

多模型混合 H_∞ 型鲁棒控制

陈登乾¹, 王 昕^{2†}, 王振雷¹

(1. 华东理工大学 化工过程先进控制和优化技术教育部重点实验室, 上海 200237; 2. 上海交通大学 电工与电子技术中心, 上海 200240)

摘要: 基于多模型控制器设计方法中需要建立大量离线子模型, 导致计算负担过大的问题, 本文提出基于 H_∞ 理论的多模型混合鲁棒控制器设计方法. 该方法首先对参数变化区间进行分解, 根据得到的子区间建立子模型, 从而获得多模型集. 然后依据理论设计子模型鲁棒控制器, 具有良好的抗干扰性, 并能有效地减少子模型数量; 其次, 针对各鲁棒控制器, 设计混合信号实现混合输出, 可以很好地解决切换多模型控制中存在的持续切换问题. 最后, 对本文所提方法进行仿真和聚合釜温度系统的应用研究, 结果表明当被控对象参数存在不确定性和存在输入扰动的时候, 该方法可以在较少子模型数量的前提下保证系统具有良好的鲁棒性.

关键词: 多模型; 混合; H_∞ 理论; 鲁棒性; 聚合釜

引用格式: 陈登乾, 王昕, 王振雷. 多模型混合 H_∞ 型鲁棒控制. 控制理论与应用, 2018, 35(8): 1074 – 1082

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Multi-models mixing H-infinity theory robust control

CHEN Deng-qian¹, WANG Xin^{2†}, WANG Zhen-lei¹

(1. Key Laboratory of Advanced Control and Optimization for Chemical Processes,

Ministry of Education East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China;

2. Center of Electrical & Electronic Technology, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: To solve the problem that leads to establish a large number of off-line sub-model and increase computational burden obviously because of the traditional methods of controller design, a new idea that means controllers design of multi-models mixing control based on H-infinity control theory is proposed. Firstly, the variable parametric interval is decomposed, then the model set are established according to the sub intervals. Secondly, according to the H-infinity theory the robust sub-controllers are designed, so this method own good anti-disturbance performance, and can effectively reduce the number of sub-models; Next the control output of the object is obtained by mixing the mixing signal and the output of robust sub-controllers, which can deal with the continuous switching problem of multi model switching control. Finally, numerical simulation and the polymerization kettle temperature system are researched on the basis of the proposed method. The results indicate that when the controlled object have the features of uncertain parameters and input disturbances, the method can guarantee excellent robustness under the condition of a less number of sub-models.

Key words: multi-models; mixing; H-infinity theory; robustness; polymerization kettle

Citation: CHEN Dengqian, WANG Xin, WANG Zhenlei. Multi-models mixing H-infinity theory robust control. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(8): 1074 – 1082

1 引言(Introduction)

实际工业生产过程中, 很多控制对象的数学模型随着时间或者工作环境的变化而改变, 其变化规律往往事先不知道(难以事先获知), 为了使控制对象参数在较大范围内变化时, 系统仍能自动地工作于最优工

作状态或者接近最优工作状态, 因而提出了自适应控制方法^[1-2]. 但是传统自适应模型的控制参数调节依赖于模型参数估计值, 如果模型参数误差较大, 这将导致收敛速度十分缓慢, 并且产生较大暂态误差^[3-4]. 于是Narendra等^[5]提出基于切换的多模型自

收稿日期: 2016-09-27; 录用日期: 2018-01-24.

†通信作者. E-mail: wangxin26@sjtu.edu.cn; Tel.: +86 21-34204622.

本文责任编辑: 段志生.

国家自然科学基金项目(61673268), 国家自然科学基金面上项目(21376077), 国家自然科学基金优秀青年基金项目(61422303), 上海市“科技创新行动计划”研发平台建设项目(13DZ2295300), 上海市自然科学基金项目(14ZR1421800), 流程工业综合自动化国家重点实验室开放课题基金项目(PAL-N201404)资助.

Supported by the National Nature Science Foundation of China (61673268), the General Program of National Natural Science Foundation of China (21376077), the Youth Program of National Natural Science Foundation of China (61422303), the Shanghai “Technology Innovation Action Plan” Development Platform for Building Projects (13DZ2295300), the Natural Science Foundation of Shanghai (14ZR1421800) and the State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries (PAL-N201404).

适应控制, 多模型切换控制方法能够适用于未知参数随机变化较大的情况, 在模型参数发生突变的时候, 该方法能够快速的跟踪变化参数, 但是当真实模型参数靠近两个子模型边界的情况下, 会导致持续切换的问题^[6].

