由于门架跨度大, 横梁较长; 且下方多关节机械臂的质量较大, 会导致其在横梁上引起一定程度的形变. 即位于横梁上的悬臂的水平位置变化, 会引起横梁竖直方向不同程度的柔性形变, 进而影响该机械臂在竖直方向的位置. 出于机械臂末端定位的精度考虑, 横梁弹性形变的影响不可忽略. 因此, 各横梁上的平动关节状态量并不完全独立, 需要先明确其相互作用的影响.

如图3所示, 单一集中载荷情况下力作用点处简支梁的挠度<sup>[14]</sup>(垂直于梁轴线方向的线位移)计算公式如下:

$$\omega_0 = \frac{Pab}{6EIL}(a^2 + b^2 - L^2), \quad (1)$$

其中: 常量参数 $E$ 为杨氏模量,  $I$ 为弯矩变量, 变量参数 $P$ 为载荷力,  $L$ 表示横梁长度,  $a, b$ 分别为载荷力作用点离开横梁左右两端的距离;  $\omega_0$ 即为载荷力作用点处的挠度.

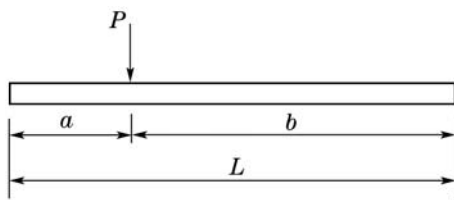


图 3 单一集中载荷作用于简支梁

Fig. 3 Simply supported beam under single concentrated load

结合式(1), 运用叠加原理可进一步推导出上述龙门架模型中两个集中载荷 $P_1$ 和 $P_2$ 存在时(如图4所示)简支梁在两个力作用点处的挠度可分别表达为

$$\omega_A = -\frac{P_1 a(L-a)(a^2 - L^2 + (L-a)^2)}{6EIL} -$$

$$\frac{P_2 a(L-b)(a^2 - L^2 + (L-b)^2)}{6EIL}, \quad (2)$$

$$\omega_B = -\frac{P_2 a(L-b)(a^2 - L^2 + (L-b)^2)}{6EIL} -$$

$$\frac{P_1 b(L-b)(b^2 - L^2 + (L-b)^2)}{6EIL}. \quad (3)$$

通过将模型写入专业有限元分析软件Ansys中进行仿真, 可以验证挠度表达式(2)–(3)的正确性.

以某横梁材料合金钢为例, 其弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$ ; 横梁长 $L = 10 \text{ m}$ ; 方形截面宽 $b = 0.2 \text{ m}$ , 弯矩变量 $I = b^4/12$ ; 截面悬挂机械臂质量 $P_1 = P_2 = 400 \text{ kg}$ . 仿真结果如图5所示, 横梁挠曲线显示的挠度最大值位于载荷作用点处, 表1中将仿真结果与理论

计算数据相比较, 相对误差均小于4%, 在可接受范围内.

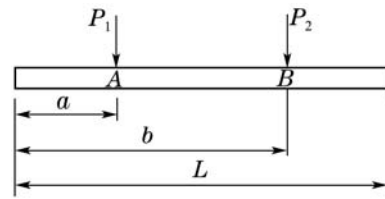
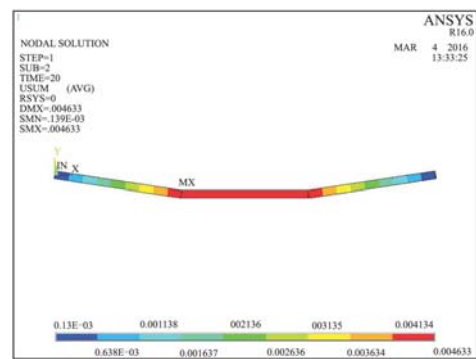
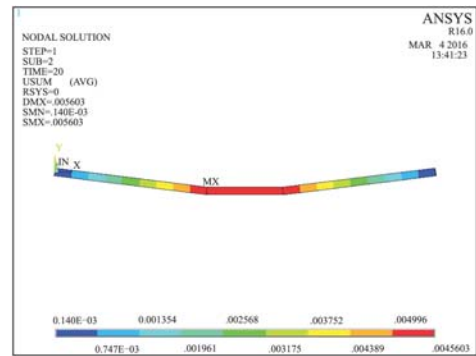


图 4 两个独立集中载荷作用于简支梁

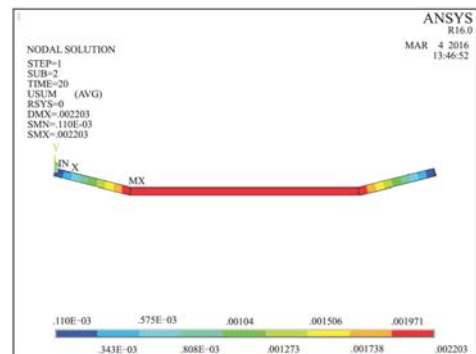
Fig. 4 Simply supported beam under two independent concentrated loads



(a)  $a = 3.3, b = 3.3$ 时横梁挠曲线



(b)  $a = 4, b = 6$ 时横梁挠曲线



(c)  $a = 2, b = 8$ 时横梁挠曲线

图 5 Ansys仿真验证横梁挠度表达式

Fig. 5 Ansys simulation results of beam deflection

表1 横梁挠度理论计算值与仿真结果比较

Table 1 Comparison of beam deflections of simulation results and theoretical values

