

装配线物料搬运的拉格朗日松弛算法

周炳海[†], 胡理嫚

(同济大学 机械与能源工程学院, 上海 201804)

摘要: 为提高汽车制造企业混流装配线的运行效益, 提出了基于看板模型的多封闭循环路径多载量小车物料配送调度方法——装配线物料配送调度的拉格朗日松弛算法. 首先对问题域进行了描述并做出了具体假设, 以最小化配送系统总成本为目标, 建立了混合整数规划模型. 在此基础上, 针对该模型提出了两种算法——次梯度和随机步长拉格朗日松弛算法, 将松弛问题分解为两个决策子问题分别进行求解. 仿真实验表明提出的两种调度算法均适用于该研究问题域, 并在求解时间及稳定性上表现出良好的性能.

关键词: 物料搬运; 看板; 调度; 拉格朗日松弛

中图分类号: TP391 文献标识码: A

Lagrangian relaxation algorithm for material handling problems of assembly lines

ZHOU Bing-hai[†], HU Li-man

(School of Mechanical Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China)

Abstract: To effectively enhance the performance of the mixed-model assembly line in automobile manufacture enterprises, a kanban model-based scheduling method of multi-close-loops dolly train material delivery, Lagrangian relaxation algorithm for material delivery problems of assembly lines, is proposed in this paper. First of all, a problem domain of multiple-close-loops dolly train material delivery is presented and a few assumptions of the problem are depicted in detail in the paper. Then, a mixed integer programming model is constructed, which aims to minimize the total expected cost of material delivery system. On that basis, two algorithms—Lagrangian relaxation based on subgradient and Lagrangian relaxation based on random step—are proposed for the mixed integer programming model, which both decompose the relaxed problem into two decision sub-problems both of which are solved respectively. Simulation experiments show that the two scheduling methods are fit to solving the problem and have a better performance in calculating time and stability.

Key words: material handling; kanban; scheduling; Lagrangian relaxation

1 引言(Introduction)

随着产品多样性与定制化趋势的发展, 准时化零部件配送愈加成为制造企业所面临的一大挑战. 车辆装配线中的多载量小车(dolly train)物料配送问题越来越受到学术界和工业界的关注.

近年来, 多载量小车物料配送调度决策问题引起了许多国内外学者的重视. Battini等^[1]研究指出, 由于小车容量与工位空间限制不利于准时化物料配送策略的实施, 因此混流装配线的准时化(just-in-time, JIT)物料配送问题尤为复杂. 但仍有不少学者致力于解决这一难题. Choi等^[2]首次研究了动态系统下多载量小车零部件配送问题, 以最小化惩罚值为目标确定小车最优配送序列. Jenny等^[3]根据JIT原则以最小化

配送人员数量建立了混合整数规划模型, 并提出了相应的求解启发式算法. Boysen等^[4]研究了静态配送系统下单条装配线的零部件配送问题, 建立了两个动态规划模型, 并采用嵌套动态规划算法求解了小车路径、调度与装载问题. Boysen等^[5]研究了混流装配线多载量小车装载问题, 在小车有限容量与避免物料短缺约束下最小化线旁库存量, 并提出了一个精确的多项式时间求解算法. Faccio等^[6]首次提出整合库存超市、看板与多载量小车配送系统的调度框架. Faccio等^[7]通过仿真研究了看板配送系统下多装配线多载量小车固定路径配送调度问题. Marco Bortolini等^[8]通过仿真确定了在固定路径下最佳小车数量与安全因素并优化看板数量. 可知, 将多载量小车物料配送

收稿日期: 2016-06-25; 录用日期: 2017-03-13.

[†]通信作者. E-mail: bhzhou@tongji.edu.cn; Tel.: +86 13564164374.

本文责任编辑: 阳春华.

国家自然科学基金项目(71471135)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (71471135).

调度问题与看板优化问题结合研究的文献少见报道;其次,由于多载量小车配送决策与看板优化整合问题的复杂性,现有文献研究均采用仿真方法求解,但仿真本身存在时间与建模成本高、通用性低等缺陷;再则,已有的多载量小车调度方法忽略了小车路径选择对于装载的耦合这一重要特性,而类似拉格朗日松弛这类能够在合理的时间内找到实际规模问题的可量化指标的近似解算法更受青睐^[9-12].因此,在上述文献基础上,本文尝试进行变路径多载量小车配送决策与看板优化整合问题研究,提出适用于该模型的两种拉格朗日松弛算法,松弛路径选择与装载耦合约束,从而提高问题求解效率与稳定性.

