

DOI: 10.7641/CTA.2018.60650

线性广义系统的最优和鲁棒满阶平滑器

窦寅丰, 孙书利[†], 冉陈键

(黑龙江大学 电子工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要: 对于线性离散随机广义系统, 利用增广状态方法将平滑器问题转化为增广状态的滤波器问题. 基于极大似然线性估计准则, 提出了最优的满阶平滑器, 其中增广状态滤波器的误差方差阵满足广义Riccati方程. 当线性离散广义系统的过程噪声和观测噪声的方差不确定时, 基于极大极小鲁棒设计原理和最优满阶平滑算法, 得到了鲁棒满阶平滑器. 应用动态误差方差分析方法证明了其鲁棒性, 即鲁棒平滑误差方差阵存在一个上界方差矩阵. 数值仿真例子验证了其有效性和正确性.

关键词: 广义系统; 最优满阶平滑器; 鲁棒满阶平滑器; 鲁棒性; 动态误差方差分析方法

引用格式: 窦寅丰, 孙书利, 冉陈键. 线性广义系统的最优和鲁棒满阶平滑器. 控制理论与应用, 2018, 35(2): 207 – 214

中图分类号: O211.64 文献标识码: A

Optimal and robust full-order smoothers for linear descriptor systems

DOU Yin-feng, SUN Shu-li[†], RAN Chen-jian

(Electronic Engineering College, Heilongjiang University, Harbin Heilongjiang 150080, China)

Abstract: For the linear discrete stochastic descriptor systems, the smoothing problem has been transformed to the filtering problem of one augmented state. Based on the maximum likelihood (ML) linear estimation criterion, the optimal full-order smoothers are presented, where the filtering error variance of the augmented state is presented based on the descriptor Riccati equation. When the variances of the process noise and the measurement noise of the descriptor systems are uncertain, robust full-order smoothers are obtained based on the max-min robust design theory and the optimal full-order smoothing algorithm. Applying the dynamic error variance analysis (DEVA) method, the robustness is proved, i.e., the variance matrices of the robust smoothers have upper bound variance matrices. Simulation example verifies the effectiveness.

Key words: descriptor systems; optimal full-order smoothers; robust full-order smoothers; robustness; dynamic error variance analysis (DEVA) method

Citation: DOU Yinfeng, SUN Shuli, RAN Chenjian. Optimal and robust full-order smoothers for linear descriptor systems. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(2): 207 – 214

1 引言(Introduction)

广义系统也即奇异系统^[1], 它能够更准确的刻画和表达一些复杂的系统, 如投入产出经济系统、电路系统、飞行器系统、电力系统等. 正常系统可以看作广义系统的特殊形式. 正常系统的状态估计问题已经得到了深入的研究, 且广义系统的状态估计问题也得到了广泛的关注. 处理广义系统滤波问题的方法主要有降阶滤波方法^[2-3]、满阶Kalman滤波方法^[4-5]和满阶Wiener滤波方法^[6-7]. 降阶Kalman滤波方法是利用线性变换将广义系统状态空间表达式转化为两个互

耦的降阶正常系统, 再基于经典Kalman滤波方法得到其最优的Kalman滤波器. 满阶Kalman滤波方法是利用极大似然估计准则, 得到基于广义Riccati方程的递推Kalman滤波器^[4-5]. 满阶Wiener滤波器则是基于现代时间序列分析方法, 需要求解广义系统的新息模型. 对于离散广义系统的平滑器问题, 文献[8]先将广义系统转化为带邻近相关噪声的正常系统, 从而求解该正常系统的平滑器. 本文利用增广状态方法, 将广义系统的平滑器问题转化为增广状态的滤波器问题, 再基于极大似然估计准则提出该增广状态的递推满阶滤

收稿日期: 2016-08-30; 录用日期: 2018-01-04.

[†]通信作者. E-mail: sunsl@hlju.edu.cn.

本文责任编辑: 张焕水.

国家自然科学基金项目(61573132, 61203121), 黑龙江省普通高等学校电子工程重点实验室(黑龙江大学)开放课题(DZGC201605), 2017年度黑龙江省省属高等学校基本科研业务费科研项目资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61573132, 61203121), the Key Laboratory of Electronics Engineering of Heilongjiang Province (Heilongjiang University) (DZGC201605) and the 2017 Basic Scientific Research Project in Heilongjiang Province.

波器.

经典Kalman滤波方法^[9]假设系统模型和噪声方差都精确已知. 但是, 当系统模型参数或噪声方差不确定时, Kalman滤波器的性能较差甚至发散. 这一缺点推动了鲁棒滤波器的发展^[10-13]. 鲁棒滤波器的设计原理是寻求一个滤波器, 使得由所容许的不确定性引起的实际滤波方差被保证存在一个最小上界. 解决鲁棒滤波问题主要有3种方法: Riccati方程方法^[10]、线性矩阵不等式方法^[11]和Lyapunov方程方法^[12]. 已有文献^[10-11]的局限性是仅限于模型参数是不确定的非广义系统, 文献^[12-13]针对带不确定参数和噪声方差非广义系统提出了一种鲁棒Kalman滤波器, 并利用Lyapunov方程方法和动态误差方差系统分析方法证明了其鲁棒性. 对于带不确定噪声方差的广义系统^[14], 一种极大极小鲁棒滤波器被提出. 它提出的是一种降阶处理的方法, 且采用博弈论的方法证明了其估值性能, 证明方法比较复杂. 而对于带不确定噪声方差的广义系统的鲁棒满阶平滑估计问题, 目前还没有解决.

