

带有滑模观测器的多智能体一致性控制

金治群[†], 牛玉刚, 邹媛媛

(华东理工大学 化工过程先进控制和优化技术教育部重点实验室, 上海 200237)

摘要: 本文针对智能体速度不可测下的多智能体系统提出一种基于滑模观测器的有限时间一致性控制算法. 为了解决智能体速度不可测所带来的问题, 本文采用了一种有限时间滑模观测器, 该观测器能够在有限时间内估计出单个智能体速度信息; 滑模控制理论是一种应用广泛的经典非线性控制方法, 对于系统的干扰和不确定性有着较好的鲁棒性. 本文采用一种非奇异终端滑模控制方法, 利用智能体邻居节点的位置和估计速度的信息设计滑模控制律, 很好的解决了速度不可测下多智能体系统的有限时间一致性控制问题. 最后, 通过Matlab数值仿真验证了该一致性控制算法的有效性.

关键词: 多智能体系统; 一致性; 滑模观测器; 终端滑模控制

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Consensus for multi-agent systems with sliding-mode observer

JIN Zhi-qun[†], NIU Yu-gang, ZOU Yuan-yuan

(Key Laboratory of Advanced Control and Optimization for Chemical Processes,
East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China)

Abstract: In this paper, a finite time consensus algorithm is proposed for multi-agent systems where the velocity of each agent is unmeasurable. Before achieving the consensus of multi-agent systems, problems raised by the unmeasurable velocities should be solved firstly. In this paper, we adopt a kind of sliding mode observer which can estimate the velocity of each agent online in finite time. The estimated velocities are then utilized as information of control law designing. Sliding mode control is one of the most widely-used classical nonlinear control algorithm which has good robustness to system uncertainties and external disturbances. Here a kind of nonsingular terminal sliding mode control law based on position and estimated velocity information of the neighbors is applied to realize the consensus of the systems, which can not only overcome the absence of velocity information, but also achieve the consensus of the multi-agent system in finite time. Finally, the effectiveness of the proposed algorithm is verified by a numerical simulation.

Key words: multi-agent systems; consensus; sliding-mode observer; terminal sliding-mode control

1 引言(Introduction)

由于多智能体一致性控制的广泛应用,例如编队控制、集群控制、同步控制以及追踪问题等等,许多研究者都对其做了相关的研究^[1-3]. 一致性控制的目标是利用智能体之间的交互信息设计控制算法使得所有个体的状态达到一致或者协同. 目前这一领域的研究成果已经相当丰富^[4-9].

由于在实际应用中,很多情况下要求系统能够在有限时间内收敛,因此,收敛速度成为评价一致性控制算法的一个很重要的指标. 在过去的几年里,很多研究者从不同方面就多智能体系统收敛速度问题做了大量研究,例如优化系统增益、设计通信拓扑等等^[10-11]. 文献[12-13]分别给出了系统有限时间收敛

的充分条件. 文献[14]针对一阶积分系统设计了有限时间分布式一致性控制算法. 文献[15]研究了在无领导者的有向通信拓扑下的多智能体系统有限时间同步问题. 文献[16]研究了二阶系统在有领导者和无领导者下的有限时间一致性控制. 文献[17]针对由二阶非线性系统组成的多智能体系统,利用状态观测器实现了在所有智能体都存在输入受限和速度不可测的情况下的有限时间一致性收敛. 文献[18]将事件触发机制引入到多智能体控制中,首次实现了事件触发控制下的多智能体有限时间一致性. 文献[19]采用最优控制理论将一致性问题转化为最优参数选择问题,实现了系统的有限时间最优一致性.

终端滑模控制对于系统不确定性和干扰具有良好

收稿日期: 2016-01-18; 录用日期: 2016-12-20.

[†]通信作者. E-mail: j8421jean@163.com.

本文责任编辑: 李少远.

国家自然科学基金项目(61673174, 61374107)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61673174, 61374107).

的鲁棒性,其显著特征是可以保证系统状态在有限时间内到达平衡点.因此,一些学者开始将终端滑模控制应用于多智能体一致性控制中.其中,文献[20]研究了基于终端滑模技术在有界干扰下二阶多智能体系统的有限时间一致性问题.文献[21]则通过设计辅助滑模面克服终端滑模奇异性问题,实现了多智能体有限时间编队控制.值得注意的是,上述工作都假设智能体的位置和速度信息是可测的.但是在实际系统中,无法排除某些智能体速度往往无法检测或者检测成本很高的情况,因此许多学者针对这一问题开展了研究^[22-24],其中,文献[22-23]分别研究了在无向通信拓扑和强连通通信拓扑下速度不可测的多智能体有限时间一致性收敛.然而,到目前为止,关于速度信息不可测下,基于终端滑模方法的多智能体一致性问题的研究工作尚未见到.这正是本文的研究动机所在.

针对速度不可测的多智能体系统,本文采用一种有限时间滑模观测器对其速度信息进行估计,并且设计非奇异终端滑模控制律分别对各智能体进行控制,从而得到系统的有限时间一致性.

在本文中,将使用如下数学定义:

对于向量 $\mathbf{x} = [x_1 \cdots x_n]^T$, 定义:

- 1) $\text{sgn } \mathbf{x} = [\text{sgn } x_1 \cdots \text{sgn } x_n]^T$;
- 2) $|\mathbf{x}|^\gamma = [|x_1|^\gamma \cdots |x_n|^\gamma]^T$;
- 3) $\text{sig}^\gamma(\mathbf{x}) = [\text{sgn } x_1 |x_1|^\gamma \cdots \text{sgn } x_n |x_n|^\gamma]^T$;
- 4) $\|\mathbf{x}\|_\infty$ 表示 \mathbf{x} 的无穷范数.

在定理证明过程中,“ \otimes ”表示 Kronecker 乘积,“*”表示矩阵的对称部分.

2 预备知识(Mathematic preliminaries)

2.1 有限时间稳定性(Finite time convergence)

考虑一个非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, t \geq 0, \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ 为系统的状态向量, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 为 D 上的连续函数并且有 $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. 用 $s(\mathbf{x}_0, t)$ 来表示系统(1)以 \mathbf{x}_0 为初始点的解.

引理 1^[12] 假设原点为系统(1)平衡点,如果存在关于原点的开邻域 $D_0 \subseteq D$ 和连续的稳定时间函数 $T(\mathbf{x}) : D_0 \rightarrow [0, +\infty)$ 使得系统满足如下条件:

- 1) 有限时间收敛: 对于任意 $\mathbf{x} \in D_0 \setminus \{0\}$, 当 $t \in [0, T(\mathbf{x})]$ 时, 有 $s(\mathbf{x}, t) \in D_0 \setminus \{0\}$, 并且 $\lim_{t \rightarrow T(\mathbf{x})} s(\mathbf{x}, t) = 0$.
- 2) 李雅普诺夫稳定性: 对于任意关于原点的开集 $D_1 \subseteq D_0$, 存在包含原点的集合 $D_2 \subseteq D$ 使得对于任意 $\mathbf{x} \in D_2 \setminus \{0\}$, 有 $s(\mathbf{x}, t) \in D_1, t \in [0, T(\mathbf{x})]$.

那么原点为该系统有限时间稳定平衡点.

如果 $D_0 = D = \mathbb{R}^n$, 那么原点为该系统全局有限时间稳定平衡点.