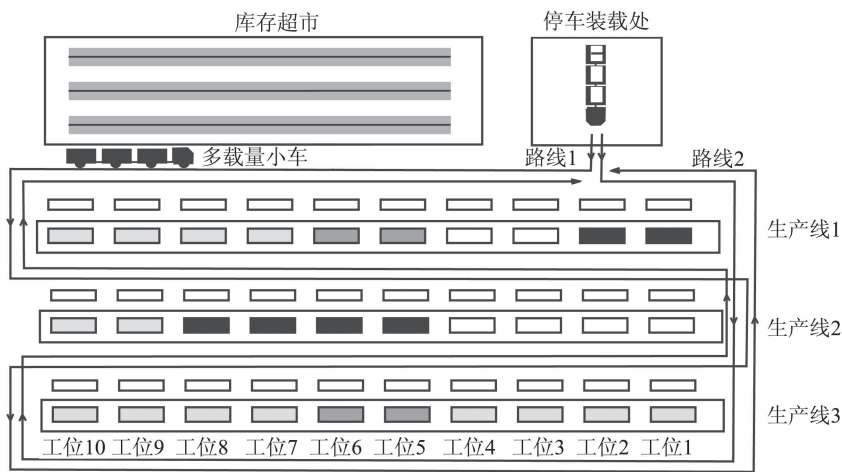


图1 多载量小车配送系统示意图

Fig. 1 The schematic diagram of dolly train feeding system

2.2 数学模型(Mathematical formulation)

基于上述问题描述,建立数学模型如下:

1) 模型假设.

该系统中配送间隔时间一定,不允许小车在工位旁滞留;首个零部件取出后立即摘下看板放入看板回收箱,运输指令由回收的看板直接生成;看板系统由装载计划对运输指令进行分配,允许已生成的运输指令延迟搬运;只有生成运输指令的工位才需零部件补充,运输指令元素仅由一次搬运完成;每个工位都有一定的初始库存;不允许缺货;库存超市服务水平为100%;整个系统处于稳定状态;采用弹射架与重力式托盘,小车装卸载时间可忽略.

2) 参数.

$r \in \mathbf{R}$: 配送路线集合 $\mathbf{R} = \{1, 2, \dots, r_{\max} = R\}$;

$f \in \mathbf{F}$: 运输指令集合,元素 F 为搬运最大频次 $\mathbf{F} = \{1, 2, \dots, f_{\max} = F\}$;

$m \in \mathbf{M}$: 零部件集合 $\mathbf{M} = \{1, 2, \dots, m_{\max} = M\}$;

$l \in \mathbf{L}$: 生产线集合 $\mathbf{L} = \{1, 2, \dots, l_{\max} = L\}$;

2 数学建模(Problem formulation)

2.1 问题描述(Problem statement)

如图1所示,多载量小车负责将装满零件的物料箱从库存超市搬至相应的工位.整个物料配送过程分为4个阶段.首先多载量小车到达停车装载处,将领料看板指示的物料箱放入车厢中.然后多载量小车根据看板生成的运输指令、小车容量与生产线零件需求的紧急程度(配送距离与消耗率决定)选取合适的零件装载.接着小车沿循环路径历经各个工位,在需求工位处卸载零部件并替换出空料箱;最后多载量小车将空箱运回库存超市,空箱根据看板指示向前一道工序补充物料.

J : 配送人员需求量; C_{total} : 总成本, RMB;

$C_{\text{ost-man}}$: 劳务费用, RMB;

$C_{\text{ost-tow}}$: 多载量小车固定投资成本, RMB;

C_{Stock} : 库存成本, RMB;

a_{ml0} : 初始库水平,不包括安全库存, SKU;

Q_c : 库存价值系数, RMB/SKU;

γ_{ml} : 生产线 l 对应工位上零部件 m 的平均消耗量, SKU/takt;

S_{msl} : 通过 r 路径将零部件 m 搬运至对应工位经历的运输距离, m;

V_{tow} : 多载量小车平均运行速度, m/takt;

B : 配送间隔时间, takt;

k_{tml} : 生产线 l 零部件 m 物料补充指令在运输指令中,取值为1;否则为0, SKU;

T_{travel} : 多载量小车完成一次搬运所需平均运输时间, takt;

$T_{\text{day}}^{\text{takt}}$: 生产周期, takt;

S_{Tot} : 运输路径长度即集货配送路线总长度, m;

C_{tow} : 多载量小车装载容量, SKU;

q_m : 零部件 m 标准箱容量大小, unit/SKU;
 σ_{il}^d : 生产线 l 产品 i 的需求标准差 (Standard deviation, SD), SKU/takt;

σ_{ml}^c : 生产线 l 零部件 m 需求 SD, SKU/takt;

K_{an}^{ml} : 丰田公式看板数量估算值;

\bar{K}_{an}^{ml} : 改进公式看板数量估算值;

c_{ml} : 生产线 l 上零部件 m 平均需求量, SKU/takt;

\overline{LT} : 零部件平均提前期, takt;

p_{im} : 每种产品的物料清单;

F_{ml} : 生产周期内生产线 l 上零部件 m 的必须配送次数;

LT_{ml} : 生产线 l 上零部件 m 连续两次搬运的平均提前期.

3) 决策变量.

x_{jr} : 二进制变量, 表示配送人员 j 选择路径 r 执行此次配送任务;

δ : 连续变量, 安全因子, 表示生产线上工位服务水平;

y_{ftml} : 二进制变量, 表示当前运输指令元素 k_{tms} 由第 f 次搬运完成.