因此, 本文分别针对带已知噪声统计和不确定噪声统计的广义系统, 分别研究其最优和鲁棒满阶平滑器问题.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑如下线性离散随机广义系统:

$$Mx(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma w(k), \quad (1)$$

$$y(k+1) = Hx(k+1) + v(k), \quad (2)$$

其中: k 是离散时间, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 是状态, $w(k) \in \mathbb{R}^r$ 是过程噪声, $y(k) \in \mathbb{R}^m$ 和 $v(k) \in \mathbb{R}^m$ 分别是观测和观测噪声, M, Φ, Γ 和 H 为相应维数的常矩阵.

假设 1 M 是奇异矩阵, 且系统是正则的, 即 $\det(zM - \Phi) \neq 0$, z 为任意复数.

假设 2 系统完全可观, 即对于任意复数 z ,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} zM - \Phi \\ H \end{bmatrix} = n, \text{rank} \begin{bmatrix} M \\ H \end{bmatrix} = n. \quad (3)$$

假设 3 过程噪声 $w(k)$ 和观测噪声 $v(k)$ 是带零均值、方差分别为 Q_w 和 Q_v 的不相关高斯白噪声, 即

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^T(k) & v^T(k) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q_w & \mathbf{0}_{r \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times r} & Q_v \end{bmatrix} \delta_{tk}, \quad (4)$$

其中: 符号 E 代表数学期望, 上标 T 代表矩阵转置, δ_{tk} 是Kronecker delta函数, 满足 $\delta_{tt} = 1, \delta_{tk} = 0(t \neq k)$, $\mathbf{0}_{n \times r}$ 代表 $n \times r$ 维的零矩阵.

假设 4 初值 $x(0)$ 为独立于 $w(k)$ 和 $v(k)$ 的高斯随机变量, 其均值为 μ_0 , 方差为 $P_0 > \mathbf{0}_{n \times n}$.

问题是如何获得线性离散随机广义系统(1)和(2)的最优满阶平滑器 $\hat{x}(k-N|k)(N > 0)$, 以及当噪声方差不确定时, 如何获得其鲁棒满阶平滑器 $\hat{x}_r(k-N|k)(N > 0)$.

3 最优满阶平滑器(Optimal full-order smoothers)

基于增广状态方法, 将广义系统(1)–(2)的最优满阶平滑器问题转化为最优满阶滤波器问题.

考虑如下未知 n 维向量 x 的估计问题

$$y = Hx + v, \quad (5)$$

其中: $y \in \mathbb{R}^p$ 为观测向量, v 为均值为零、方差为 R 的高斯随机向量.

引理 1^[4,15] 对于观测方程(5), 当 $\text{rank}[H] = \text{dim}(x)$ 时, 状态 x 存在唯一的极大似然估计 \hat{x}_{ML} 为

$$\hat{x}_{ML} = [\mathbf{0} \quad I] \begin{bmatrix} R & H \\ H^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} I \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} y, \quad (6)$$

其估值误差方差阵为

$$P_{ML} = -[\mathbf{0} \quad I] \begin{bmatrix} R & H \\ H^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ I \end{bmatrix}. \quad (7)$$

引入增广状态 $x_a(k)$ 、增广观测 $y_a(k)$ 和增广观测噪声 $v_a(k)$ 为

$$x_a(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-1) \\ \vdots \\ x(k-N) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$y_a(k+1) = \begin{bmatrix} y(k+1) \\ y(k) \\ \vdots \\ y(k-N+1) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$v_a(k) = \begin{bmatrix} v(k) \\ v(k-1) \\ \vdots \\ v(k-N) \end{bmatrix}, \quad N > 0. \quad (10)$$

由此可以得到增广状态系统为

$$M_a x_a(k+1) = \Phi_a x_a(k) + \Gamma_a w(k), \quad (11)$$

$$y_a(k+1) = H_a x_a(k+1) + v_a(k), \quad (12)$$

其中:

$$M_a = \begin{bmatrix} M & \mathbf{0}_{n \times n} & \cdots & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & M & \cdots & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \cdots & \mathbf{0}_{n \times n} & M \end{bmatrix},$$

$$\Phi_a = \begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{0}_{n \times n} & \cdots & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ M & \mathbf{0}_{n \times n} & \cdots & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & M & \cdots & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \cdots & M & \mathbf{0}_{n \times n} \end{bmatrix}, \Gamma_a = \begin{bmatrix} \Gamma \\ \mathbf{0}_{n \times r} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{n \times r} \\ \mathbf{0}_{n \times r} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_a \times n_a} \\ \mathbf{0}_{m_a \times n_a} \\ I_{n_a \times n_a} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$H_a = \begin{bmatrix} H & \mathbf{0}_{m \times n} & \cdots & \mathbf{0}_{m \times n} \\ \mathbf{0}_{m \times n} & H & \cdots & \mathbf{0}_{m \times n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0}_{m \times n} & \mathbf{0}_{m \times n} & \cdots & H \end{bmatrix}, \quad (13)$$

且由式(10)可得增广观测噪声 $v_a(k)$ 是零均值的白噪声, 其方差 $Q_{va} = E[v_a(k)v_a^T(k)] = Q_v I_{m_a \times m_a}$, 已知 $x_a(k) \in \mathbb{R}^{n_a}$, $y_a(k) \in \mathbb{R}^{m_a}$, 其中: $n_a = (N+1)n$, $m_a = (N+1)m$.

假设 5 初值 $x_a(0)$ 为独立于 $v(k)$ 和 $w(k)$ 的高斯随机变量, 其均值为 \bar{x}_{a0} , 方差为 $P_{a0} > \mathbf{0}_{n_a \times n_a}$.