节点位置	理论值	仿真结果	误差
$a=3.3, b=3.3$	$\omega_{A,B}=0.0046$	$\omega_{A,B}=0.0046$	$< 0.0001$
$a=4, b=6$	$\omega_{A,B}=0.0056$	$\omega_{A,B}=0.0054$	$0.0002$
$a=2, b=8$	$\omega_{A,B}=0.0022$	$\omega_{A,B}=0.0022$	$< 0.0001$

### 3.2 运动学模型(Kinematics model)

考虑到在机械臂的实际操作中,无论是定点定位,还是路径跟踪,目标设定值都是针对其末端执行器给出的,而运动控制的执行机构则是各个关节的电机.为了将二者联系起来,笔者借助雅克比矩阵把关节速度转换为末端执行器在操作空间的广义速度.首先为机械臂各个关节建立固连坐标系,这样作者就得到了包括基坐标系在内的10个坐标系,再进一步根据各关节、连杆结构,建立Denavit-Hartenberg(DH)模型.为了便于后期在平台进行仿真,作者采用改进的DH模型<sup>[15]</sup>代替标准的DH模型,对于本文所研究的龙门架式九自由度机械臂系统,其改进DH模型的参数如表2所示.

表2 九自由度机械臂模型改进DH参数

Table 2 Modified D-H parameter of 9-DOF manipulator

Joint	$\alpha_i/(^\circ)$	$\alpha_i/m$	$\theta_i/(^\circ)$	$d_i/m$
1	90	0	90	$d_1$
2	90	$L_1$	90	$d_2$
3	90	0	90	$d_3$
4	0	0	$\theta_4$	0
5	90	$L_6$	$\theta_5$	0
6	0	$L_2$	$\theta_6$	0
7	90	$L_5$	$\theta_7$	$L_4$
8	-90	0	$\theta_8$	0
9	90	$L_5$	$\theta_9$	$L_5$

表2中: $d_1, d_2, d_3$ 为平动关节的关节变量. $\theta_4, \dots, \theta_9$ 为旋转关节变量. $L_1$ 为龙门架高度, $L_2, \dots, L_6$ 均为机械臂关节连杆参数.特别需要注意的是,第3个自由度的关节变量是关节自身位移与横梁挠度的矢量和,即 $d'_3 = d_3 + \omega_0$ .将式(1)的挠度公式整理,可得第3个自由度的关节变量表达式如下:

$$d'_3 = d_2 - \frac{Pd_2^2(L - d_2)^2}{3EIL}. \quad (4)$$

将以上参数代入式(5),即Denavit-Hartenberg模型的连杆坐标变换阵的标准格式<sup>[15]</sup>得到每两个相邻坐标系之间的变换矩阵;再依次右乘,就可以得到机械臂系统末端工具坐标系相对于基坐标系的变换矩阵,完成了对该机械臂系统的正运动学推导.

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i \cos \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \cos \alpha_{i-1} \\ \sin \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \sin \alpha_{i-1} \\ 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{i-1} \\ -\sin \alpha_{i-1} & -d_i \sin \alpha_{i-1} \\ \cos \alpha_{i-1} & d_i \cos \alpha_{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, i = 1, \dots, 9. \quad (5)$$

由于本文所研究的九自由度机械臂系统,前3个为平动关节,后6个为旋转关节,因此其雅克比矩阵有如下形式:

$$J_0(q) = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4(p_9 - p_4) & \dots & z_9(p_9 - p_9) \\ 0 & 0 & 0 & z_4 & \dots & z_9 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

其中: $z_i$ 为第*i*个关节固连坐标系的*z*轴单位向量, $p_i$ 为从基坐标系原点指向该坐标系原点的向量, $i = 1, \dots, 9$ .其带有雅克比矩阵的微分运动学方程具有如下形式:

$$\dot{X} = J_0(q)\dot{q}', \quad (7)$$

其中:

$$\dot{X} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \dot{\delta}_x \ \dot{\delta}_y \ \dot{\delta}_z]^T,$$

$$\dot{q}' = [\dot{d}_1 \ \dot{d}_2 \ \dot{d}_3 \ \dot{\theta}_4 \ \dot{\theta}_5 \ \dot{\theta}_6 \ \dot{\theta}_7 \ \dot{\theta}_8 \ \dot{\theta}_9]^T,$$

$q$ 为各关节变量,具体而言, $d$ 为平动关节位移, $\theta$ 为旋转关节角度.

### 3.3 模型线性化(Model linearization)

由于横梁上两个平动自由度的关节之间存在相互影响,在模型方程中, $\dot{q}'$ 中表示第3个关节速度的 $\dot{d}'_3$ 项体现了这样的耦合关系.结合式(4),可将其展开为关于 $\dot{d}_2$ 和 $\dot{d}_3$ 两个关节微分运动的表达式:

$$\dot{d}'_3 = \dot{d}_3 - \frac{2Pd_2(d_2^2 - 3d_2L + L^2)}{3EIL}\dot{d}_2. \quad (8)$$

将其中的常量参数, $E, I, L$ 以及已知变量 $P$ 的数值代入,并对控制变量 $d_2$ 的值进行实时更新,则可将其简化为如下的线性形式:

$$\dot{d}'_3 = \dot{d}_3 + m_2\dot{d}_2, \quad (9)$$

其中参数 $m_2$ 在每个采样时刻进行更新.由此,模型方程(7)可以重新整理成标准格式:

$$\dot{X} = J(q)\dot{q}, \quad (10)$$

其中:

$$J(q) = J_0(q) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \\ & m_2 & 1 \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \dot{X} &= [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \dot{\delta}_x \ \dot{\delta}_y \ \dot{\delta}_z]^T, \\ \dot{q} &= [\dot{d}_1 \ \dot{d}_2 \ \dot{d}_3 \ \dot{\theta}_4 \ \dot{\theta}_5 \ \dot{\theta}_6 \ \dot{\theta}_7 \ \dot{\theta}_8 \ \dot{\theta}_9]^T. \end{aligned}$$

#### 4 轨迹规划算法设计 (Design of trajectory planning scheme)

在机械臂的控制过程中, 笔者采用如图6所示的控制系统. 轨迹规划控制器根据所设定的六维末端位置和姿态坐标, 规划9个关节的运动轨迹, 将其作为目标值, 传递给跟踪控制器; 由跟踪控制器根据机械臂的结构动力学, 计算出相应的控制力矩, 作用于机械臂的各个关节.