引理 2^[12] 对于系统(1), 如果存在一个连续可微函数 $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 实数 $c > 0$ 以及 $\eta \in (0, 1)$ 使得 $V(\mathbf{0}) = 0$, 并且有 $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -c(V(\mathbf{x}))^\eta, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 成立, 那么该系统可以在有限时间内稳定, 并且稳定时间满足

$$T \leq \frac{1}{c(1-\eta)} (V(\mathbf{x}_0))^{(1-\eta)}. \quad (2)$$

2.2 图论(Graph theory)

一般用一组端点和一组边 (ν, ε) 来表示有向图 G , 其中: ν 表示图的点集, ε 表示图的边集. 对于 ν 中任意两个不同的点 i 和 j , 有向点对 $(i, j) \in \varepsilon$ 表示一条从 i 到 j 的有向边.

定义一个包含 n 个点的有向图 G 的邻接矩阵为 $A = a_{ij} (i, j = 1, \cdots, n)$, 如果 $(j, i) \in \varepsilon, i \neq j$, 那么 $a_{ij} > 0$, 此时称点 j 为点 i 的邻居节点; 否则 $a_{ij} = 0$. 定义点 i 的入度为 $d_i = \sum_{j \in J_i} a_{ij}$, 并且定义有向图 G 的入度矩阵和拉普拉斯矩阵分别为 $D_{in} = \text{diag}\{[d_1 \cdots d_n]\}$ 和 $\mathcal{L} = D_{in} - A$, 其中拉普拉斯矩阵的元素表示为

$$L_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & i \neq j, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}, & i = j. \end{cases} \quad (3)$$

在有向图 G 中, 从点 i_0 到点 i_k 的路径可以由一组有序点集 $\{i_0 \cdots i_k\}$ 来表示, 其中 $(i_{j-1}, i_j) \in \varepsilon (j = 1, \cdots, k)$. 如果有向图中任意两点之间都有一条路径连接, 那么称 G 为强连通图. 如果从有向图 G 中某个点出发, 该点和其他任何点之间都可以通过一条路径连接, 那么称有向图 G 中存在一条由该点出发的有向伸展树. 如果有向图中存在一条有向伸展树, 那么称该图为弱连通图.

3 问题描述(Problem description)

本文考虑一个由 $m + 1$ 个多智能体组成的系统, 包括 1 个 leader 和 m 个 follower, 分别用 L 和 $1, \cdots, m$ 表示, 该系统拥有理想的通信系统, 智能体之间可以通过无线网络进行实时连续的信息交换, 其通信拓扑可以用有向图 G 表示. 对于该系统有如下假设:

假设 1 leader 的位置和速度信息是已知时间函数, 而所有 follower 只有位置信息可测, 速度信息则不可测.

假设 2 有向图 G 中存在一个从 leader 出发的有向伸展树, 但是为了保证 leader 的运动不受 follower 的干扰, 图 G 中不存在任何以 leader 为子节点的路径, 即 leader 不能接收任何 follower 传来的信息.

有向图 G 的拉普拉斯矩阵为

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1 \times m} \\ \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中:

$$\mathcal{L}_1 = \begin{bmatrix} L_{1L} \\ \vdots \\ L_{mL} \end{bmatrix}, \mathcal{L}_2 = \begin{bmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{m1} & \cdots & L_{mm} \end{bmatrix},$$

$$L_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, i \neq L, \\ -\frac{1}{|J_i|}, & j \in J_i, i \neq L, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

J_i 表示第*i*个智能体的邻居集, $|J_i|$ 表示第*i*个智能体邻居集的元素个数.

该多智能体系统中所有 follower 的模型都为 Euler-Lagrange 系统, 即

$$\begin{cases} M_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i(t) = \\ \mathbf{f}_i(\mathbf{q}_i(t), \dot{\mathbf{q}}_i(t)) + \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i(t), \dot{\mathbf{q}}_i(t)), \\ \mathbf{q}_i(0) = \mathbf{q}_{0i}, \dot{\mathbf{q}}_i(0) = \dot{\mathbf{q}}_{0i}, t \geq 0, i = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (5)$$

其中: $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^n$ 为位置向量; 正定矩阵 $M_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为惯性矩阵; $\mathbf{f}_i \in \mathbb{R}^n$ 为已知的科氏力函数; $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^n$ 表示控制输入; $\mathbf{g}_i \in \mathbb{R}^n$ 表示系统的有界不确定性.

模型(5)可以改写为

$$\ddot{\mathbf{q}}_i(t) = \tilde{\mathbf{f}}_i(\mathbf{q}_i(t), \dot{\mathbf{q}}_i(t)) + \tilde{\mathbf{u}}_i(t) + \tilde{\mathbf{g}}_i(\mathbf{q}_i(t), \dot{\mathbf{q}}_i(t)), \quad (6)$$

其中:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) &= M_i^{-1}(\mathbf{q}_i)\mathbf{f}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i), \\ \tilde{\mathbf{g}}_i(\mathbf{q}_i(t), \dot{\mathbf{q}}_i(t)) &= M_i^{-1}(\mathbf{q}_i)\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i(t), \dot{\mathbf{q}}_i(t)), \\ \tilde{\mathbf{u}}_i(t) &= M_i^{-1}(\mathbf{q}_i)\mathbf{u}_i(t). \end{aligned}$$

设 leader 的位置和速度分别为 $\mathbf{q}_L(t), \dot{\mathbf{q}}_L(t)$, 第*i*个智能体和第*j*个智能体之间的指定相对位置为 $\mathbf{l}_{ij}(t) \in \mathbb{R}^n (i, j = L, 1, \dots, m)$. 当各个智能体之间的相对位置误差满足如下式(7)时, 称系统达到一致性:

$$\begin{cases} \delta_{ij}(t) = \mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_j(t) - \mathbf{l}_{ij}(t) = \mathbf{0}, \\ i, j = L, 1, \dots, m. \end{cases} \quad (7)$$

本文控制目标为在所有 follower 速度信息不可测情况下, 设计一致性控制算法, 保证所有 follower 在有限时间内达到并维持与 leader 的一致性.

对于第*i* ($i = 1, \dots, m$) 个智能体, 定义变量

$$\mathbf{z}_i(t) = \mathbf{q}_i(t) - \frac{1}{|J_i|} \sum_{j \in J_i} (\mathbf{q}_j(t) + \mathbf{l}_{ij}(t)). \quad (8)$$

令 $\mathbf{z} = [\mathbf{z}_1^T \ \cdots \ \mathbf{z}_m^T]^T$, 有向图 G 为弱连通图时, 如下结论成立:

引理 3^[21] 如果 $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, 那么 $\delta_{ij} = \mathbf{0} (i = 1, \dots, m, j = L, 1, \dots, m)$.

由引理3可知, 只要变量 $(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ 在有限时间内稳定

到原点, 便可以达到多智能体系统的有限时间一致性.

4 滑模观测器设计 (Design of sliding-mode observer)

由于所有 follower 的速度信息都不可测, 本文设计式(9a)和(9b)所示的有限时间滑模观测器^[25]分别估计每个 follower 的速度信息:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_i(t) = \boldsymbol{\varsigma}_i(t) + \lambda \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{q}_i(t) - \boldsymbol{\xi}_i(t)), \quad (9a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varsigma}}_i(t) = \tilde{\mathbf{u}}_i(t) + \tilde{\mathbf{f}}_i(\mathbf{q}_i, \boldsymbol{\varsigma}_i) + \alpha \text{sgn}(\mathbf{q}_i(t) - \boldsymbol{\xi}_i(t)), \quad (9b)$$

其中: $\boldsymbol{\xi}_i(t)$ 表示第*i*个智能体的位置估计, 其初始值为 $\boldsymbol{\xi}_i(0) = \mathbf{q}_{0i}$; $\boldsymbol{\varsigma}_i(t)$ 用于估计第*i*个智能体的速度信息, 其初始值为 $\boldsymbol{\xi}_i(0) = \mathbf{0}$.