定理 1 对于线性离散广义系统(1)-(2), 在假设1-5下, 其极大似然最优满阶平滑器 $\hat{x}(k-N|k)$ 为

$$\hat{x}(k-N|k) = H_s \hat{x}_a(k|k), \quad N > 0, \quad (14)$$

$$H_s = [\mathbf{0}_{n_a \times N n_a} \quad I_{n_a \times n_a}], \quad (15)$$

相应的平滑误差方差阵 $P(k-N|k)$ 为

$$P(k-N|k) = H_s P_a(k|k) H_s^T, \quad N > 0, \quad (16)$$

$$P(k-N|k) = E[(x(k-N) - \hat{x}(k-N|k)) \times (x(k-N) - \hat{x}(k-N|k))^T], \quad (17)$$

且增广状态 $x_a(k)$ 的满阶滤波器 $\hat{x}_a(k|k)$ 为

$$\hat{x}_a(k+1|k+1) = [\mathbf{0}_{n_a \times n_a} \quad \mathbf{0}_{n_a \times m_a} \quad I_{n_a \times n_a}] \times \begin{bmatrix} \Phi_a P_a(k|k) \Phi_a^T + \Gamma_a Q_w \Gamma_a^T & \mathbf{0}_{n_a \times m_a} & M_a \\ \mathbf{0}_{m_a \times n_a} & Q_{va} & H_a \\ M_a^T & H_a^T & \mathbf{0}_{n_a \times n_a} \end{bmatrix}^+ \times \begin{bmatrix} \Phi_a \hat{x}_a(k|k) \\ y_a(k+1) \\ \mathbf{0}_{n_a \times 1} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

其增广状态 $x_a(k)$ 的滤波误差方差阵 $P_a(k|k) = E[(x_a(k) - \hat{x}_a(k|k))(x_a(k) - \hat{x}_a(k|k))^T]$ 满足如下广义Riccati递推表达式:

$$P_a(k+1|k+1) = -[\mathbf{0}_{n_a \times n_a} \quad \mathbf{0}_{n_a \times m_a} \quad I_{n_a \times n_a}] \times \begin{bmatrix} \Phi_a P_a(k|k) \Phi_a^T + \Gamma_a Q_w \Gamma_a^T & \mathbf{0}_{n_a \times m_a} & M_a \\ \mathbf{0}_{m_a \times n_a} & Q_{va} & H_a \\ M_a^T & H_a^T & \mathbf{0}_{n_a \times n_a} \end{bmatrix}^+ \times$$

初值 $P_a(0|0) = P_{a0}$.

证 定义增广状态 $x_a(k)$ 的滤波误差 $\tilde{x}_a(k|k) = x_a(k) - \hat{x}_a(k|k)$, 可以得到

$$\Phi_a \hat{x}_a(k|k) = \Phi_a x_a(k) - \Phi_a \tilde{x}_a(k|k), \quad (20)$$

其中 $\tilde{x}_a(k|k)$ 为独立于 $w(k)$ 的零均值高斯变量, 其方差为 $P_a(k|k)$.

由式(11)可得到如下结果:

$$\Phi_a \hat{x}_a(k|k) = M_a x_a(k+1) - \Phi_a \tilde{x}_a(k|k) - \Gamma_a w(k). \quad (21)$$

结合式(12), 可以得到如下扩展的观测方程:

$$\begin{bmatrix} \Phi_a \hat{x}_a(k|k) \\ y_a(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_a \\ H_a \end{bmatrix} x_a(k+1) + \begin{bmatrix} -\Phi_a \tilde{x}_a(k|k) - \Gamma_a w(k) \\ v_a(k) \end{bmatrix}. \quad (22)$$

由假设2中的式 $\text{rank} \begin{bmatrix} M \\ H \end{bmatrix} = n$, 以及式(13)可得

$$\text{rank} \begin{bmatrix} M_a \\ H_a \end{bmatrix} = (N+1)n = \dim(x_a). \quad (23)$$

应用引理1, 对于方程(22)可以得到增广状态 $x_a(k)$ 的极大似然最优满阶滤波器如式(18)所示, 滤波误差方差阵如式(19)所示.

由式(8)和式(15)可以得到

$$x(k-N) = H_s x_a(k). \quad (24)$$

对式(24)两边同时取射影可以得到状态 $x(k)$ 的平滑器 $\hat{x}(k-N|k)$ 如式(14)所示. 式(24)减去式(14)可得到平滑误差为

$$\tilde{x}(k-N|k) = H_s \tilde{x}_a(k|k). \quad (25)$$

由此可以得到广义系统状态量的平滑误差方差阵 $P(k-N|k) = E[\tilde{x}(k-N|k)\tilde{x}^T(k-N|k)]$ 如式(16)所示. **证毕.**

注 1 本文利用增广状态方法将广义系统(1)-(2)的平滑器问题转化为增广状态广义系统(11)-(12)滤波器问题. 由式(8)和式(9)可知增广状态量 $x_a(k)$ 的维数为 $(N+1)n$, 增广观测量 $y_a(k)$ 的维数为 $(N+1)m$, 相比于原状态量和观测量的维数, 增大了 $N+1$ 倍. 因此在满阶平滑器的计算过程中, 计算量会大幅增加. 但是该方法是基于滤波算法直接得出的结果, 计算过程比较简单, 特别是当 N 较小时, 该算法还是可行的.

4 鲁棒满阶平滑器及其鲁棒性分析(Robust full-order smoothers and robustness analysis)

当广义系统(1)–(2)中的过程噪声 $w(k)$ 的方差 Q_w 和观测噪声 $v(k)$ 的方差 Q_v 都不确定时,用上述方法得到平滑器的性能较差,甚至易发散.为了解决该问题,提出如下鲁棒平滑算法.