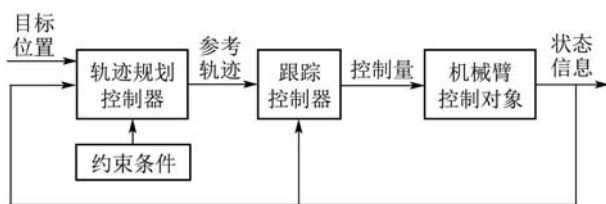


图6 冗余机械臂控制结构框图

Fig. 6 Control system for redundant manipulator

本文主要研究轨迹规划控制器部分, 对于多输入多输出的机械臂系统, 控制器需要根据给定的6维的末端位姿坐标, 求解9个关节的运动状态, 因此存在自由度冗余问题. 此外, 从轨迹规划的角度出发, 本文所提出的算法方案的一个重要控制目标, 就是防止机械臂在移动过程中由于电机运转特性以及关节不协调等因素引起的末端执行器的抖动. 诸如关节最大运行速度以及末端平滑运动等要求, 都属于不可忽略的约束条件, 需要在规划和控制过程中充分考虑其影响. 同时, 为了应对工业操作过程中的不确定性, 应当采用实时控制的方式, 将系统输出量以及当前关节变量同步反馈至控制器, 便于根据当前信息调整控制量. 基于以上对于复杂系统、约束处理、实时控制的需求, 笔者选取预测控制算法, 对系统建立状态空间模型, 可将电机特性、防抖要求等写入预测控制优化问题的约束条件或性能指标, 并且每隔一个采样周期, 根据系统的实时反馈, 重新更新模型变量, 来完成误差校正及控制量的实时计算工作. 在整体规划求解过程中, 机械臂自由度的冗余是一个不可忽略的难题. 结合预测控制的算法结构, 笔者提出求解优化问题时, 通过对模型的各个关节变量赋以不同的权值, 来划分运动优先级, 进而解决冗余问题.

##### 4.1 控制模型(Control model)

在上一章推导出的机械臂运动学模型的基础上, 笔者对该机械臂系统建立状态空间模型. 整体控制方案的基本思路是通过调整各个关节变量, 进而控制末端执行器的位姿状态. 因此, 笔者选取9个关节的运动状态作为控制的输入量, 具体表示为前3个关节的平

移速度, 以及后6个关节的旋转速度

$$u = [u_1 \cdots u_9]^T = [\dot{d}_1 \ \dot{d}_2 \ \dot{d}_3 \ \dot{\theta}_4 \ \dot{\theta}_5 \ \dot{\theta}_6 \ \dot{\theta}_7 \ \dot{\theta}_8 \ \dot{\theta}_9]^T. \quad (11)$$

选取机械臂末端的位置坐标和角度坐标作为状态量,

$$X = [x \ y \ z \ \delta_x \ \delta_y \ \delta_z]^T. \quad (12)$$

式(10)可作为系统模型状态方程的初始形式. 为了便于预测控制推导计算, 需要将其转化为离散形式, 通过一阶泰勒展开, 离散化后的状态空间方程如式(13)所示:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ix(k) + T \cdot J(q)\dot{q} = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = \begin{bmatrix} I \\ O \end{bmatrix} x(k) = Cx(k). \end{cases} \quad (13)$$

即系统在第 $k$ 个时刻的预测模型. 由式(9)可知系统模型中的系数矩阵 $B$ 需要在每个采样时刻进行更新, 这也体现了模型的时变特性. 而笔者在每一步由当前时刻对未来时刻进行模型预测时, 不妨以该时刻的系统模型表达式代替整个预测时域内的模型状态. 当前时刻只施加第一步控制作用于下一时刻及时进行模型更新的策略, 也减小了简化计算带来的控制误差.

为了消除静态误差, 可以采用增量控制方式, 将控制变量表示为前一时刻的控制量与当前时刻控制变化量之和的形式. 根据式(13), 写出系统增量控制的预测模型如下:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k), \\ u(k) = u(k-1) + \Delta u(k), \\ x(0) = x_s, \ u(-1) = v_{old}, \end{cases} \quad (14)$$

其中:  $k = 0, \dots, N-1$ ,  $x_s$ 和 $v_{old}$ 分别为当前时刻系统状态和上一时刻的控制作用. 由式(14)中的第3个表达式可以看出, 模型对每一时刻的控制增量进行叠加, 等同于积分效果, 可以保证系统对阶跃响应没有静态误差.