定义第*i*个智能体的估计误差为

$$\mathbf{e}_{qi}(t) = \mathbf{q}_i(t) - \boldsymbol{\xi}_i(t), \quad (10a)$$

$$\mathbf{e}_{vi}(t) = \dot{\mathbf{q}}_i(t) - \boldsymbol{\varsigma}_i(t), \quad (10b)$$

求导, 得到第*i*个智能体的估计误差系统

$$\dot{\mathbf{e}}_{qi}(t) = \mathbf{e}_{vi}(t) - \lambda \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qi}(t)), \quad (11a)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_{vi}(t) = \tilde{\mathbf{f}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) - \tilde{\mathbf{f}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\boldsymbol{\xi}}_i) + \tilde{\mathbf{g}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) - \alpha \text{sgn}(\mathbf{e}_{qi}(t)). \quad (11b)$$

令 $\boldsymbol{\varphi}_i(t) = \tilde{\mathbf{f}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) - \tilde{\mathbf{f}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\boldsymbol{\xi}}_i) + \tilde{\mathbf{g}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$, 并且假设 $\|\boldsymbol{\varphi}_i\| \leq \omega_i, \omega_i (i = 1, \dots, m)$ 为大于零的常数, $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \ \cdots \ \omega_m]^T$.

定理 1 对于智能体系统(5), 设计滑模观测器(9), 如果参数 λ, α 满足

$$\lambda > 0, \alpha > \frac{\lambda^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\infty} + 2(\|\boldsymbol{\omega}\|_{\infty})^2}{\lambda^3}, \quad (12)$$

那么估计误差系统(11)是有限时间稳定的, 即 $\boldsymbol{\xi}_i(t)$ 和 $\boldsymbol{\varsigma}_i(t)$ 在有限时间内收敛至 $\mathbf{q}_i(t)$ 和 $\dot{\mathbf{q}}_i(t) (i = 1, \dots, m)$.

证 选取李雅普诺夫函数

$$V_{1i}(t) = \frac{1}{2} [\text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qi})^T \ \mathbf{e}_{vi}^T] P \begin{bmatrix} \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qi}) \\ \mathbf{e}_{vi} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

其中

$$P = \begin{bmatrix} (\lambda^2 + 4\alpha)I_n & -\lambda I_n \\ -\lambda I_n & 2I_n \end{bmatrix},$$

因为 λ 和 α 均大于 0, 所以 P 为正定矩阵.

对 $V_{1i}(t)$ 求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1i}(t) &= [(\text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qi})^T \ \mathbf{e}_{vi}^T) P \times \\ &\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \text{diag}\{|\mathbf{e}_{qi}|^{-\frac{1}{2}}\} (\mathbf{e}_{vi} - \lambda \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qi})) \\ \boldsymbol{\varphi}_i - \alpha \text{sgn} \mathbf{e}_{qi} \end{bmatrix}] = \\ &\frac{1}{2} (\lambda^2 + 4\alpha) (\text{sgn} \mathbf{e}_{qi})^T \mathbf{e}_{vi} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda}{2}(\lambda^2 + 4\alpha)(\text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qi}))^T \text{sgn } \mathbf{e}_{qi} - \\
& \frac{1}{2}\lambda(\mathbf{e}_{vi})^T \text{diag}\{|\mathbf{e}_{qi}|^{-\frac{1}{2}}\}\mathbf{e}_{vi} + \\
& \frac{1}{2}\lambda^2(\mathbf{e}_{vi})^T \text{sgn } \mathbf{e}_{qi} + \lambda\alpha \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qi})(\text{sgn } \mathbf{e}_{qi})^T - \\
& 2\alpha\mathbf{e}_{vi}^T \text{sgn } \mathbf{e}_{qi} - (\lambda\text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qi})^T - 2(\mathbf{e}_{vi})^T)\varphi_i = \\
& -\left(\frac{1}{2}\lambda^3 + \alpha\lambda\right)(\text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qi}))^T \text{diag}\{|\mathbf{e}_{qi}|^{-\frac{1}{2}}\} \times \\
& \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qi}) - \frac{1}{2}\lambda(\mathbf{e}_{vi})^T \text{diag}\{|\mathbf{e}_{qi}|^{-\frac{1}{2}}\}\mathbf{e}_{vi} + \\
& \frac{1}{2}\lambda^2(\mathbf{e}_{vi})^T \text{diag}\{|\mathbf{e}_{qi}|^{-\frac{1}{2}}\}\text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qi}) - \\
& \lambda(\text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qi}))^T \text{diag}\{|\mathbf{e}_{qi}|^{-\frac{1}{2}}\} \times \\
& \text{sgn } \mathbf{e}_{qi} \varphi_i^T \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qi}) + \\
& 2(\text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qi}))^T \text{diag}\{|\mathbf{e}_{qi}|^{-\frac{1}{2}}\}\text{sgn } \mathbf{e}_{qi} \varphi_i^T \mathbf{e}_{vi} = \\
& [(\text{sig}^{\frac{1}{2}}\mathbf{e}_{qi})^T (\mathbf{e}_{vi})^T] \times \\
& \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{2}\lambda^3 + \alpha\lambda + \lambda \text{sgn } \mathbf{e}_{qi} \varphi_i^T\right)I_n & * \\ \frac{1}{2}(\lambda^2 + 2\text{sgn } \mathbf{e}_{qi} \varphi_i^T)I_n & -\frac{1}{2}\lambda I_n \end{bmatrix} \otimes \\
& \text{diag}\{|\mathbf{e}_{qi}|^{-\frac{1}{2}}\} \begin{bmatrix} \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qi}) \\ \mathbf{e}_{vi} \end{bmatrix} = \\
& -[(\text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qi}))^T (\mathbf{e}_{vi})^T] \times \\
& Q \text{diag}\{|\mathbf{e}_{qi}|^{-\frac{1}{2}}\} \begin{bmatrix} \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qi}) \\ \mathbf{e}_{vi} \end{bmatrix}, \quad (14)
\end{aligned}$$

其中:

$$Q = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\lambda^3 + \alpha\lambda + \lambda \text{sgn}(\mathbf{e}_{qi})\varphi_i^T\right)I_n & * \\ -\frac{1}{2}(\lambda^2 + 2\text{sgn}(\mathbf{e}_{qi})\varphi_i^T)I_n & \frac{1}{2}\lambda I_n \end{bmatrix},$$

且由 $\alpha > \frac{\lambda^2\|\omega\|_\infty + 2(\|\omega\|_\infty)^2}{\lambda^3}$ 可知, Q 为正定矩阵.