以最小化多载量小车物料配送成本与库存成本为调度目标, 建立如下数学规划模型:

$$\min C_{\text{total}} = J \cdot (C_{\text{ost-man}} + C_{\text{ost-tow}}) + C_{\text{Stock}}, \quad (1)$$

s.t.

$$\left\{ \begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{S_{\text{Tot}}}{B V_{\text{tow}}} \rfloor} \left[\sum_{t=(i-1)B+1}^{i \cdot B} \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \frac{k_{tml}}{C_{\text{tow}}} \right] + \\ &\quad \left[\sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \frac{k_{0ml}}{C_{\text{tow}}} \right], \\ j &= 1, \dots, J; r = 1, \dots, R; i = 1, \dots, \lfloor \frac{T_{\text{travel}}}{B} \rfloor; \\ m &= 1, \dots, M; l = 1, \dots, L; t = 0, \dots, T_{\text{day}}^{\text{takt}}, \end{aligned} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} F &= \\ &\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{T_{\text{day}}^{\text{takt}}}{B} \rfloor} \left[\sum_{t=(n-1)B+1}^{n \cdot B} \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \frac{k_{tml}}{C_{\text{tow}}} \right] + \\ &\left[\sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \frac{k_{0ml}}{C_{\text{tow}}} \right] + \left[\sum_{t=\lfloor \frac{T_{\text{day}}^{\text{takt}}}{B} \rfloor B+1}^{T_{\text{day}}^{\text{takt}}-1} \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \frac{k_{tml}}{C_{\text{tow}}} \right], \\ m &= 1, \dots, M; l = 1, \dots, L; \\ t &= 0, \dots, T_{\text{day}}^{\text{takt}} - 1; n = 1, \dots, \lfloor \frac{T_{\text{day}}^{\text{takt}}}{B} \rfloor, \end{aligned} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{f=1}^F y_{ftml} &= k_{tml}, t \in \{0, 1, \dots, T_{\text{day}}^{\text{takt}} - 1\}; \\ \forall m \in M; l \in L; f &= 1, \dots, F, \end{aligned} \right. \quad (4)$$

$$\sum_{r=1}^R x_{fr} = 1; j = 1, \dots, J; r = 1, \dots, R; \forall f \in F, \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{t=0}^{T_{\text{day}}^{\text{takt}}-1} \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L y_{ftml} &\leq C_{\text{tow}}, t = 0, 1, \dots, \\ T_{\text{day}}^{\text{takt}} - 1; m &= 1, \dots, M; l = 1, \dots, L; \forall f \in F, \end{aligned} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{f=1}^F \sum_{t=0}^{T_{\text{day}}^{\text{takt}}-1} \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L y_{ftml} - \sum_{t=0}^{T_{\text{day}}^{\text{takt}}-1} \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L k_{tml} &= 0, \\ l = 1, \dots, L; m &= 1, \dots, M; f = 1, \dots, F; \\ t &= 0, \dots, T_{\text{day}}^{\text{takt}} - 1, \end{aligned} \right. \quad (7)$$

$$y_{ftml} = 0, \forall f \in F; m \in M; l \in L; t > (f-1)B, \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{aligned} C_{\text{Stock}} &= \\ Q_c \sum_{f=1}^F \left(\sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L (a_{ml0} - \right. \\ &\quad \left. \gamma_{ml} \left(\sum_{r=1}^R S_{mlr} x_{fr} \right) / V_{\text{tow}} + (f-1)B \right) + \\ &\quad \sum_{\tau=1}^f \sum_{t=0}^{(f-1)B} y_{\tau tml} + q_{ml} \sqrt{B} \sigma_{ml}^c (1 + \delta), \\ l &= 1, \dots, L; m = 1, \dots, M; \\ f &= 1, \dots, F; r = 1, \dots, R, \end{aligned} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{aligned} -q_{ml} \cdot \sum_{\tau=1}^f \sum_{t=0}^{(f-1)B} y_{\tau tml} &\leq \\ a_{ml0} - (f-1) \cdot B + q_{ml} \sqrt{B} \sigma_{ml}^c \cdot (1 + \delta) &- \\ \gamma_{ml} \cdot \left(\sum_{r=1}^R S_{mlr} x_{fr} \right) / V_{\text{tow}}, & \\ l = 1, \dots, L; m &= 1, \dots, M; \\ f &= 1, \dots, F; r = 1, \dots, R, \end{aligned} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{t=0}^{T_{\text{day}}^{\text{takt}}-1} \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M y_{ftml} &\geq \eta \cdot C_{\text{tow}}, t = 0, 1, \dots, \\ T_{\text{day}}^{\text{takt}} - 1; m &= 1, \dots, M; l = 1, \dots, L; \forall f \in F, \end{aligned} \right. \quad (11)$$

$$0 \leq \delta \leq 5, \quad (12)$$

$$(13)$$

$$x_{jr} \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, J; r = 1, \dots, R, \quad (14)$$

$$\begin{cases} y_{fml} \in \{0, 1\}; m = 1, \dots, M; l = 1, \dots, L; \\ t = 0, \dots, T_{\text{day}}^{\text{takt}} - 1; \forall f \in F, \end{cases} \quad (15)$$

$$K_{\text{an}}^{ml} \geq c_{ml} \cdot \overline{LT}(1 + \delta), \quad (16)$$

$$\overline{LT} = B, \quad (17)$$

$$c_{ml} = \frac{1}{q_m} \cdot \sum_{i=1}^N P_{im} d_{il}, \quad (18)$$

$$\bar{K}_{\text{an}}^{ml} \geq (c_{ml} \cdot LT_{ml}) + \delta \cdot \sqrt{LT_{ml}} \cdot \sigma_{ml}^c, \quad (19)$$