##### 4.2 约束条件(Constraints)

考虑到实际操作的机械臂系统存在关节限位以及电机运行速度的限制, 因此在设计优化问题时, 应当增加对控制量的约束以及对关节变量的约束. 以向量 $U$ 和矩阵 $Q$ 来分别表示在施加控制作用的时域内全部9个自由度的控制量和关节变量. 则约束条件可表示为

$$V_{\min} \leq U \leq V_{\max}, \quad (15)$$

$$Q_{\min} \leq Q \leq Q_{\max}. \quad (16)$$

由于优化问题是以控制量的增量为优化变量, 为了后续求解的统一, 本文需要将以上约束转换为关于控制增量 $\Delta u$ 的形式<sup>[16]</sup>. 则关节速度的约束表达式为

$$\tilde{V}_{\min} \leq H_1 \Delta U \leq \tilde{V}_{\max}, \quad (17)$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} I_9 & & \\ & \ddots & \\ I_9 & \cdots & I_9 \end{bmatrix}_{9M \times 9},$$

$$\tilde{V}_{\min} = \begin{bmatrix} v_{\min} - v_{\text{old}} \\ \vdots \\ v_{\min} - v_{\text{old}} \end{bmatrix}_{9M \times 9}, \quad \tilde{V}_{\max} = \begin{bmatrix} v_{\max} - v_{\text{old}} \\ \vdots \\ v_{\max} - v_{\text{old}} \end{bmatrix}_{9M \times 9},$$

其中:  $v_{\max}$ 和 $v_{\min}$ 为 $9 \times 1$ 的向量,分别表示9个关节移动速度的上下界; $v_{\text{old}}$ 也是同样维数的向量,表示上一采样点,即 $k-1$ 时刻时,每个关节的移动速度.

同理,关节变量的约束表达式为

$$\tilde{Q}_{\min} \leq H_2 \Delta U \leq \tilde{Q}_{\max}, \quad (18)$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} I_9 & & \\ & \ddots & \\ I_9 & \cdots & I_9 \end{bmatrix}_{9M \times 9},$$

$$\tilde{Q}_{\min} = \frac{1}{T} \begin{bmatrix} q_{\min} - q_0 - T v_{\text{old}} \\ \vdots \\ q_{\min} - q_0 - T v_{\text{old}} \end{bmatrix}_{9M \times 9},$$

$$\tilde{Q}_{\max} = \frac{1}{T} \begin{bmatrix} q_{\max} - q_0 - T v_{\text{old}} \\ \vdots \\ q_{\max} - q_0 - T v_{\text{old}} \end{bmatrix}_{9M \times 9},$$

其中:  $q_{\max}$ 和 $q_{\min}$ 为 $9 \times 1$ 的向量,分别表示9个关节移动范围的上、下界。 $q_0$ 也具有同样的形式,表示上一采样点,即 $k-1$ 时刻时,每个关节变量值.

将以上两类约束归结为如下的不等式条件:

$$H \Delta U \leq L, \quad (19)$$

其中:

$$H = [-H_1^T \quad H_1^T \quad -H_2^T \quad H_2^T]^T,$$

$$L = [-\tilde{V}_{\min}^T \quad \tilde{V}_{\max}^T \quad -\tilde{Q}_{\min}^T \quad \tilde{Q}_{\max}^T]^T.$$

### 4.3 优化目标(Optimization problem)

在确定了约束条件和各关节运动的优先级后,可以进入预测控制的第2个步骤,实施滚动优化.首先设置每一次优化求解的限定时域 $N$ ,即预测时域;以及施加控制量的时域 $M$ ,即控制时域( $M \leq N$ ).之后将式(14)中的预测模型展开,写出其在个时刻的控制作用下,从 $k+1$ 时刻至 $k+N$ 时刻的模型表达式.优化问题的第一部分就是使其未来 $N$ 个时刻的输出尽可能接近设定值.在机械臂的关节空间进行轨迹规划时,自由度冗余所带来的最直观的困难就是多解问题,如果不进行筛选,则可能出现虽然末端平滑移动,但关节量剧烈跳变的情况.为了避免以上情况,同时镇定控制系统,保证关节连续平滑的移动,可将第2项优化

指标设定为控制量增量的范数.即相邻两个采样时刻之间,每一个输入对应的控制量的变化幅度不要过大.综上,预测控制滚动求解的优化问题如式(20)所示:

$$J = \min \|Y_{\text{pre}} - Y_d\|_{Q_p} + \|\Delta U\|_{R_p}, \quad (20)$$

其中:  $Y_{\text{pre}}$ 为第1个采样时刻到第 $N$ 个时刻的系统预测输出,  $Y_d$ 为对应时刻的目标设定值.跟踪权矩阵 $Q_p$ 和控制权矩阵 $R_p$ 均为对角矩阵,其系数参数的大小分别表示对输出跟踪设定值的强调程度和对控制量的抑制程度.由式(14)的系统模型展开,可推导出以下表达式<sup>[17-18]</sup>:

$$Y_{\text{pre}} = S X s + G_1 U_{\text{old}} + G_2 \tilde{L} \Delta U, \quad (21)$$

其中:

$$X s = \begin{bmatrix} x_s \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix}, \quad \tilde{L} = \begin{bmatrix} I_9 & & \\ & \ddots & \\ I_9 & \cdots & I_9 \\ & \ddots & \\ I_9 & \cdots & I_9 \end{bmatrix},$$

$$Y_{\text{pre}} = \begin{bmatrix} Y_{\text{pre}}(1) \\ \vdots \\ Y_{\text{pre}}(N) \end{bmatrix}, \quad U_{\text{old}} = \begin{bmatrix} v_{\text{old}} \\ \vdots \\ v_{\text{old}} \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} CA \\ \vdots \\ CA^N \end{bmatrix}, \quad G_1 = \begin{bmatrix} CB & & \\ CAB & CB & \\ \vdots & & \ddots \\ CA^{N-1}B & \cdots & CB \end{bmatrix},$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ CB & & \\ CAB & CB & \\ \vdots & & \ddots \\ CA^{N-2}B & \cdots & CB & 0 \end{bmatrix},$$

则整体优化问题有如下表达:

$$\begin{aligned} \min J &= \min \|Y_{\text{pre}} - Y_d\|_{Q_p} + \|\Delta U\|_{R_p}, \\ \text{s.t. } Y_{\text{pre}} &= S X s + G_1 U_{\text{old}} + G_2 \tilde{L} \Delta U, \\ H \Delta U &\leq L. \end{aligned} \quad (22)$$

这是一个具有二次性能指标,且含有线性等式和不等式约束的优化问题,通常称为二次规划问题.