由 $V_{1i}(t)$ 的定义可知

$$\|\mathbf{e}_{qi}\|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{V_{1i}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}. \quad (15)$$

又有

$$\begin{aligned}
V_{1i} & \leq \\
& \lambda_{\max}(P)(\|\mathbf{e}_{qi}\|^{\frac{1}{2}} + \|\mathbf{e}_{vi}\|)^2 \leq \\
& \|\mathbf{e}_{qi}\|^{\frac{1}{2}} \|\lambda_{\max}(P)[(\text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qi}))^T (\mathbf{e}_{vi})^T] \times \\
& (\text{diag}\{|\mathbf{e}_{qi}|^{-\frac{1}{2}}\} \otimes I_2) \begin{bmatrix} \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qi}) \\ \mathbf{e}_{vi} \end{bmatrix} \leq \\
& \frac{V_{1i}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_{\min}(P)} \lambda_{\max}(P)[(\text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qi}))^T (\mathbf{e}_{vi})^T] \times \\
& (\text{diag}\{|\mathbf{e}_{qi}|^{-\frac{1}{2}}\} \otimes I_2) \begin{bmatrix} \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qi}) \\ \mathbf{e}_{vi} \end{bmatrix}, \quad (16)
\end{aligned}$$

因此, 由式(15)–(16)可以得到

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}{\lambda_{\max}(P)} V_{1i}^{\frac{1}{2}} \leq \\
& [(\text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qi}))^T (\mathbf{e}_{vi})^T] \times \\
& (\text{diag}\{|\mathbf{e}_{qi}|^{-\frac{1}{2}}\} \otimes I_2) \begin{bmatrix} \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qi}) \\ \mathbf{e}_{vi} \end{bmatrix}. \quad (17)
\end{aligned}$$

将式(18)代入式(14)可得

$$\dot{V}_{1i}(t) \leq -\lambda_{\min}(Q) \frac{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}{\lambda_{\max}(P)} V_{1i}^{\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

于是, 由引理2可知, 第 i 个智能体的观测器可以在有限时间内估计出其位置和速度信息, 并且估计时间满足

$$T_1 \leq \frac{2\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(Q)\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} (V_{1i}(0))^{\frac{1}{2}}. \quad (19)$$

进一步, 由式(18)可知, $V_{1i}(t)$ 为单减函数, 当 $0 \leq t \leq T_1$ 时, 有

$$V_{1i}(t) \leq V_{1i}(0),$$

因此, $\mathbf{e}_{qi}(t)$ 和 $\dot{\mathbf{e}}_{qi}(t)$ 在 $(0, T_1)$ 内有界, 并且有

$$\|\mathbf{e}_{qi}\| \leq \frac{V_{1i}(0)}{\lambda_{\min}(P)}, \quad (20)$$

$$\|\mathbf{e}_{vi}\| \leq \frac{\sqrt{V_{1i}(0)}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}. \quad (21)$$

5 基于非奇异终端滑模的一致性控制 (Consensus protocol based on nonsingular terminal sliding mode control)

下面利用估计信息设计分布式控制算法对智能体系统进行控制. 定义变量

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{z}}_i(t) & = \boldsymbol{\xi}_i(t) - \frac{1}{|J_i|} \sum_{j \in J_i \setminus \{L\}} (\boldsymbol{\xi}_j(t) + \mathbf{l}_{ij}(t)) + \\
& (\mathbf{L}_{iL} \otimes I_n)(\mathbf{q}_L(t) + \mathbf{l}_{iL}(t)). \quad (22)
\end{aligned}$$

当第 i 个观测器有限时间收敛之后, $\hat{\mathbf{z}}_i(t)$ 将等于 $\mathbf{z}_i(t)$, 这时只要设计控制律使得 $\hat{\mathbf{z}}_i(t)$ 在有限时间内收敛至原点, 就能够得到系统的有限时间一致性.

分别计算 $\hat{\mathbf{z}}_i(t)$ 的一阶及二阶导数:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{z}}}_i & = \\
& \boldsymbol{\varsigma}_i + \lambda \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qi}) + \mathbf{L}_{iL}(\dot{\mathbf{q}}_L + \dot{\mathbf{l}}_{iL}) - \\
& \frac{1}{|J_i|} \sum_{j \in J_i \setminus \{L\}} (\boldsymbol{\varsigma}_j + \lambda \text{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qj}) + \dot{\mathbf{l}}_{ij}), \quad (23) \\
\ddot{\hat{\mathbf{z}}}_i & = \\
& \dot{\boldsymbol{\varsigma}}_i + \frac{1}{2}\lambda \text{diag}\{|\mathbf{e}_{qi}|^{-\frac{1}{2}}\} \dot{\mathbf{e}}_{qi} - \\
& \frac{1}{|J_i|} \sum_{j \in J_i \setminus \{L\}} (\dot{\boldsymbol{\varsigma}}_j + \frac{1}{2}\lambda \text{diag}\{|\mathbf{e}_{qj}|^{-\frac{1}{2}}\} \dot{\mathbf{e}}_{qj} + \dot{\mathbf{l}}_{ij}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{L}_{iL}(\ddot{\mathbf{q}}_L + \ddot{\mathbf{l}}_{iL}) = \\
 & \ddot{\mathbf{u}}_i + \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}_i, \boldsymbol{\varsigma}_i) + \alpha \operatorname{sgn} \mathbf{e}_{qi} + \\
 & \frac{1}{2} \lambda \operatorname{diag}\{|\mathbf{e}_{qi}|^{-\frac{1}{2}}\}(\mathbf{e}_{vi} - \lambda \operatorname{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qi})) - \\
 & \frac{1}{|J_i|} \sum_{j \in J_i/\{L\}} (\ddot{\mathbf{u}}_j + \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}_j, \boldsymbol{\varsigma}_j) + \alpha \operatorname{sgn} \mathbf{e}_{qj} + \\
 & \frac{1}{2} \lambda \operatorname{diag}\{|\mathbf{e}_{qj}|^{-\frac{1}{2}}\}(\mathbf{e}_{vj} - \lambda \operatorname{sig}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_{qj})) + \ddot{\mathbf{l}}_{ij}) + \\
 & \mathbf{L}_{iL}(\ddot{\mathbf{q}}_L + \ddot{\mathbf{l}}_{iL}) = \\
 & \ddot{\mathbf{u}}_i - \frac{1}{|J_i|} \sum_{j \in J_i/\{L\}} \ddot{\mathbf{u}}_j - \ddot{\mathbf{l}}_i + \mathbf{L}_{iL} \ddot{\mathbf{q}}_L + \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}_i, \boldsymbol{\varsigma}_i) - \\
 & \frac{1}{|J_i|} \sum_{j \in J_i/\{L\}} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}_j, \boldsymbol{\varsigma}_j) + (\alpha + \frac{\lambda^2}{2}) \operatorname{sgn} \mathbf{e}_{qi} - \\
 & \frac{1}{|J_i|} \sum_{j \in J_i/\{L\}} (\alpha + \frac{\lambda^2}{2}) \operatorname{sgn} \mathbf{e}_{qj} + \\
 & \frac{\lambda}{2} \operatorname{diag}\{|\mathbf{e}_{qi}|^{-\frac{1}{2}}\} \mathbf{e}_{vi} - \\
 & \frac{1}{|J_i|} \sum_{j \in J_i/\{L\}} \frac{\lambda}{2} \operatorname{diag}\{|\mathbf{e}_{qj}|^{-\frac{1}{2}}\} \mathbf{e}_{vj}, \quad (24)
 \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{l}_i(t) = \frac{1}{|J_i|} \sum_{j \in J_i/\{L\}} \mathbf{l}_{ij}(t)$.

下面设计非奇异终端滑模控制律, 保证 $\hat{z}_i(t)$ 在有限时间内收敛.

设计终端滑模面为

$$\mathbf{s}_i(t) = \hat{z}_i(t) + \boldsymbol{\beta} \dot{z}_i^\gamma(t), \quad (25)$$

其中: $\boldsymbol{\beta} = \operatorname{diag}\{\beta_1, \dots, \beta_n\}^T$, $\beta_i > 0$; $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1 \dots \gamma_n]^T$, $1 < \gamma_i < 2$, $\gamma_i = \frac{p_i}{q_i}$ ($i = 1, \dots, n$), 并且 p_i 和 q_i 均为正奇数.