4.1 鲁棒满阶平滑器(Robust full-order smoothers)

假设6 过程噪声 $w(k)$ 和观测噪声 $v(k)$ 是带零均值、未知不确定实际方差 Q_w 和 Q_v 的不相关白噪声,且满足如下不等式:

$$Q_w \leq \bar{Q}_w, Q_v \leq \bar{Q}_v, \quad (26)$$

其中 \bar{Q}_w 和 \bar{Q}_v 分别为 Q_w 和 Q_v 的已知保守上界,且带不确定噪声方差的增广状态 $x_a(k)$ 的实际估值方差阵初值 $P_{ar}(0|0)$ 有如下已知上界方差初值 $\bar{P}_a(0|0)$,也即

$$P_{ar}(0|0) \leq \bar{P}_a(0|0). \quad (27)$$

所谓的广义系统鲁棒平滑问题是指对带不确定噪声方差的系统设计一个平滑器 $\hat{x}_r(k-N|k)$,对所容许的满足式(26)和式(27)的不确定噪声方差 Q_w, Q_v 和不确定初值 $P_{ar}(0|0)$,使其相应的实际估计误差方差阵 $P_r(k-N|k)$ 保证存在最小的上界 $\bar{P}(k-N|k)$.

引理2^[16] 设 R 是半正定矩阵, U 是列满秩矩阵.于是有

$$[0 \quad I] \left(\begin{bmatrix} R & U \\ U^T & 0 \end{bmatrix}^\dagger + \begin{bmatrix} R & U \\ U^T & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R & U \\ U^T & 0 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = 0, \quad (28)$$

$$[0 \quad I] \begin{bmatrix} R & U \\ U^T & 0 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} = I. \quad (29)$$

定理2 对于带不确定噪声方差 Q_w 和 Q_v 的离散广义系统(1)–(2),在假设1–2和假设4–6下,其极大似然鲁棒满阶平滑器 $\hat{x}_r(k-N|k)$ 为

$$\hat{x}_r(k-N|k) = H_s \hat{x}_{ar}(k|k), \quad N > 0, \quad (30)$$

其中增广状态滤波器 $\hat{x}_{ar}(k|k)$ 由如下公式递推求得.

$$\hat{x}_{ar}(k+1|k+1) = \bar{\Omega}(k) \begin{bmatrix} \Phi_a \hat{x}_{ar}(k|k) \\ y_a(k+1) \\ \mathbf{0}_{n_a \times 1} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$\bar{\Omega}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_a \times n_a} & \mathbf{0}_{n_a \times m_a} & I_{n_a \times n_a} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Phi_a \bar{P}_a(k|k) \Phi_a^T + \Gamma_a \bar{Q}_w \Gamma_a^T & \mathbf{0}_{n_a \times m_a} & M_a \\ \mathbf{0}_{m_a \times n_a} & \bar{Q}_{va} & H_a \\ M_a^T & H_a^T & \mathbf{0}_{n_a \times n_a} \end{bmatrix}^+, \quad (32)$$

$\bar{\Omega}(k)$ 中的 $\bar{P}_a(k|k)$ 为带上界噪声方差广义系统的上界滤波误差方差阵,满足如下广义Riccati递推表达式:

$$\bar{P}_a(k+1|k+1) = -\bar{\Omega}(k) \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_a \times n_a} \\ \mathbf{0}_{m_a \times n_a} \\ I_{n_a \times n_a} \end{bmatrix}, \quad (33)$$

则鲁棒满阶平滑器 $\hat{x}_r(k-N|k)$ 的平滑误差方差阵为

$$P_r(k-N|k) = H_s P_{ar}(k|k) H_s^T, \quad N > 0, \quad (34)$$

其增广鲁棒满阶滤波器 $\hat{x}_{ar}(k|k)$ 的滤波误差方差阵 $P_{ar}(k|k) = E[\tilde{x}_{ar}(k|k) \tilde{x}_{ar}^T(k|k)]$ 为

$$P_{ar}(k+1|k+1) = \bar{\Omega}(k) \times \begin{bmatrix} \Phi_a P_{ar}(k|k) \Phi_a^T + \Gamma_a Q_w \Gamma_a^T & \mathbf{0}_{n_a \times m_a} & \mathbf{0}_{n_a \times n_a} \\ \mathbf{0}_{m_a \times n_a} & Q_{va} & \mathbf{0}_{m_a \times n_a} \\ \mathbf{0}_{n_a \times n_a} & \mathbf{0}_{n_a \times m_a} & \mathbf{0}_{n_a \times n_a} \end{bmatrix} \times \bar{\Omega}^T(k). \quad (35)$$

证 定义带保守上界方差 \bar{Q}_w 和 \bar{Q}_v 的广义系统为带不确定噪声方差 Q_w 和 Q_v 的广义系统的最坏情形的保守广义系统.利用定理1的方法,可以得到该保守广义系统的极大似然满阶平滑器.

但是该保守广义系统的极大似然满阶平滑器中的保守观测 $y_r(k)$ 是未知不可得的,而带未知不确定噪声统计的广义系统的实际观测是已知可得.因此用实际观测代替保守观测从而引出增广状态的实际满阶滤波器 $\hat{x}_{ar}(k|k)$ 如式(31)所示,则原状态的实际满阶平滑器 $\hat{x}_r(k-N|k)$ 如式(30)所示.

定义实际满阶滤波器和平滑器为鲁棒满阶滤波器和平滑器.在该实际满阶滤波器和平滑器中,观测量、过程噪声和观测噪声分别是实际观测、实际过程噪声和实际观测噪声.

下面求解鲁棒平滑器或鲁棒滤波器的估值误差方差阵 $P_r(k-N|k)$ 和 $P_{ar}(k|k)$.

定义增广状态 $x_a(k)$ 的鲁棒滤波误差 $\tilde{x}_{ar}(k|k) = x_a(k) - \hat{x}_{ar}(k|k)$,可以得到

$$\Phi_a \tilde{x}_{ar}(k|k) = \Phi_a x_a(k) - \Phi_a \hat{x}_{ar}(k|k).$$

结合实际观测方程(12),可以得到如下扩展的观测方程

$$\begin{bmatrix} \Phi_a \tilde{x}_{ar}(k|k) \\ y_a(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_a \\ H_a \end{bmatrix} x_a(k+1) + \begin{bmatrix} -\Phi_a \tilde{x}_{ar}(k|k) - \Gamma_a w(k) \\ v_a(k) \end{bmatrix}, \quad (36)$$

其中 $w(k)$ 和 $v_a(k)$ 为带未知不确定噪声方差的非相关白噪声.