$$\sigma_{ml}^c = \frac{1}{q_m} \sqrt{\sum_{i=1}^N (P_{im} \sigma_{il}^d)^2}, \quad (20)$$

$$F_{ml} = \frac{c_{ml} \cdot T_{\text{day}}^{\text{takt}}}{\text{ceil}[c_{ml} \cdot B]}, \quad (21)$$

$$LT_{ml} = \frac{T_{\text{day}}^{\text{takt}}}{F_{ml}}. \quad (22)$$

上述模型中, 式(1)–(14)为多载量小车配送模型: 目标函数(1)为最小化配送成本与库存成本; 约束(2)与约束(3)分别为配送人员与配送次数计算公式; 约束(4)表示只有生成运输指令的工位才需零部件补充, 运输指令元素只执行一次搬运; 约束(5)表示每次搬运只能选择一条循环路径; 约束(6)表示一次搬运量不得超过小车容量; 约束(7)表示搬运结束即完成所有运输指令; 约束(8)为不允许提前搬运; 约束(9)为线边库存计算公式; 约束(10)表示不允许缺货; 约束(11)保证小车每次搬运装载率; 约束(12)–(14)定义变量性质.

式(15)–(17)为传统丰田看板估算模型; 与传统丰田估算看板不同的是, 改进看板估算模型即式(18)–(21)摒弃了零件提前期一致的理论假设, 采用差异化提前期估算看板数量, 从而更加贴近实际混流装配线看板需求. 式(18)表示根据不同的零部件提前期估算看板数量; 式(19)表示零件需求标准差估计; 式(20)表示不同零件的搬运次数; 式(21)表示不同零件的搬运提前期不同.

3 拉格朗日松弛算法(Lagrangian relaxation algorithm)

3.1 松弛决策约束(Relaxing decision constraints)

由于小车配送模型结构特殊, 只有式(9)与式(10)均包含变量 δ 与变量 $x_{fr}, y_{\tau tml}$, 其他约束仅包含其中一个变量, 为充分利用该结构性, 问题模型(P)通过松弛约束(10)可重构为拉格朗日松弛问题(LR), (LR)目标函数为

$$\begin{aligned} \min = & \sum_{f=1}^F \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \{(\lambda_{fml} - 1) \cdot (\gamma_{ml}/V_{\text{tow}}) \cdot \\ & (\sum_{r=1}^R S_{mlr} x_{fr}) + (1 - \lambda_{fml}) \cdot q_{ml} \sum_{\tau=1}^f y_{\tau tml} + \\ & (1 - \lambda_{fml}) \cdot q_{ml} \delta \sqrt{B} \sigma_{ml}^c + (1 - \lambda_{fml}) \cdot (a_{ml0} - \\ & \gamma_{ml}(f - 1)B + q_{ml} \sqrt{B} \sigma_{ml}^c)\}. \end{aligned} \quad (23)$$

拉格朗日对偶问题(LD)为

$$\begin{aligned} \max_{\{\lambda_{fml}\}} \{ \min = & \sum_{f=1}^F \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L (\lambda_{fml} - 1) \cdot \\ & (\frac{\gamma_{ml}}{V_{\text{tow}}}) \cdot (\sum_{r=1}^R S_{mlr} x_{fr}) + (1 - \lambda_{fml}) \cdot \\ & q_{ml} \sum_{\tau=1}^f y_{\tau tml} + (1 - \lambda_{fml}) \cdot q_{ml} \delta \sqrt{B} \sigma_{ml}^c + (1 - \\ & \lambda_{fml}) \cdot (a_{ml0} - \gamma_{ml}(f - 1)B + q_{ml} \sqrt{B} \sigma_{ml}^c)\}. \end{aligned} \quad (24)$$

求解等式(23)拉格朗日对偶问题, 其解为原问题提供下界. LD问题可以分解为子问题S1与S2.

LD子问题S1:

$$\begin{aligned} \min \sum_{f=1}^F \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L (1 - \lambda_{fml}) \cdot (-\gamma_{ml}(f - 1)B + \\ q_{ml} \sqrt{B} \sigma_{ml}^c + a_{ml0}) - \sum_{f=1}^F \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L (\gamma_{ml}(1 - \lambda_{fml}) \cdot \\ (\sum_{r=1}^R S_{mlr} x_{fr})/V_{\text{tow}}) + (\sum_{f=1}^F \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L (1 - \lambda_{fml}) \cdot \\ \sqrt{B} \sigma_{ml}^c q_{ml}) \cdot \delta. \end{aligned} \quad (25)$$

为便于矩阵计算, 常数部分用一个标量表示, 该目标函数等价于目标函数

$$\begin{aligned} \min (\sum_{f=1}^F \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L (1 - \lambda_{fml}) \cdot \sqrt{B} \sigma_{ml}^c q_{ml}) \cdot \delta + \\ \text{value} + \sum_{f=1}^F \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L (\gamma_{ml}(\lambda_{fml} - 1) \cdot \\ (\sum_{r=1}^R S_{mlr} x_{fr}))/V_{\text{tow}}, \end{aligned} \quad (26)$$

s.t. 式(5)(12)与(13).