对滑模变量(25)求导得

$$\dot{\mathbf{s}}_i(t) = \dot{\hat{z}}_i(t) + \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\Gamma} \operatorname{diag}\{|\dot{z}_i|^{\gamma-1}\} \ddot{z}_i, \quad (26)$$

其中 $\boldsymbol{\Gamma} = \operatorname{diag}\{\boldsymbol{\gamma}\}$.

注 1 本文采用的终端滑模面为非奇异滑模面. 一般情况下, 终端滑模面经常被设计为 $s(t) = \dot{x}(t) + \beta x^\gamma(t)$, 其中: x (假设为 1 维变量) 为状态变量, $\beta > 0$, $0 < \gamma < 1$. 如果对该滑模面求导可得 $\dot{s}(t) = \ddot{x}(t) + \beta \gamma x^{\gamma-1} \dot{x}$. 可以看出当 $x(t) = 0$ 时, 由于 $\gamma < 1$, $x^{\gamma-1}$ 的值为无穷大, 这往往造成控制律的奇异性. 但是本文中由于 $\gamma > 1$, 则不会产生这样的问题.

设计控制律为

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{u}}_i(t) = & -(\eta \operatorname{sgn} \mathbf{s}_i + \boldsymbol{\beta}^{-1} \boldsymbol{\Gamma}^{-1} (\dot{z}_i)^{2-\gamma} - \ddot{\mathbf{l}}_i + \mathbf{L}_{iL} \ddot{\mathbf{q}}_L + \\
 & \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}_i, \boldsymbol{\varsigma}_i) - \frac{1}{|J_i|} \sum_{j \in J_i/\{L\}} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}_j, \boldsymbol{\varsigma}_j)). \quad (27)
 \end{aligned}$$

定理 2 对于由一个 leader 和 m 个 follower 组成的多智能体系统, 如果所有 follower 模型为式(5)并且满足假设 1 和 2, 那么控制律(27)可以保证该系统在有限时间内达到一致性.

证 选取李雅普诺夫函数

$$V_i(t) = \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T(t) \mathbf{s}_i(t), \quad (28)$$

对其求导得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_i = & \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{s}}_i = \\
 & \mathbf{s}_i^T (\dot{\hat{z}}_i + \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\Gamma} \operatorname{diag}\{|\dot{z}_i|^{\gamma-1}\} \ddot{z}_i) = \\
 & \mathbf{s}_i^T (\dot{\hat{z}}_i + \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\Gamma} \operatorname{diag}\{|\dot{z}_i|^{\gamma-1}\} (-\eta \operatorname{sgn} \mathbf{s}_i + \\
 & \boldsymbol{\beta}^{-1} \boldsymbol{\Gamma}^{-1} (\dot{z}_i)^{2-\gamma} - \ddot{\mathbf{l}}_i + \mathbf{L}_{iL} \ddot{\mathbf{q}}_L + \\
 & \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}_i, \boldsymbol{\varsigma}_i) - \frac{1}{|J_i|} \sum_{j \in J_i/\{L\}} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}_j, \boldsymbol{\varsigma}_j)) - \\
 & \ddot{\mathbf{l}}_i + \mathbf{L}_{iL} \ddot{\mathbf{q}}_L + \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}_i, \boldsymbol{\varsigma}_i) - \frac{1}{|J_i|} \sum_{j \in J_i/\{L\}} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}_j, \boldsymbol{\varsigma}_j) + \\
 & (\alpha + \frac{\lambda^2}{2}) \operatorname{sgn} \mathbf{e}_{qi} + \frac{\lambda}{2} \operatorname{diag}\{|\mathbf{e}_{qi}|^{-\frac{1}{2}}\} \mathbf{e}_{vj} - \\
 & \frac{1}{|J_i|} \sum_{j \in J_i/\{L\}} (\alpha + \frac{\lambda^2}{2}) \operatorname{sgn} \mathbf{e}_{qj} - \\
 & \frac{1}{|J_i|} \sum_{j \in J_i/\{L\}} \frac{\lambda}{2} \operatorname{diag}\{|\mathbf{e}_{qj}|^{-\frac{1}{2}}\} \mathbf{e}_{vj}) = \\
 & \mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\Gamma} \operatorname{diag}\{|\dot{z}_i|^{\gamma-1}\} (-\eta \operatorname{sgn} \mathbf{s}_i + (\alpha + \frac{\lambda^2}{2}) \cdot \\
 & \operatorname{sgn} \mathbf{e}_{qi} - \frac{1}{|J_i|} \sum_{j \in J_i/\{L\}} (\alpha + \frac{\lambda^2}{2}) \operatorname{sgn} \mathbf{e}_{qj} + \\
 & \frac{\lambda}{2} \operatorname{diag}\{|\mathbf{e}_{qi}|^{-\frac{1}{2}}\} \mathbf{e}_{vi} - \\
 & \frac{1}{|J_i|} \sum_{j \in J_i/\{L\}} \frac{\lambda}{2} \operatorname{diag}\{|\mathbf{e}_{qj}|^{-\frac{1}{2}}\} \mathbf{e}_{vj}). \quad (29)
 \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
 \kappa = & \max\{\|\operatorname{diag}\{|\mathbf{e}_{qi}|^{-\frac{1}{2}}\}\|_\infty, i = 1, \dots, m\}, \\
 \iota = & \max\{\|\mathbf{e}_{vi}\|, i = 1, \dots, m\}, \\
 \psi = & (2\alpha + \lambda^2 + \lambda \kappa \iota) \|\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\Gamma} \operatorname{diag}\{|\dot{z}_i|^{\gamma-1}\}\|_\infty, \\
 \epsilon = & \eta \|\operatorname{diag}\{|\dot{z}_i|^{\gamma-1}\}\|_\infty,
 \end{aligned}$$

那么式(29)可以表示为

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_i(t) = & -\eta \|\operatorname{diag}\{|\dot{z}_i|^{\gamma-1}\}\|_\infty \|\mathbf{s}_i\|_1 + \\
 & 2(\alpha + \frac{\lambda^2}{2}) \|\mathbf{s}_i\| \|\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\Gamma} \operatorname{diag}\{|\dot{z}_i|^{\gamma-1}\}\|_\infty + \\
 & \lambda \|\mathbf{s}_i\| \|\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\Gamma} \operatorname{diag}\{|\dot{z}_i|^{\gamma-1}\}\|_\infty \kappa \iota = \\
 & (\psi - \epsilon) \|\mathbf{s}_i\|_1. \quad (30)
 \end{aligned}$$

如果 $\psi \leq \epsilon$, 那么 $V_i(t)$ 在 $(0, T_1)$ 内为递减函数, 有 $\sup_{0 \leq t \leq T_1} V_i(t) = V_i(0)$; 如果 $\psi > \epsilon$, 那么对于函数 $\mu(t) = (\mu^{\frac{1}{2}}(0) + \frac{\psi - \epsilon}{2} t)^2$, 如果令 $\mu(0) \geq V_i(0)$, 那么在时间 $(0, T_1)$ 内, $\mu(t) \geq V_i(t)$ 始终成立, 此时 $\sup_{0 \leq t \leq T_1} V_i(t) \leq \sup_{0 \leq t \leq T_1} \mu(t) = (\mu^{\frac{1}{2}}(0) + \frac{\psi - \epsilon}{2} T_1)^2$. 因此, $\mathbf{s}_i(t)$ 和 $\dot{\hat{z}}_i(t)$ 在 $(0, T_1)$ 内始终有界, 那么由式(25)可知 $\hat{z}_i(t)$ 和

$\dot{\hat{z}}_i(t)$ 在 $(0, T_1)$ 内有界; 又因为 e_{qi} 和 e_{vi} 有界, 由式(10)可知 $z_i(t)$ 和 $\dot{z}_i(t)$ 在 $(0, T_1)$ 内有界.