### 4.4 参数设置(Parameters)

优化问题(22)是一个最小化问题,控制权矩阵 $R_p$ 中每一项的系数,表示对跟踪误差和控制量变化的抑制程度.权矩阵具有对角线形式,即对于每一个控制量变化的抑制程度可以分别被定义.笔者将根据不同关节运动的优先级来设置控制权矩阵 $R_p$ 的参数,以此合理地解决关节冗余问题.根据机械臂系统中不同关节的移动范围与运动精度,可将其划分为3个层次.首

先是末端的六自由度旋转关节, 运动速度快, 定位精度高, 并且6个自由度恰好不产生冗余; 因此将其运动优先级调至最高, 即控制权矩阵中对应的系数值最小. 其次是横梁上的水平和竖直移动关节, 运动范围接近整个横梁长度以及龙门架高度, 范围较大, 精度较高, 因此将其定为第2优先级, 即控制权矩阵中对应的系数值与旋转关节相比略大一些. 再次是龙门架关节, 其前后移动范围覆盖整个操作空间宽度, 运动范围大, 且受其自身结构与重量的限制, 运动精度较低, 因此笔者将其运动优先级调至最低, 即与前两组相比, 其控制权矩阵中对应的系数值最大. 由此笔者完成了对运动优先级的划分, 将9自由度等效为6 + 2 + 1自由度, 并且每个组别中均不超过6个自由度, 合理地解决了冗余问题.

#### 4.5 优化求解及反馈校正(Optimizing method and feedback correction)

对于优化问题(22), 可选取标准二次规划(QP)算法求解, 得出每一时刻的控制量, 即关节运动速度; 再积分得到其各个时刻的关节变量; 便可作为各关节的控制目标由跟踪控制器实施控制, 这样, 就完成了在设定目标位置情况下对关节运动轨迹的规划. 求解(22)所得到的关节运动速度, 还需通过预测模型, 即机器人正运动学方程(10), 计算得出下一时刻对应的末端执行器的位姿, 该模型预测值与下一时刻实测的位姿比较得到预测误差, 可用于反馈校正, 以克服模型误差或不确定性的影响.

### 5 仿真实验(Simulation)

选取实际的机械臂模型对上述算法进行仿真. 控制系统可以按照如下流程设计: 预测控制器接收对末端位姿的设定值输入, 根据系统实时反馈的机械臂关节状态, 调整预测控制模型, 求解相应的优化问题, 计算得出轨迹序列点与控制量, 传递给系统执行机构, 进而控制被控对象的移动. 并将各关节变量实时反馈到预测控制器, 以进行模型更新和误差校正. 带动机械臂关节运动的执行器选取工业常用的两相混合式步进电机<sup>[19]</sup>, 最高转速可达到500 r/min<sup>[20]</sup>, 即为控制变量数值上界.

**例1** 一般情况一大范围内大、小臂同时运动.

为了模拟机械臂在工作中从任意位置起, 跟踪设定值目标的情况, 不失一般性, 笔者选取关节变量的初始值

$$q_0 = [-1 \ 2 \ 0 \ 0 \ \frac{\pi}{2} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

其中旋转关节均为归零状态, 只有第2个轴的关节变量为90°, 使得其后各关节与地面平行, 末端指向水平

方向, 是机械臂在不执行操作任务时的一般状态. 参考式(10)所推导出的九自由度机械臂系统的雅可比矩阵, 通过正运动学求解可以得到机械臂末端执行器的初始位姿,

$$X_0 = [2 \ 2.38 \ 5 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

暂不考虑姿态旋转, 将

$$y_{d1} = [4 \ 1 \ 6 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

设定为末端目标位置. 选取预测时域 $N = 10$ , 控制时域 $M = 1$ . 在优化问题中, 对系统跟踪部分进行终端加权, 即跟踪权矩阵 $Q_p$ 的最后一项取值200, 其它项取值10. 参考第4.4节内容, 为体现机械臂个自由度不同的运动优先级, 将控制权矩阵 $R_p$ 中门架对应的权值设为100, 水平关节对应的权值为10, 旋转关节对应的权值为1. 9个自由度所对应的速度约束上、下界为<sup>[20]</sup>

$$v_{\max} = [0.6 \ 0.6 \ 0.6 \ \pi \ \pi \ \pi \ \pi \ \pi \ \pi]^T, \quad (23)$$

$$v_{\min} = -v_{\max}.$$

关节变量约束上、下界为<sup>[15]</sup>

$$q_{\max} = [9 \ 5 \ 5 \ 2.62 \ 1.22 \ 1.05 \ 3.14 \ 2.18 \ 6.28]^T,$$

$$q_{\min} = -[0 \ 0 \ 0 \ 2.62 \ 0.78 \ 1.22 \ 3.14 \ 2.18 \ 6.28]^T. \quad (24)$$

仿真结果如图7所示.