LD子问题S2:

$$\begin{aligned} \min \sum_{f=1}^F \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L q_{ml} \cdot \sum_{\tau=1}^f \sum_{t=0}^{(f-1)B} y_{\tau tml} - \\ \sum_{f=1}^F \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \lambda_{fml} \cdot q_{ml} \sum_{\tau=1}^f \sum_{t=0}^{(f-1)B} y_{\tau tml} = \end{aligned}$$

$$\min \sum_{f=1}^F \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L q_{ml}(1 - \lambda_{fml}) \sum_{\tau=1}^f \sum_{t=0}^{(f-1)B} y_{\tau tml}, \quad (27)$$

s.t. (4)(6)–(8)(11)(14).

子问题S1只包含变量 δ 与变量 x_{fr} , 变量为非负, 因此S1模型为混合整数规划模型; 子问题S2仅包含变量 y_{fml} , 变量为整数且非负, 因此S2模型为整数规划模型, 两个子问题均采用MATLAB混合整数规划求解函数求解。

3.2 构造可行解(Construction of a feasible solution)

由于对偶问题获取的解为原问题的下界, 可能违反耦合约束(10), 对于原问题通常是不可行的, 因此需要将不可行的解可行化, 从而获取原问题的上界。

构造可行解的步骤如下: 第1步, 因为搬运越往后, 搬运出现缺货的几率越高, 越不易满足约束(10), 因此按照搬运次序由后到前, 在每次搬运中, 按照搬运路径由短到长的顺序, 在下界中选取短路径 x_{jr} 与长路径 $x_{jr'}$ 互换, 放松式(10)右侧约束。第2步, 由于S1中, 求解获取的连续变量 δ 过小, 无法满足约束(10), 因此将第1步交换后的下界解集中的安全因子以0.0135步长逼近最小化最大安全因子, 以尽可能小的安全库存成本增幅获取原问题的可行解。第3步, 如果仍然没有可行解, 返回第1步继续变量值 x_{jr} 互换, 同时 δ 上界以一定步长(取值0~0.3)下降, 以逼近最小化最大安全因子, 一旦找到可行解, 终止解可行化。

3.3 次梯度算法(Subgradient algorithm)

在计算拉格朗日对偶问题时, 采用次梯度方法进行拉格朗日乘子更新

$$\lambda_{fml}^{k+1} = \max\{0, \lambda_{fml}^k + \beta_{fml}^k\}, \quad (28)$$

$$\beta_{fml}^k = \beta_{fml}^0 \cdot \rho^k \times s_{fml}. \quad (29)$$

式(28)可保证尽快获取一个可接受的下界, 使得步长以指数速度下降, 减少迭代次数。

次梯度计算公式为

$$s_{fml} = \gamma_{ml} \cdot \left(\left(\sum_{r=1}^R S_{mlr} x_{fr} \right) / V_{\text{tow}} + (f-1) \cdot B \right) - (a_{ml0} + q_{ml} \sqrt{B} \sigma_{ml}^c) - q_{ml} \sum_{\tau=1}^f \sum_{t=0}^{(f-1)B} y_{\tau tml} + q_{ml} \sqrt{B} \sigma_{ml}^c \delta. \quad (30)$$

3.4 随机步长算法(Random step algorithm)

针对基于次梯度优化的拉格朗日松弛算法收敛

较慢的特点, 提出了加速收敛的随机步长算法, 步长 β^h 设置为随机步长而非指数变化步长。拉格朗日乘子更新如下:

$$\lambda_{fml} = \max\{0, \lambda_{fml} + \omega\}, \quad (31)$$

$$\omega = \theta \cdot \text{rand}(1), \quad (32)$$

其中rand(1)表示生成取值0~1的数值, 避免过早收敛影响解质量, θ 根据实验选取合适值, 保证乘子取值不过大且算法具有较好的收敛性。

3.5 拉格朗日松弛算法步骤(Steps for Lagrangian relaxation algorithm)

步骤1 设置 ρ, β_{fml}^0 初始值, 拉格朗日乘子 λ^h 初始值, 当前上界与下界值, UB与LB。

步骤2 松弛问题(P)的约束(10), 建立拉格朗日对偶问题(LD)。将LD分解为子问题S1与S2。

步骤3 子问题S1加入约束(32)后对子问题S1采用MATLAB求解; 然后将上述求解得到的确定值带入原问题求解问题(P), 如果解为最优或小于上界, 则将其设为新的上界。

步骤4 对S2使用与步骤3相同处理方法。

步骤5 整合步骤3与步骤4中子问题的最优解, 如果之和大于下界, 设置其为新的下界。

步骤6 核查停止规则, 如果连续两次求解下界差值大于0.1, 那么计算 β^h 更新拉格朗日乘子, $\lambda^{h+1} = \max(0, \lambda^h + \beta^h)$, 设置 $h = h+1$, β^h 为步长。

步骤7 如果找到近似最优解, 过程终止, $z^* = UB$, 并计算 $GAP1 = (UB - LB)/LB$ 。

$$q_{ml} \sqrt{B} \sigma_{ml}^c (1 + \delta) - \gamma_{ml} \cdot \left(\left(\sum_{r=1}^R S_{mlr} x_{fr} \right) / V_{\text{tow}} + a_{ml0} + (f-1) \cdot B \right) \geq \text{constant}. \quad (33)$$