当 $t > T_1$ 时, 有 $e_{qi} = \mathbf{0}$, $e_{vi} = \mathbf{0}$, 式(29)可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) &= -\eta \|\text{diag}\{\dot{\hat{z}}_i|\gamma^{-1}\}\|_\infty \|s_i\|_1 \leq \\ &-\epsilon \|s_i\|_1 \leq \epsilon \|s_i\| = -\epsilon V_i^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (31)$$

由引理1可知, $\hat{z}_i(t)$ 可以在有限时间内到达滑模面, 并且到达时间满足

$$T_2 \leq T_1 + \frac{2}{\epsilon} V_i^{\frac{1}{2}}(s(T_1)). \quad (32)$$

当 $\hat{z}_i(t)$ 到达滑模面之后, 根据终端滑模面(25)的性质可知, 其将在有限时间内收敛至 $\mathbf{0}$, 并且收敛时间满足

$$\Delta t \leq \|\beta(1-\gamma)^{-1}\|_\infty \|\hat{z}_i(T_2)\|^{1-\gamma}. \quad (33)$$

由于此时估计误差系统(11)已经收敛, 所以有 $z_i(t) = \mathbf{0}$. 因此, 由1个leader和 m 个follower组成的多智能体系统可以在有限时间内达到一致, 并且收敛时间满足

$$T \leq T_2 + \Delta t. \quad (34)$$

注2 本文采用的是分布式一致性算法, 利用邻居节点的位置和控制信息对单个智能体的运动进行控制, 当所有单个智能体的运位置误差收敛到零时, 表示所有智能体都到达了指定的位置并且获得理想运动轨迹从而可获得智能体系统的整体一致性.

6 数值仿真(Numerical simulation)

本文在MATLAB平台上对所提算法进行仿真验证. 考虑由1个leader和8个follower组成的智能体系统, 其目标运动队形如图1所示.

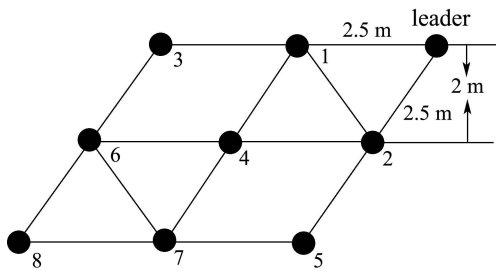


图1 目标队形

Fig. 1 Desired formation

leader的运动轨迹已知

$$q_L = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{10}t) \\ 0.5 \sin(\frac{\pi}{10}t) \end{bmatrix},$$

follower的运动微分方程为

$$\ddot{q}_i(t) = \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{g}_i(t),$$

其中:

$$q_i = \begin{bmatrix} q_{i1} \\ q_{i2} \end{bmatrix}, \mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^2, \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} 0.3 \sin q_{i1} \\ 0.3 \sin q_{i2} \end{bmatrix}.$$

各智能体的初始位置为

$$\begin{aligned} q_{01} &= [-1 \ 3.5]^T, \quad q_{02} = [0.5 \ -4.5]^T, \\ q_{03} &= [-5 \ 4.5]^T, \quad q_{04} = [-5.5 \ -7.5]^T, \\ q_{05} &= [-1 \ -7]^T, \quad q_{06} = [-10 \ 3]^T, \\ q_{07} &= [-8.5 \ -7]^T, \quad q_{08} = [-11.5 \ -7.5]^T, \end{aligned}$$

并且 $q_{0i} = [0 \ 0]^T (i = 1, \dots, 8)$.

该系统的拉普拉斯矩阵为

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

观测器参数 $\lambda = 1$, $\alpha = 2$, 控制器参数 $\beta = I_2$, $\eta = [1.8 \ 1.8]^T$, $\eta = 1.3$.

图2是各智能体的运动轨迹, 可以看出在控制律(27)的作用下, 智能体可以达到一致性. 图3和图4分别给出了位置信息和速度信息的估计误差, 从中可以看出, 位置信息估计误差几乎为0, 速度信息估计误差始终小于0.01. 图5为控制信号随时间的变化, 可以看出控制信号始终小于10, 没有发生奇异现象. 图6为 $z_i (i = 1, \dots, 8)$ 的时间轨迹, 可以看出所有智能体的相对位置误差都能够在10 s内收敛至0, 部分智能体的收敛时间小于5 s.