将式(36)代入到式(31)中可以得到

$$\hat{x}_{ar}(k+1|k+1) =$$

$$\bar{\Omega}(k) \begin{bmatrix} M_a \\ H_a \\ \mathbf{0}_{n_a \times n_a} \end{bmatrix} x_a(k+1) + \bar{\Omega}(k) \begin{bmatrix} -\Phi_a \tilde{x}_{ar}(k|k) - \Gamma_a w(k) \\ v_a(k) \\ \mathbf{0}_{n_a \times 1} \end{bmatrix}. \quad (37)$$

由式(29)可得

$$\bar{\Omega}(k) \begin{bmatrix} M_a \\ H_a \\ \mathbf{0}_{n_a \times n_a} \end{bmatrix} = I_{n_a}, \quad (38)$$

也即

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{ar}(k+1|k+1) &= \\ x_a(k+1) - \hat{x}_{ar}(k+1|k+1) &= \\ \bar{\Omega}(k) \begin{bmatrix} \Phi_a \tilde{x}_{ar}(k|k) + \Gamma_a w(k) \\ v_a(k) \\ \mathbf{0}_{n_a \times 1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (39)$$

因此,可以得到增广状态 $x_a(k)$ 的鲁棒滤波误差方差阵 $P_{ar}(k|k)$ 为式(35). 相应地,可以得到原广义系统的鲁棒满阶平滑误差方差阵 $P_r(k-N|k)$ 为式(34).

证毕.

4.2 鲁棒性分析(Robustness analysis)

定理 3 对于带不确定噪声方差 Q_w 和 Q_v 的广义系统,在假设1-2和假设4-6下,定理2所提出的鲁棒满阶平滑器是鲁棒的,也即对所有容许满足式(26)和式(27)的 Q_w, Q_v 和 $P_a(0|0)$,相应的鲁棒平滑误差方差阵 $P_r(k-N|k)$ 存在一个上界方差阵 $\bar{P}(k-N|k)$,即

$$P_r(k-N|k) \leq \bar{P}(k-N|k). \quad (40)$$

证 根据引理2,由式(33)给出的增广状态 $x_a(k)$ 的滤波误差方差阵的上界方差 $\bar{P}_a(k|k)$ 也可表示为

$$\begin{aligned} \bar{P}_a(k+1|k+1) &= \\ \bar{\Omega}(k) \times \\ &\begin{bmatrix} \Phi_a \bar{P}_a(k|k) \Phi_a^T + \Gamma_a \bar{Q}_w \Gamma_a^T & \mathbf{0}_{n_a \times m_a} & \mathbf{0}_{n_a \times n_a} \\ \mathbf{0}_{m_a \times n_a} & \bar{Q}_{va} & \mathbf{0}_{m_a \times n_a} \\ \mathbf{0}_{n_a \times n_a} & \mathbf{0}_{n_a \times m_a} & \mathbf{0}_{n_a \times n_a} \end{bmatrix} \times \\ &\bar{\Omega}^T(k). \end{aligned} \quad (41)$$

设 $\Delta(k) = \bar{P}_a(k|k) - P_{ar}(k|k)$,则可以得到如下动态误差方差系统:

$$\Delta(k+1) = \Psi(k) \Delta(k) \Psi^T(k) + U(k), \quad (42)$$

其中:

$$\Psi(k) = \bar{\Omega}(k) \begin{bmatrix} \Phi_a \\ \mathbf{0}_{m_a \times n_a} \\ \mathbf{0}_{n_a \times n_a} \end{bmatrix}, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} U(k) &= \bar{\Omega}(k) \times \\ &\begin{bmatrix} \Gamma_a [\bar{Q}_w - Q_w] \Gamma_a^T & \mathbf{0}_{n_a \times m_a} & \mathbf{0}_{n_a \times n_a} \\ \mathbf{0}_{m_a \times n_a} & \bar{Q}_{va} - Q_{va} & \mathbf{0}_{m_a \times n_a} \\ \mathbf{0}_{n_a \times n_a} & \mathbf{0}_{n_a \times m_a} & \mathbf{0}_{n_a \times n_a} \end{bmatrix} \times \\ &\bar{\Omega}^T(k). \end{aligned} \quad (44)$$

由式(26)可得

$$\bar{Q}_w - Q_w \geq \mathbf{0}_{r \times r}, \quad \bar{Q}_{va} - Q_{va} \geq \mathbf{0}_{m_a \times m_a}, \quad (45)$$

且 $\bar{\Omega}(k)$ 是 $n_a \times n_a$ 维矩阵,因此可得 $U(k)$ 是非负定的,也即有

$$U(k) \geq \mathbf{0}_{n_a \times n_a}. \quad (46)$$

由式(27)可得

$$\Delta(0) = \bar{P}_a(0|0) - P_{ar}(0|0) \geq \mathbf{0}_{n_a \times n_a}. \quad (47)$$

由式(42)和式(46)可得

$$\Delta(1) \geq \mathbf{0}_{n_a \times n_a}. \quad (48)$$

应用引理3和数学归纳法,对所有时刻 k 都有

$$\Delta(k) \geq \mathbf{0}_{n_a \times n_a}, \quad (49)$$

也即

$$P_{ar}(k|k) \leq \bar{P}_a(k|k). \quad (50)$$

特殊情况:取 $Q_w = \bar{Q}_w, Q_v = \bar{Q}_v$ 和 $P_{ar}(0|0) = \bar{P}_a(0|0)$ 时,约束条件式(26)-(27)成立.于是可得 $P_{ar}(k|k) = \bar{P}_a(k|k)$.因此可得 $\bar{P}_a(k|k)$ 是实际误差方差阵 $P_{ar}(k|k)$ 的最小上界误差方差阵.