图7中: 子图(a)表示机械臂末端执行器的空间坐标值, (b)表示旋转关节的运动速度, (c)则是对应的旋转关节的旋转角度, (d)表示平动关节的移动速度, (e)是相应的平动关节的位移量. 由图7可以看出, 上述算法可以完成轨迹规划任务, 据此施加控制作用也能够满足相应的跟踪要求. 在关节末端位置坐标发生变化时, 子图(c)和(e)中的两组关节变量也发生了相应的变化. 在机械臂末端跟踪上设定值之后, 子图(b)和(d)所表示的关节运动速度曲线归零, 机械臂停止运动, 系统达到稳定. 此外, 从图7的子图(d)所表示的平动关节运动速度曲线中, 可以看出它们均受到了电机最大运动速度的约束限制.

**例2** 采用优先级加权后小范围内小臂为主运动.

分析上述仿真的起始状态与目标位置可知, 机械臂在跟踪运动期间, 末端执行器位置发生了较大幅度的改变, 因此需要各组关节共同作用. 为了进一步体现不同关节运动优先级的差异, 接下来更改目标设定值的条件, 缩小起点与终点之间的差距, 令

$$y_{d2} = [2 \ 1.8 \ 4.5 \ 0 \ 0 \ 0]^T. \quad (25)$$

初始条件与其它参数设置不变, 仿真结果如图8所示.