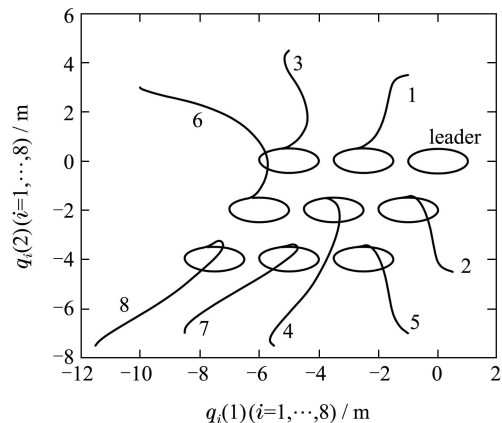


图2 智能体运动轨迹

Fig. 2 Trace of each agent

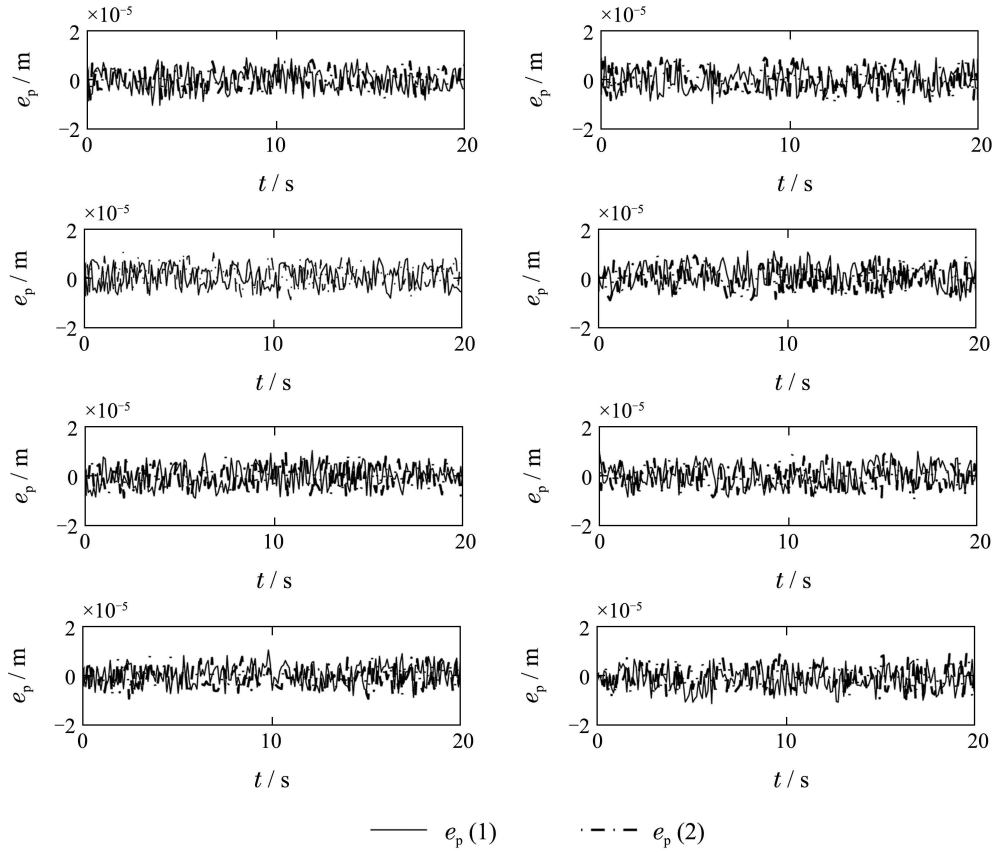


图 3 位置估计误差

Fig. 3 Estimation errors of position

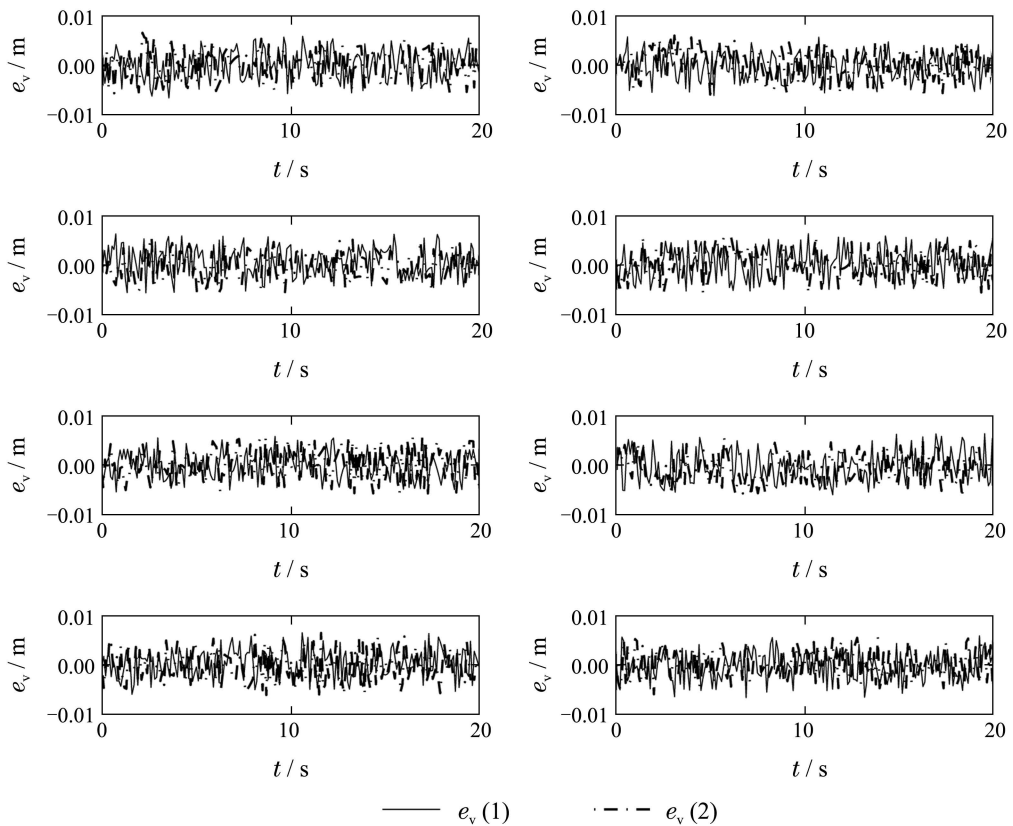


图 4 速度估计误差

Fig. 4 Estimation errors of velocity

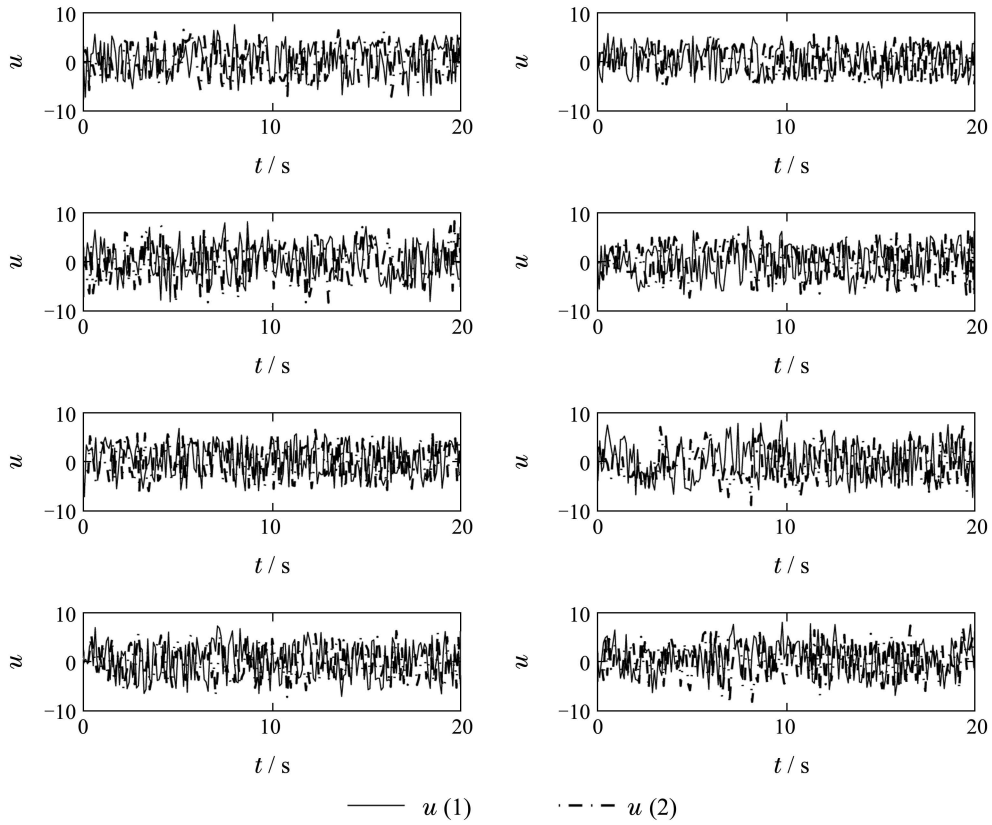


图5 控制信号

Fig. 5 Control signals for each agent

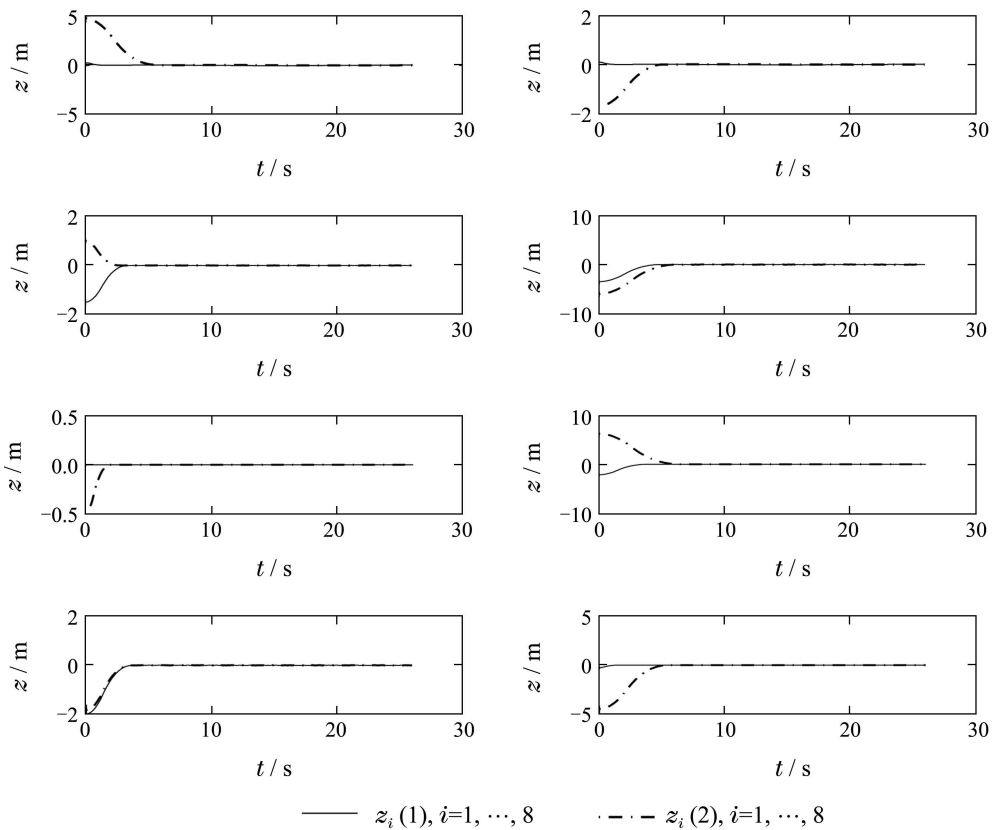


图6 智能体位置误差

Fig. 6 Position error of each agent

7 结论(Conclusions)

本文提出一种基于非奇异终端滑模技术的多智能体有限时间一致性控制算法, 并且运用图论、李雅普诺夫原理等证明了在该控制律下带有有界不确定性的系统的有限时间稳定性. 该算法最大的特点是利用观测器技术解决了多智能体运动过程中速度不可测的问题, 该观测器能够在有限时间内估计出智能体的速度, 从而获得有限时间收敛的特性.

参考文献(References):

- [1] CONSOLINI L, MORBIDI F, PRATTICIZZO D, et al. Leader-follower formation control of nonholonomic mobile robots with input constraints [J]. *Automatica*, 2008, 44(5): 1343 – 1349.
- [2] DONG Y, HUANG J. Leader-following connectivity preservation rendezvous of multiple double integrator systems based on position measurement only [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(9): 2598 – 2603.
- [3] XIANG J, LI Y J, WEI W, et al. Synchronisation of linear continuous multi-agent systems with switching topology and communication delay [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2013, 8(14): 1415 – 1420.
- [4] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [5] NI W, CHENG D Z. Leader-following consensus of multi-agent systems under fixed and switching topologies [J]. *System & Control Letters*, 2010, 59(3/4): 209 – 217.
- [6] CHEN Yangzhou, GAI Yanrong, SONG Xuejun. Partial stability based approach to consensus problem in discrete-time multi-agent systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(4): 438 – 443. (陈阳舟, 盖彦荣, 宋学君. 基于部分稳定性方法的离散时间多智能体系统的一致性 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(4): 438 – 443.)
- [7] TAN Fuxiao, GUAN Xiping, LIU Derong. Consensus protocol in networked multi-agent systems with non-balanced topology [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(10): 1087 – 1092. (谭拂晓, 关新平, 刘德荣. 非平衡拓扑结构的多智能体网络系统一致性协议 [J]. *控制理论与应用*, 2009, 26(10): 1087 – 1092.)
- [8] WANG Fang, CHEN Xin, HE Yong, et al. Finite-time consensus control of second-order multi-agent systems with jointly-connected topologies [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(7): 981 – 986. (王芳, 陈鑫, 何勇, 等. 联合连通条件下的二阶多智能体系统有限时间一致性控制 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(7): 981 – 986.)
- [9] ZUO Z Y. Nonsingular fixed-time consensus tracking for second-order multi-agent networks [J]. *Automatica*, 2015, 54(9): 305 – 309.
- [10] XIAO F, WANG L. Reaching agreement in finite time via continuous local state feedback [C] // *The 26th Chinese Control Conference*. Hunan, China: IEEE, 2007: 711 – 715.