在计算步骤3, 由于最小化S1子问题时连续变量 δ 在其中的取值始终为0致使下界过低, 因此加入约束(32)保证下界不会过低且收敛较快。

4 实验与分析(Experiments and analysis)

本文采用主频2.5 GB, 内存为4 GB的PC电脑进行仿真实验。首先采用LINGO分枝定界算法验证改进看板模型的优越性, 然后通过MATLAB编程实现拉格朗日松弛简化多载量小车配送模型求解。

案例以一家汽车企业的混流装配线为研究对象。3条并行的直线装配线生产7种汽车: 3种混合汽车模型与4种城市汽车模型。装配线1, 2, 3分别装配产品1, 2, 3; 产品4, 5与产品6, 7。每种产品的物料清单中均有15种零部件。系统的配送调度均由JIT-看板策略控制并由多载量小车在库存超市与装配线之间

来回搬运实现. 小车一次循环搬运行程长312 m.

表1与表2分别给出了案例研究所需信息: 产品配比、7种装配产品的物料清单表、库存量单位(SKU)容量 q_m 与零部件消耗量 γ_{ms} .

多载量小车的特征参数设置如下: 小车容量 $C=10$ SKU, 平均速度 $V_{tow} = 0.5$ m/s; 一辆汽车的出产时间 $1 \text{ takt} = 60$ s, 小车运行速度 $V_{tow} = 30$ m/takt, 则小车一次循环时间 $T_{travel} = 10.4$ takt. 小车装载率 $\eta = 50\%$; 为简化成本计算, 搬运间隔时间 $B = 1$ takt, 库存成本 $Q_c = 1$ RMB/SKU. 每天多载量小

车运营成本(包括操作者工资) $C_{tow} = 2000$ RMB, 生产线平准化生产量 N^{takt} 取值为6 takt/day.

表 1 产品需求与配比

Table 1 Products demand and proportion

市场需求	装配线1			装配线2		装配线3	
	1	2	3	4	5	6	7
d_{ml}	0.2	0.3	0.5	0.5	0.6	0.3	0.7
需求量/pcs	2	4	6	6	6	4	8
$\sigma_{ml}^d / (\text{pcs} \cdot \text{takt}^{-1})$	0.4	0.8	1.2	1.2	1.2	0.8	1.6

表 2 装配线产品物料清单

Table 2 The BOM of products in lines

零部件编号	箱容量/units	平均耗率/(units·s ⁻¹)			装配线1/units			装配线2/units		装配线3/units	
		生产线1	生产线2	生产线3	产品1	产品2	产品3	产品4	产品5	产品6	产品7
		1	8	1	1	0.67	1	—	1	2	—
2	9	0.67	2	0.83	—	1	1	1	3	2	—
3	6	1.33	2	0.17	1	—	—	2	2	2	1
4	4	1	1	1.17	2	1	1	2	—	1	1
5	6	1.33	1.5	1.17	—	2	1	1	2	—	2
6	8	0.67	0.5	0.17	1	—	—	—	1	—	1
7	12	0.67	1.5	1.17	1	—	2	2	1	2	—
8	8	2	1	2.33	1	5	1	2	—	—	3
9	24	2.33	3.5	1.5	2	2	1	3	4	1	3
10	12	1.33	1.5	0.83	—	1	1	—	3	2	1
11	6	0.67	2	0.5	3	—	—	2	2	2	—
12	15	0.67	1.5	2.17	—	5	1	3	—	—	1
13	8	1.33	2	1.67	1	—	3	1	3	2	1
14	10	1.67	3	0.83	—	1	1	4	2	3	1
15	12	1.33	3	0.67	2	1	—	2	4	—	2

4.1 看板优化结果(The optimized result of kanban)

Marco Bortolini已经通过仿真实验证明了改进看板模型计算结果更接近仿真结果, 更适用于混流装配线的看板估算. 根据图2, 不难发现, 不同零部

件所需看板数量是有差异的; 改进看板模型的看板需求总量119较丰田公式估算量135少, 即意味着采用改进模型的生产线在制品更少. 实验结果再次验证Marco Bortolini等人的研究结论, 采用改进看板估算模型获取的估算结果更好.

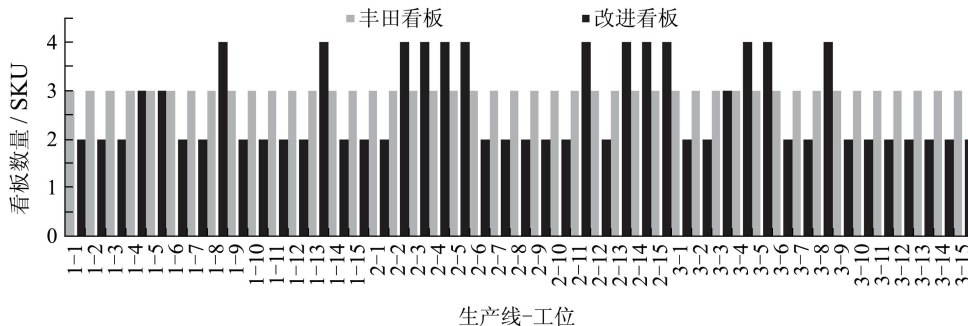


图 2 看板优化结果

Fig. 2 The optimized result of kanban

4.2 复杂性分析(Complex analysis)

由文献[1]可知, 混流装配线多载量小车配送决策问题属于NP-hard问题, 因此该整合问题也属于NP-hard问题. 在给定产品需求下生成相应的运输命令集合为 $K_1 = \{k_{tml} | k_{tml} = 1\}$, 由约束(3)可知, 搬运最大频次 $F = f(k_{tml})$, $|K_1| \gg f(k_{tml})$. 该问题解空间为 $h(r, f, k_{tml}) = |R|^{f(K_1)} \cdot |K_1|$.