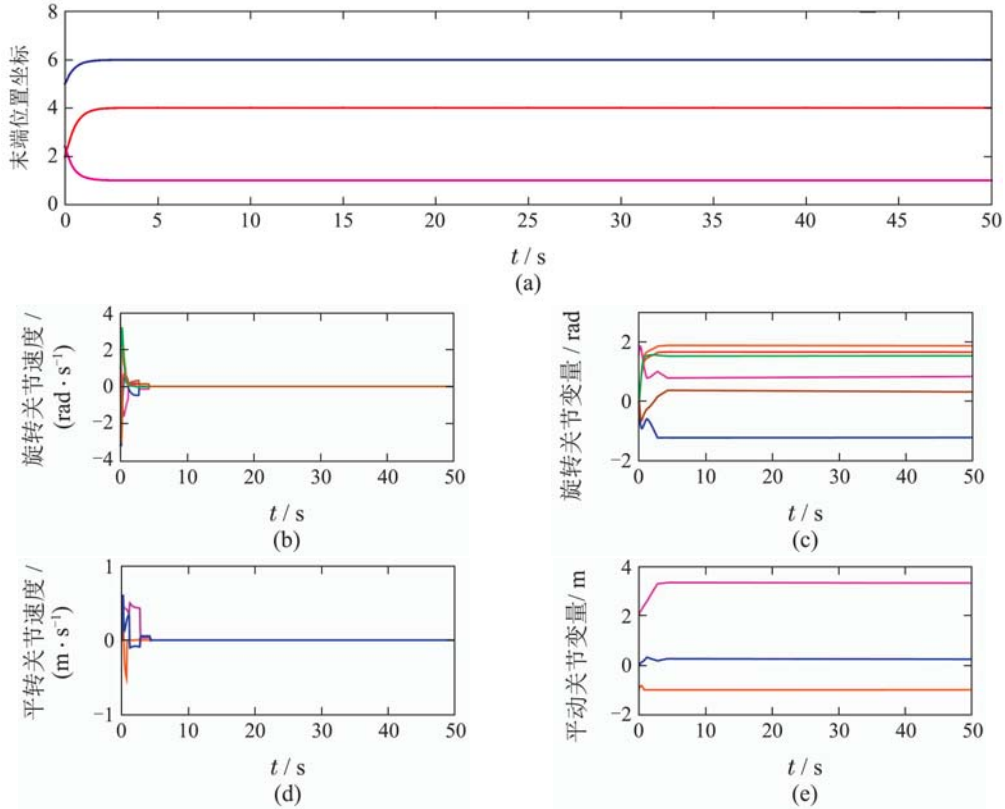


图7 末端大幅移动时关节运动曲线

Fig. 7 Motion curves of end-effector's wide range moving

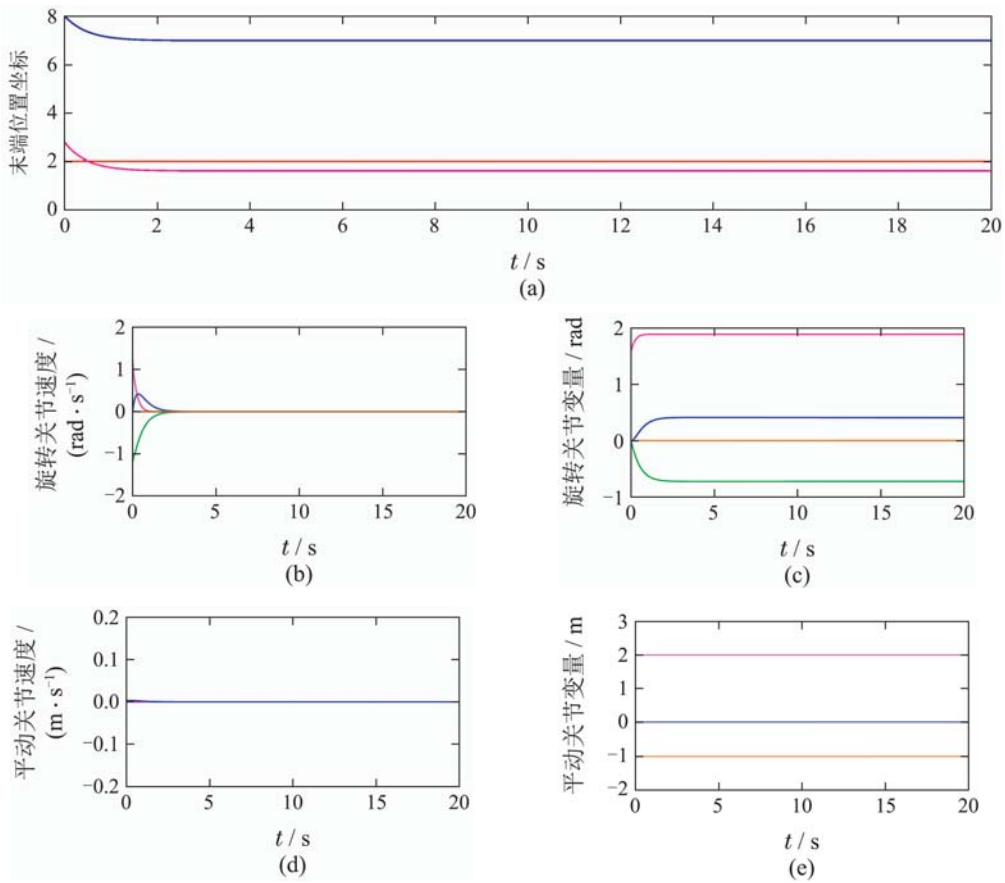


图8 末端小幅移动时关节运动曲线

Fig. 8 Motion curves of end-effector's small range moving



比较图8与图7(a), 可以看出, 由于位移较小, 因此后者在较短时间内快速到达目标位置. 子图(c)中的旋转关节角度有所变化, 而子图(d)所表示的平动关节的速度曲线始终为零, 子图(e)中的平动关节的关节变量也没有改变. 即在末端运动范围较小时, 运动精度较低的门架与横梁上的水平、竖直关节无需发生移动, 体现了不同运动优先级的差异, 从而排除了冗余的干扰, 合理地完成了轨迹规划任务.

**例 3** 未采用优先级加权时小范围内仍需大、

小臂同时运动.

相反, 如果不在优化问题中对不同关节的控制量权重进行区分, 不妨将其均设为10, 则会出现图9所示情况. 分别比较图8与图9的子图(b)(c)(d)(e) 所表示的关节运动曲线, 可以看出, 即使初始条件和目标位置与之前相同, 后一种情况的平动关节仍然会发生位移, 且旋转关节的关节变量发散, 且受限平动关节较低的运动精度, 系统始终震荡, 不能达到稳定.

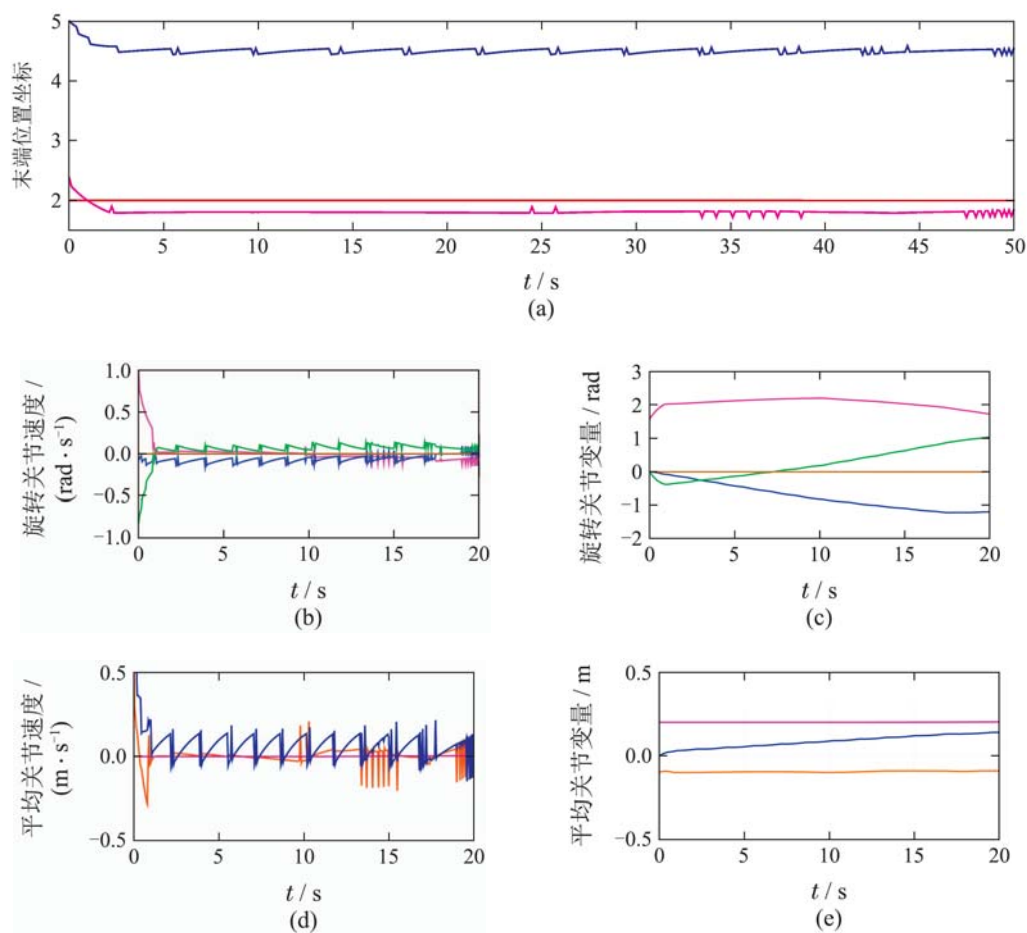


图 9 不区分优先级情况下的关节运动曲线

Fig. 9 Motion curves with same movement priority

## 6 结论(Conclusions)

本文以龙门架式机械臂为研究对象, 通过推导双载荷力作用下梁挠度公式, 得到门架横梁在双臂作用于不同位置时产生的形变, 明确了横梁上水平与竖直运动关节之间的影响. 在对系统精确建模的基础上, 针对九自由度模型的冗余问题, 提出了一种基于预测控制的轨迹规划算法, 在保证控制及时性的同时, 借助预测控制中优化问题的设计, 以及控制量权值的分配, 来避免运动学逆解时由冗余问题带来的多解等问题. 又进一步选取实际的机械臂

系统, 以此为例进行横梁挠度仿真; 并对其建立DH模型, 进行正运动学分析, 最后在MATLAB平台上通过仿真验证算法的有效性. 由仿真结果可以看出, 本文所提出的算法, 不仅排除了冗余的干扰, 而且充分利用不同关节的运动特性, 针对不同类型的跟踪目标值给出合理的轨迹规划方案.