- [11] JIANG F C, WANG L. Finite-time weighted average consensus with respect to a monotonic function and its application [J]. *Systems & Control Letters*, 2011, 60(9): 718 – 725.
- [12] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems [J]. *SIMA Journal of Control and Optimization*, 2000, 38(3): 751 – 766.
- [13] HONG Y, YANG Y. Finite-time control for robot manipulators [J]. *Systems & Control Letters*, 2002, 46(4): 243 – 253.
- [14] WANG L, XIAO F. Finite-time consensus problem for networks of dynamic systems [J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2010, 55(4): 950 – 955.
- [15] XIAO F, WANG L, CHEN J, et al. Finite-time formation control for multi-agent systems [J]. *Automatica*, 2009, 45(11): 2606 – 2611.
- [16] LI S, DU H, LIN X. Finite-time consensus of heterogeneous multi-agent systems with double-integrator dynamics [J]. *Automatica*, 2011, 47(8): 1706 – 1712.
- [17] ZHOU Y, HUANG J S, GAO T T. Finite-time consensus control of nonlinear mechanical systems with input saturation [C] // *The 34th Chinese Control Conference*. Hangzhou, China: IEEE, 2015: 1240 – 1245.
- [18] ZHU Y K, GUAN X P, LUO X Y, et al. Finite-time consensus of multi-agent system via nonlinear event-triggered control strategy [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2015, 9(17): 2548 – 2552.
- [19] LI R, SHI R G. Finite-time optimal consensus control for second-order multi-agent systems [J]. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2014, 10(3): 929 – 943.
- [20] ZHAO L W, HUA C C. Finite-time consensus tracking of second-order multi-agent systems via nonsingular TSM [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 75(1/2): 311 – 318.
- [21] CHASEMI M, NERSESOV S G. Finite-time coordination in multi-agent systems using sliding mode control approach [J]. *Automatica*, 2014, 50(4): 1209 – 1216.
- [22] MEI J, REN W, MA G F. Distributed coordination for second-order multi-agent systems with nonlinear dynamics using only relative position measurements [J]. *Automatica*, 2013, 49(5): 1419 – 1427.
- [23] ZHANG B, JIA Y M, MATSUNO F. Finite-time observers for multi-agent systems without velocity measurements and with input saturations [J]. *Systems & Control Letters*, 2014, 68(1): 86 – 94.
- [24] ZHENG Y S, WANG L. Finite-time consensus of heterogeneous multi-agent systems with and without velocity measurements [J]. *Systems & Control Letters*, 2012, 61(8): 871 – 878.
- [25] DAVILA J, FRIDAMN L, LEVANT A. Second-order sliding-mode observer for mechanical systems [J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2005, 50(11): 1785 – 1789.

作者简介:

金治群 (1991-), 女, 硕士研究生, 研究方向为多智能体一致性控制、滑模控制, E-mail: j8421jean@163.com;

牛玉刚 (1964-), 男, 教授, 研究方向为随机控制系统、滑模控制、无线传感网络、智能电网, E-mail: acniuyg@ecust.edu.cn;

邹媛媛 (1980-), 女, 副教授, 研究方向为预测控制、网络化控制、分布式控制系统, E-mail: yyzou@ecust.edu.cn.