根据式(34)可以得到原始状态量的鲁棒平滑误差方差阵 $P_r(k-N|k)$ 存在一个上界,也即式(40)成立,其中 $\bar{P}(k-N|k) = H_s \bar{P}_a(k|k) H_s^T$. 证毕.

5 仿真例子(Simulation example)

考虑如下线性定常离散广义系统:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ -0.7 & 0.5 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -0.5 \end{bmatrix} w(k), \quad (51)$$

$$y(k+1) = [1 \ 1 \ 1]x(k+1) + v(k), \quad (52)$$

其中:状态量 $x(k) = [x_1(k) \ x_2(k) \ x_3(k)]^T$,过程噪声 $w(k)$ 和观测噪声 $v(k)$ 是零均值,方差分别为 $Q_w = 0.7$ 和 $Q_v = 0.8$ 的独立高斯白噪声, $y(k)$ 是观测.求最优和鲁棒满阶1步平滑器.

1) 当 Q_w 和 Q_v 精确已知时,利用定理1可以得到最优满阶平滑器 $\hat{x}(k-1|k)$ 的仿真图形如图1所示,其中:实线代表真实值,虚线代表平滑估值.由图1可见

本文所提出算法的有效性.

为了比较本文和相关文献所提出的平滑器的精度关系,图2给了基于本文算法和文献[2,8]算法的平滑误差方差阵的迹的比较图,其中 $\text{tr} P_{\text{full2}}(k-1|k)$ 采用的是基于文献[8]的满阶估计方法的平滑误差方差阵的迹, $\text{tr} P_{\text{reduce}}(k-1|k)$ 采用的是基于文献[2]的降阶估计方法的平滑误差方差阵的迹.可见本文所提出的平滑算法的精度要低于文献[2,8]的精度,这是由于文献[2,8]的方法是基于最小方差估计准则,而本文是基于极大似然估计准则,但本文的算法最大的优点是该算法较简洁.

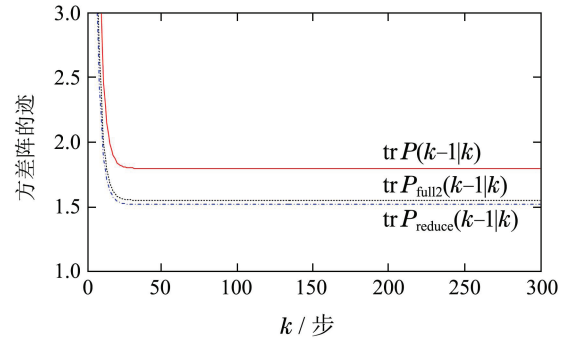
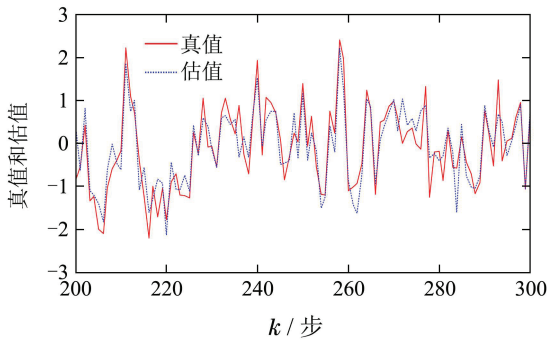
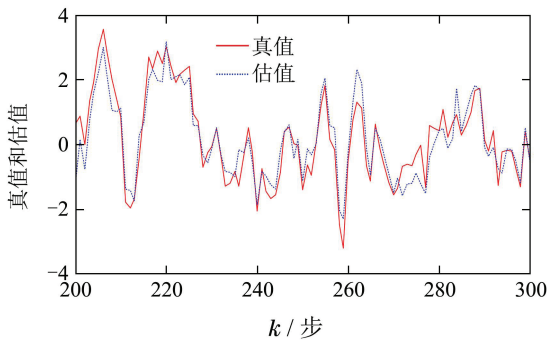


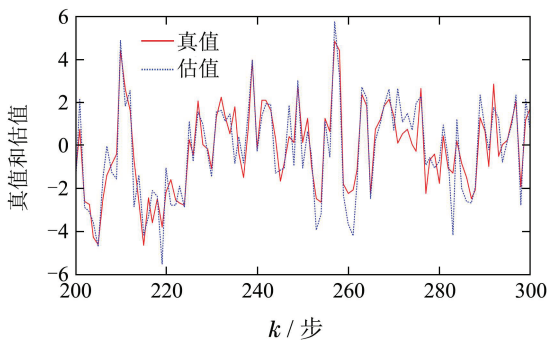
图2 基于不同方法的平滑误差方差阵的迹的比较
Fig. 2 Traces of several smoothing error variance matrices based on different methods



(a) 第1个分量



(b) 第2个分量



(c) 第3个分量

图1 状态和最优满阶1步平滑器 $\hat{x}(k-1|k)$

Fig. 1 State and optimal full-order 1-step smoother $\hat{x}(k-1|k)$

2) 当噪声方差 Q_w 和 Q_v 都不确定时,其上界为 \bar{Q}_w 和 \bar{Q}_v ,也即满足关系 $Q_w \leq \bar{Q}_w$ 和 $Q_v \leq \bar{Q}_v$,在仿真中取 $Q_w = 0.7$, $Q_v = 0.8$, $\bar{Q}_w = 1$, $\bar{Q}_v = 1.2$.