经计算得, 分支定界算法时间复杂度为

$$O((|K_1| + |R| \cdot f(k_{tml})) \cdot 2^{(|K_1| + |R| \cdot f(k_{tml}))}).$$

LR算法的时间复杂度为

$$O(|K_1| \cdot 2^{|K_1|} + f(k_{tml}) \cdot |R| \cdot 2^{f(k_{tml}) \cdot |R|} + 4 \cdot f(k_{tml})^2).$$

4.3 拉格朗日松弛算法(Lagrangian relaxation algorithm)

本实验设定 ρ 初始值为0.2, β_{fml}^0 与 θ 初始值为0.3. 以节拍 N^{takt} 选取 $|M| = \{5, 10, 15\}$ 3种典型的不同规模的物料清单, 也表示不同工位数即不同长度循环路径进行实验.

为有效地评价算法性能, 本文选取求解时间, 下界解质量作为算法评价指标. 求解质量优劣分别通过GAP1与GAP2指标衡量, $GAP1 = \frac{UB - LB}{LB}$, $GAP2 = \frac{LB' - LB}{LB}$. GAP1为算法的对偶间隙, GAP2为评判算法获取下界紧松程度指标, 其值越大表示下界越紧, LB为采用次梯度算法获取的下界值.

对单条生产线上工位数为5, 10, 15的中大规模问题, 分支定界, 次梯度拉格朗日松弛与随机步长拉格朗日松弛算法的求解结果如表3所示. 次梯度, 随机步长拉格朗日算法在该处分别用TDLR_number, RDMLR_number表示.

从表3可知, 1) RDMLR算法的波动性较大, 对于较小规模问题, 对偶间隙高达0.46, 其下界收敛效果比TDLR算法差; 但是对于中大规模问题, 其下界求解结果均比TDLR算法效果好, 且随着问题规模的增大对偶间隙越小, 因此从计算综合角度来说, RDMLR与TDLR算法对多路径多载量小车问题是比较适用的. 2) 对于中大规模问题, 采用RDMLR算法获取的下界更紧, 可能是因为采用次梯度收敛时下界变动比RDMLR算法的下界变动缓慢, 而RDMLR算法的波动性较大避免陷入缓慢收敛的状态. 3) 结合表4, 大规模问题求解时间随着问题规模急剧增大, LR算法的求解效率较低.

图3为对不同物料清单 $|M| = \{5, 10, 15\}$ 分别采用B&B, RDMLR与TDLR算法的计算时间比较图.

由图3知, 对于较小规模问题, 3种算法的求解时间基本相等; 但是对于中大规模问题, 拉格朗日松弛(LR)算法的计算时间明显比B&B算法短, 而B&B算法求解质量最好; RDMLR算法的计算时间比TDLR略长, 但其求解结果比TDLR算法好.

表3 求解结果

Table 3 The solving results

M = 5	下界/RMB	求解时间/s	GAP1/%
1	744.89	1.18	33.39
2	626.89	1.18	58.5
3	650.89	1.23	52.65
4	732.89	1.12	35.57
5	639.89	1.23	55.28
6	634.89	1.24	56.5
RDMLR_5	682.99	1.23	46.05
TDLR_5	740.18	1.18	34.23
GAP2/%		-7.73	
M = 10	下界/RMB	求解时间/s	GAP1/%
1	3105.7	5.02	2.84
2	2714.7	4.59	17.65
3	2925.7	4.73	9.16
4	2833.7	4.72	12.71
5	2893.7	5.67	10.37
6	3052.7	4.98	4.62
RDMLR_10	2960.8	4.86	8.05
TDLR_10	2784.7	4.63	14.69
GAP2/%		6.32	
M = 15	下界/RMB	求解时间/s	GAP1/%
1	7133.17	23.53	3.04
2	7224.17	22.59	1.74
3	7181.17	23.96	2.35
4	7165.17	23.88	2.58
5	7177.17	22.54	2.41
6	7109.17	22.24	3.39
RDMLR_15	7181.77	23.02	2.34
TDLR_15	7011.17	21.59	4.83
GAP2/%		2.43	

表4 大规模问题求解效果

Table 4 The solving performance of the large scale problem

规模 [M L T _{takt} ^{day} F]	TDLR		RDMLR	
	GAP1/%	求解时间/s	GAP1/%	求解时间/s
[3 5 24 26]	12.42	43.21	8.14	55.81
[3 10 24 26]	8.45	139.23	5.06	191.76
[3 15 24 26]	2.58	162.94	5.37	256.667
[3 15 36 39]	5.12	850.34	2.53	758.34