## 参考文献(References):

- [1] SICILIANO B, SCIAVICCO L, VILLANI L, et al. *Robotics: Modeling, Planning and Control* [M]. 1st ed. London: Springer, 2009.

- [2] ZHU W H. *The control system design of 7-dof welding robot* [D]. Anhui: Anhui University of Technology, 2012.
- [3] QIAN Xikang. Structure design for 7-DOF BUAA-RR manipulator [J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics*, 1998(3): 106 – 109. (钱锡康. BUAA-RR七自由度机器人机械结构设计 [J]. 北京航空航天大学学报, 1998(3): 106 – 109.)
- [4] SHI Kaifei, LI Ruifeng. Kinematics of service robot bionics arm [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2003, 35(7): 806 – 808. (时凯飞, 李瑞峰. 7自由度仿人手臂运动学研究 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2003, 35(7): 806 – 808.)
- [5] LIEGEOIS A. Automation supervisory control of configuration and behavior of multibody mechanisms [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1977, 7(12): 868 – 871.
- [6] YANG B. *Research on motion control of a 7-DOF manipulator* [D]. Hangzhou: China Jiliang University, 2012.
- [7] HUANG Liangsong, JIANG Rukang, JIANG Xuemei. Research on inverse kinematics for 7-dof dual arm hot line operate robot [J]. *Techniques of Automation and Application*. 2013, 32(4): 18 – 21. (黄梁松, 姜如康, 姜雪梅. 七自由度带电作业机器人逆运动学求解方法研究 [J]. 自动化技术与应用, 2013, 32(4): 18 – 21.)
- [8] CHEN W, KONG L C, ZHANG Z H, et al. Design of gantry system of welding robot with PLC and touch screen [J]. *Modern Manufacturing Engineering*, 2010, 8: 159 – 162.
- [9] SHI Jian. *The structure design and performance research on 9-DOF 3 fingers dexterous hand with link actuating* [D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2003. (施建. 连杆驱动式9自由度3指灵巧手的结构设计与性能研究 [D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2003.)
- [10] REN Jingyi, SUN Hanxu. An approach to inverse kinematics solution for a 9-DOF modular reconfigurable robot [J]. *Robot*, 2001, 23(4): 300 – 304, 321. (任敬轶, 孙汉旭. 一种9-DOF模块化机器人的运动学反解 [J]. 机器人, 2001, 23(4): 300 – 304, 321.)
- [11] JIA Q X, CHU M, SUN H X, et al. Research on the optimal algorithm for trajectory planning of a 9-DOF hyper-redundant robot [J]. *Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications*, 2008, 31(2): 20 – 25.
- [12] DONG H, DU Z J. Inverse kinematics of planar redundant manipulators based on workspace density function [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2015, 51(17): 8 – 14.
- [13] ZHANG Y N, LI K N, GUO D S, et al. Different-level simultaneous resolution of robot redundancy with end-effector path tracked and with joint velocity and acceleration both minimized [C]. *Proceedings of the 31st Chinese Control Conference*. Hefei: IEEE, 2012: 6.
- [14] QIN Fei. *Mechanics of Materials* [M]. Beijing: Science Press, 2012. (秦飞. 材料力学 [M]. 北京: 科学出版社, 2012.)
- [15] CAI Zixing. *Robotics* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2009. (蔡自兴. 机器人学 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2009.)
- [16] XI Yugeng. *Predictive Control* [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2013: 23 – 27, 107 – 109. (席裕庚. 预测控制 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2013: 23 – 27, 107 – 109.)
- [17] ZHANG Xiaoying, LI Dewei, XI Yugeng, et al. Design of constrained predictive control system for 6-DOF manipulators [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(11): 1464 – 1472. (张晓颖, 李德伟, 席裕庚, 等. 六自由度机械臂约束预测控制系统的设计 [J]. 控制理论与应用, 2014, 31(11): 1464 – 1472.)
- [18] ZHANG X Y, LI D W, XI Y G. The vibration of flexible manipulators based on model predictive control method [C] // *Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference*. Nanjing: IEEE, 2014, 11: 1464 – 1472.
- [19] The Robotics Society of Japan. *Robotics Technical Manual* [M]. Beijing: Science Press, 2007. (日本机器人学会. 机器人技术手册 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.)
- [20] ZENG K L, YANG X Y, ZHAO S W, et al. Optimization of exponential acceleration curve of stepper motor and realization on PIC [J]. *Micromotors*, 2014, 47(6): 36 – 40.

### 作者简介:

汪乃茜 (1991–), 女, 硕士研究生, 目前研究方向为预测控制、机械臂控制, E-mail: naiqianwang@126.com;

李德伟 (1971–), 男, 副教授, 目前研究方向为预测控制理论与应用, E-mail: dwli@sju.edu.cn;

席裕庚 (1946–), 男, 教授, 目前研究方向为预测控制理论与应用、大系统理论与应用, E-mail: ygxi@sju.edu.cn.