鲁棒1步平滑误差方差阵 $P_r(k-1|k)$ 和保守系统的上界滤波方差 $\bar{P}(k-1|k)$ 在 $k=300$ 时的取值由表1给出.仿真结果显示 $\bar{P}(k-1|k) - P_r(k-1|k)$ 的特征值都大于0,也即验证了精度关系(40).

表1 鲁棒1步平滑误差方差阵及其上界方差阵在 $k=300$ 的值

Table 1 Robust 1-step smoothing error variance matrix and its upper variance matrix at $k=300$

$k=300$	
$\bar{P}(k-1 k)$	$\begin{bmatrix} 0.2827 & -0.3874 & 0.1046 \\ -0.3874 & 0.8448 & -0.4574 \\ 0.1046 & -0.4574 & 1.5528 \end{bmatrix}$
$P_r(k-1 k)$	$\begin{bmatrix} 0.1913 & -0.2620 & 0.0707 \\ -0.2620 & 0.5712 & -0.3092 \\ 0.0707 & -0.3092 & 1.0386 \end{bmatrix}$
$[\bar{P}(k-1 k) - P_r(k-1 k)]$ 的特征值	0.0243, 0.2554, 0.5995

定义平滑器在时刻 k 处的均方误差值 $MSE(k)$ 为

$$MSE(k) = \frac{1}{50} \sum_{m=1}^{50} [\tilde{x}_r^{(m)\text{T}}(k-1|k) \tilde{x}_r^{(m)}(k-1|k)],$$

其中: $\tilde{x}_r^{(m)}(k-1|k) = x_r^{(m)}(k-1) - \hat{x}_r^{(m)}(k-1|k)$, $x^{(m)}(k)$ 为 $x(k)$ 的第 m 个实现, $\tilde{x}_r^{(m)}(k-1|k)$ 分别表示 $\tilde{x}_r(k-1|k)$ 的第 m 个实现.

对带不确定噪声方差 Q_w 和 Q_v 的鲁棒满阶平滑器进行50次Monte Carlo仿真. MSE仿真结果如图3所示,

其中 $\text{tr } P_r(k-1|k)$ 和 $\text{tr } \bar{P}(k-1|k)$ 分别为 $P_r(k-1|k)$ 和 $\bar{P}(k-1|k)$ 的迹. 从仿真结果可见鲁棒平滑器的 MSE 曲线在鲁棒平滑误差方差阵的迹的曲线上下波动, 它们都位于上界方差阵的迹的曲线下面, 也即估值误差方差阵存在一个上界方差.

3) 假设未知噪声方差 Q_w 和 Q_v 满足如下条件:

$$\begin{aligned} Q_w(k) &= 0.8 + 0.2 \sin \frac{2\pi k}{100}, \\ Q_v(k) &= 0.9 + 0.3 \sin \frac{2\pi k}{70}. \end{aligned} \quad (53)$$

易知每一时刻的 $Q_w(k)$ 和 $Q_v(k)$ 均满足条件(26).

图4给出了鲁棒平滑器的误差方差阵的仿真结果, 其中 $\bar{P}_{jj}(k-1|k)$ 和 $P_{rjj}(k-1|k)$ 为 $\bar{P}(k-1|k)$ 和 $P_r(k-1|k)$ 的第 (j, j) 位置元素. 从图4可见, $P_r(k-1|k)$ 的主对角元素分别位于 $\bar{P}(k-1|k)$ 的主对角元素的下面, 也即验证了精度关系式(40).

图5给出了 $\bar{P}(k-1|k) - P_r(k-1|k)$ 分别在 $k = 1 \sim 300$ 时的3个特征值 $d_i (i = 1, 2, 3)$ 的仿真图形. 如图5所示, $\bar{P}(k-1|k) - P_r(k-1|k)$ 的所有特征值都大于等于0, 也即 $\bar{P}(k-1|k) - P_r(k-1|k)$ 是半正定的.

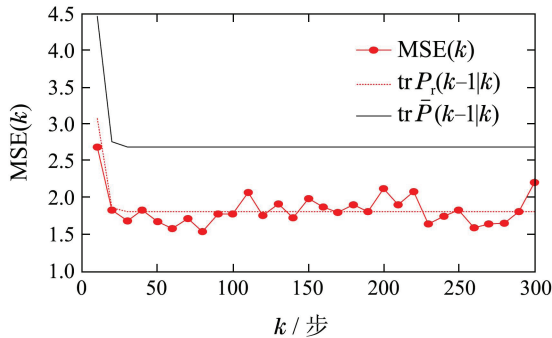


图 3 鲁棒平滑器的MSE仿真图形

Fig. 3 MSE curve of the robust smoother

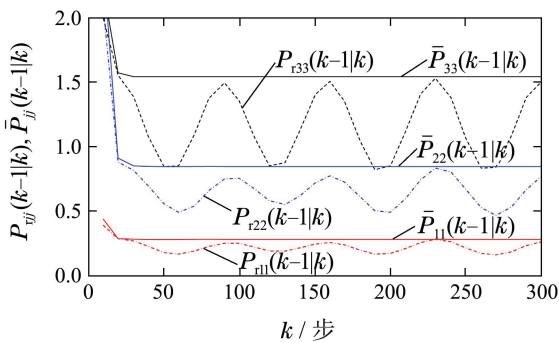


图 4 鲁棒平滑误差方差阵 $P_r(k-1|k)$ 和上界方差 $\bar{P}(k-1|k)$ 的主对角元素 $P_{rjj}(k-1|k)$ 和 $\bar{P}_{jj}(k-1|k)$

Fig. 4 Main diagonal elements $P_{rjj}(k-1|k)$ and $\bar{P}_{jj}(k-1|k)$ of robust smoothing error variances $P_r(k-1|k)$ and upper variances $\bar{P}(k-1|k)$