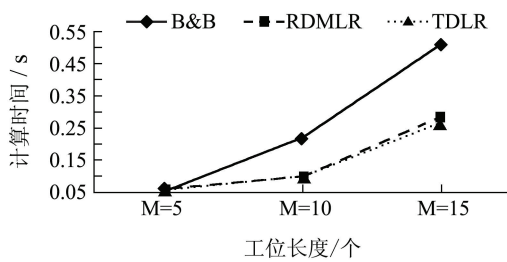


图3 3种算法计算时间比较

Fig. 3 Comparisons of computation time between three algorithms

综合以上分析, 1) 在B&B, RDMLR与TDLR这3种算法对3种不同规模问题的求解中, TDLR求解质量均较好且求解时间增幅最小, 其稳定性最好; 2) 对于中大规模问题, RDMLR算法求解质量比TDLR算法更好; 3) 产品物料清单对模型的求解时间与质量有一定的影响, 产品物料清单所需零部件种类越多, 下界越紧, 求解时间越长。这是因为随着零部件种类越多, 多载量小车装载限制也会随着增多, 相应的符合的组合数量也会减少, 从而使得模型更容易获得较优的调度结果; 而问题规模越大, 其复杂性也随之增大, 因此求解时间也随之变长; 4) 在小规模问题求解中, 3种算法求解时间基本一致, 但是B&B算法求解质量最好; 在中大规模问题中, 虽然LR算法求解效率高于B&B, 但是只能获得近似最优解; 对于大规模问题, LR算法求解效率较低且下界解质量不稳定, 验证了随着问题规模增大, 每步迭代子问题的精确求解与算法本身的震荡导致了求解效率低与收敛速度慢。

5 结论(Conclusions)

提出了看板系统控制下的多循环路径多载量小车配送调度方法, 将多载量小车物料配送问题与看板优化问题相结合建立了其调度数学规划模型。并提出了求解调度数学规划模型的两类拉格朗日松弛启发式算法, 并用数值实验方法验证了两种算法的适用性与各自的优越性。由于影响装配线的因素繁杂, 后续研究可以考虑更多配送系统的影响因素更适应实际生产环境; 也可考虑求解大规模问题的新调度方法, 如人工智能算法。

参考文献(References):

- [1] BATTINI D, FACCIO M, PERSONA A, et al. Design of the optimal feeding policy in an assembly system [J]. *International Journal of Production Economics*, 2009, 121(1): 233 – 254.
- [2] CHOI W, LEE Y. A dynamic part-feeding system for a automotive assembly line [J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2002, 43(1): 123 – 134.
- [3] GOLZ J, GUJJULA R, GÜNTHER H O, et al. Part feeding at high-variant mixed-model assembly lines [J]. *Flexible Services and Manufacturing Journal*, 2012, 24(2): 119 – 141.
- [4] EMDE S, BOYSEN N. Optimally routing and scheduling tow trains for JIT-supply of mixed-model assembly lines [J]. *European Journal of Operational Research*, 2012, 217(2): 287 – 299.
- [5] EMDE S, FLIEDNER M, BOYSEN N. Optimally loading tow trains for just-in-time supply of mixed-model assembly lines [J]. *IIE Transactions*, 2012, 44(2): 121 – 135.
- [6] FACCIO M, GAMBERI M, PERSONA A, et al. Design and simulation of assembly line feeding systems in the automotive sector using supermarket, kanbans and tow trains: a general framework [J]. *Management Control*, 2013, 24(2): 187 – 208.
- [7] FACCIO M, GAMBERI M, PERSONA A. Kanban number optimisation in a supermarket warehouse feeding a mixed-model assembly system [J]. *International Journal of Production Research*, 2013, 51(10): 2997 – 3017.
- [8] BORTOLINI M, FERRARI E, GAMBERI M, et al. New kanban model for tow-train feeding system design [J]. *Assembly Automation*, 2015, 35(1): 128 – 136.
- [9] ZHOU Binghai, ZHONG Zhenyi. Lagrangian relaxation algorithm for scheduling problems of reentrant hybrid flow shops [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(7): 881 – 886. (周炳海, 钟臻怡. 可重入混合流水车间调度的拉格朗日松弛算法 [J]. *控制理论与应用*, 2015, 32(7): 881 – 886.)
- [10] TU Guoyu, SONG Shiji. Stochastic model for total cost optimization in street lamp maintenance and its probabilistic Lagrangian relaxation method [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(3): 407 – 413. (涂国煜, 宋士吉. 路灯维护总费用随机优化模型及其概率分布拉格朗日松弛方法 [J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(3): 407 – 413.)
- [11] FISHER M L. The lagrangian relaxation method for solving integer programming problems [J]. *Management Science*, 2004, 50(12): 1861 – 1871.
- [12] PENG Tao, ZHOU Binghai. Just-in-time distribution algorithm of line-side parts for automobile assembly lines [J]. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(6): 779 – 786. (彭涛, 周炳海. 车辆装配线边物料准时化配送算法 [J]. *控制理论与应用*, 2016, 33(6): 779 – 786.)

作者简介:

周炳海 (1965–), 男, 博士, 工业工程研究所所长, 博士生导师, 主要从事离散系统建模、调度与仿真等方向的研究, E-mail: bhzhou@tongji.edu.cn;

胡理媛 (1993–), 女, 博士研究生, 主要从事智能优化和生产系统建模、调度等方向的研究, E-mail: 1415992769@qq.com.