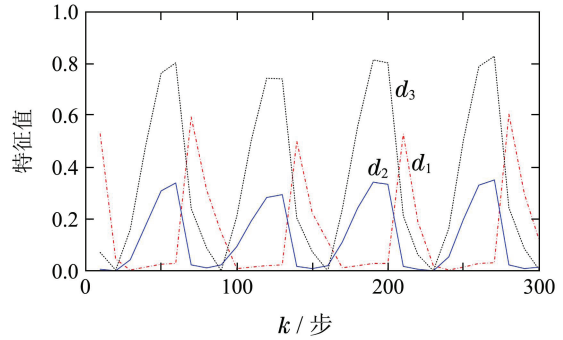


图 5 $\bar{P}(k-1|k) - P_r(k-1|k)$ 的特征值 d_i

Fig. 5 Eigenvalues d_i of $\bar{P}(k-1|k) - P_r(k-1|k)$

6 结论(Conclusions)

对于线性定常离散随机广义系统, 利用增广状态方法, 将平滑器问题转化为增广状态的滤波器问题. 再利用极大似然估计准则得到基于广义Riccati方程的递推满阶平滑器. 当离散广义系统带有不确定噪声统计时, 利用极大极小鲁棒设计原则, 提出了鲁棒满阶平滑器及其平滑误差方差阵, 并证明所得到的鲁棒估值误差方差阵存在一个上界方差矩阵.

参考文献(References):

- [1] FAHMY M M, O'REILLY J. Observers for descriptor systems [J]. *International Journal of Control*, 1989, 49(6): 2013 – 2028.
- [2] DOU Y F, RAN C J, GAO Y. Weighted measurement fusion Kalman estimator for multisensor descriptor system [J]. *International Journal of Systems Science*, 2016, 47(11): 2722 – 2732.
- [3] LU Xiao, WANG Haixia, WU Fan. Optimal multi-step predictor for descriptor systems with multiplicatice noise and delayed measurement [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(6): 787 – 793. (卢晓, 王海霞, 吴帆. 带乘性噪声和延时观测广义系统的多步最优预测器 [J]. *控制理论与应用*, 2015, 32(6): 787 – 793.)
- [4] NIKOUKHAH R, WILLSKY A S, BERNARD C L. Kalman filtering and Riccati equations for descriptor systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(9): 1325 – 1341.
- [5] MA Jing, SUN Shuli. Information fusion steady-state and self-tuning full-order Kalman filters for descriptor systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(9): 1169 – 1174. (马静, 孙书利. 广义系统信息融合稳态与自校正满阶Kalman滤波器 [J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(9): 1169 – 1174.)
- [6] SHI Ying, SHEN Yongliang, SUN shuli, et al. Reduced order Wiener filtering, smoothing and prediction for descriptor discrete-time stochastic linear systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2004, 21(6): 981 – 985. (石莹, 沈永良, 孙书利, 等. 广义离散随机线性系统降阶Wiener滤波、平滑和预报器 [J]. *控制理论与应用*, 2004, 21(6): 981 – 985.)
- [7] DENG Zili, XU Yan. New approaches to Wiener filtering and Kalman filtering for descriptor systems [J]. *Control Theory & Applications*, 1999, 16(5): 634 – 638. (邓自立, 许燕. 广义系统Wiener滤波和Kalman滤波新方法 [J]. *控制理论与应用*, 1999, 16(5): 634 – 638.)
- [8] SUN S L, MA J. Optimal filtering and smoothing for discrete-time stochastic singular systems [J]. *Signal Processing*, 2007, 87(1): 189 – 201.

- [9] WANG Z, RODRIGUES M, THEILLIOL D, et al. Fault estimation filter design for discrete-time descriptor systems [J]. *IET Control Theory Applications*, 2015, 9(10): 1587 – 1594.
- [10] XIONG K, WEI C L, LIU L D. Robust Kalman filtering for discrete-time nonlinear systems with parameter uncertainties [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2012, 18(1): 15 – 24.
- [11] EBIHARA Y, HAGIVARA T. A dilated LMI approach to robust performance analysis of linear time-invariant uncertain systems [J]. *Automatica*, 2005, 41(11): 1933 – 1941.
- [12] QI W J, ZHANG P, DENG Z L. Robust weighted fusion time-varying Kalman smoothers for multisensor system with uncertain noise variance [J]. *Information Science*, 2014, 282(20): 15 – 37.
- [13] QI W J, ZHANG P, DENG Z L. Robust weighted fusion Kalman filters for multisensor time-varying systems with uncertain noise variance [J]. *Signal Processing*, 2014, 99(1): 185 – 200.
- [14] XI H S. The guaranteed estimation performance filter for discrete-time descriptor systems with uncertain noise [J]. *International Journal of Systems Science*, 1997, 28(1): 113 – 121.
- [15] BIANCO A F, ISHIHARA J Y, TERRA M H. A deterministic approach for general discrete-time Kalman filter for singular systems [C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Portland: IEEE, 2005, 6: 4045 – 4050.
- [16] NIKOUKHAH R, CAMPBELL S L, DELEBECQUE F. Kalman filtering for general discrete-time linear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(10): 1829 – 1839.
- [17] KAILATH T, SAYED A H, HASSIBI B. *Linear Estimation* [M]. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2000.
- [18] DAY H. *Matrix Theory* [M]. Beijing: Science Press, 2001.

作者简介:

窦寅丰 (1982–), 男, 实验师, 研究方向为状态估计、多传感器信息融合滤波, E-mail: douyinfeng@126.com;

孙书利 (1971–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为状态估计、信号处理、信息融合和传感器网络等, E-mail: sunsl@hlju.edu.cn;

冉陈键 (1981–), 女, 副教授, 硕士生导师, 研究方向为状态估计、多传感器信息融合等, E-mail: ranchenjian@163.com.