为了解决基于切换策略多模型控制出现的持续切换问题, Matthew Kuipers等^[7]提出了基于混合的多模型自适应控制方法, 该方法能够保证系统的快速收敛性和平稳输出特性. Simone Baldi等^[8]则将该方法从连续线性时不变系统推广到离散线性定常系统中, 并对其控制性能进行了分析. 但是多模型混合控制方法的子控制器都是离线设计的, 当采用传统多模型控制器设计方法设计子模型控制器时, 必须建立大量的子模型来覆盖整个参数变化区, 但是当子模型数量上升之后, 每次求取系统的混合控制输出时候, 会大大增加计算机的计算量, 从而增加了系统的响应时间, 而且采用传统多模型控制器设计方法设计子控制器时, 系统的抗干扰能力差^[9-10].

针对多模型混合控制的传统控制器设计方法导致的子模型数量大和鲁棒性较差问题, 本文提出了基于H_∞理论的多模型混合鲁棒控制器设计方法. 该方法首先对参数的不确定区间进行分解, 降低模型的不确定性. 然后根据得到的子区间建立标称子模型, 获得多模型集. 再采用H_∞理论对每个子模型设计鲁棒控制器, 不但减少了离线子控制器的数量, 降低计算负担, 而且可以解决传统多模型控制器设计方法存在的鲁棒性较差问题. 最后采用多模型混合控制, 根据辨识参数计算出混合信号, 再将混合信号按照一定的混合加权规则与子模型的控制输出进行混合, 得到被控对象的混合控制输出, 解决了多模型切换控制存在的持续切换问题. 仿真结果证明了上述方法的有效性.

2 被控对象描述 (Description of controlled object)

考虑如下的线性时不变系统:

$$y(k) = G(z^{-1})(u(k) + d(k)), \quad (1)$$

$$G(z^{-1}) = G_0(z^{-1})(1 + M_{\Delta}(z^{-1})), \quad (2)$$

$$G_0(z^{-1}) = \frac{N_0(z^{-1})}{D_0(z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}, \quad (3)$$

式中: $y(k)$ 为模型输出; $u(k)$ 为模型输入; $d(k)$ 为扰动, 且满足 $|d(k)| \leq d_0$; $G_0(z^{-1})$ 为标称模型; $M_{\Delta}(z^{-1})$ 为乘性摄动模型, 表示参数的不确定性. 为了便于本文分析, 将式(3)写成

$$G_0(z^{-1}) = \frac{N_0(z^{-1})}{D_0(z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{[z^{-1} \ z^{-2} \ \dots \ z^{-m}][b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m]^T}{1 + [z^{-1} \ \dots \ z^{-n}][a_1 \ \dots \ a_n]^T}, \quad (4)$$

式中, 令

$$\begin{cases} \alpha_m = [z^{-1} \ z^{-2} \ \dots \ z^{-m}], \\ \theta_b^* = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m]^T, \\ \beta_n = [z^{-1} \ z^{-2} \ \dots \ z^{-n}], \\ \theta_a^* = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T, \end{cases}$$

且令 $\theta^* = [\theta_b^{*T} \ \theta_a^{*T}]^T \in \Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$, 于是式(4)可写为

$$G_0(z^{-1}) = \frac{N_0(z^{-1})}{D_0(z^{-1})} = \frac{\alpha_m \theta_b^*}{1 + \beta_n \theta_a^*}. \quad (5)$$

下面, 对系统(1)做如下假设:

- 1) $D_0(z^{-1})$ 的阶次上限 n 是已知的;
- 2) 标称传递函数 $G_0(z^{-1})$ 是严格正则的, 并且 $m \leq n - 1$;
- 3) $M_{\Delta}(z^{-1})$ 是正则的、已知的, 并且 $|z| \geq \sqrt{\delta_0}$ 有 $0 \leq \delta_0 \leq 1$.
- 4) $\theta^* \in \Omega$, 其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ 是已知的紧凸集.

注 1 上面假设条件3)中要求未建模动态没有接近单位圆的极点, 并且稳定性边界的限制是先验已知的.

3 多模型集建立 (Establishment of multiple model sets)

将被控对象未知参数 θ^* 所有取值构成的集合称为系统参数集, 记做 Ω . 根据先验知识可将系统参数集 Ω 划分成 n 个参数子集 $\Omega_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 并且 Ω_i 满足下列条件:

- 1) $\bigcup_{i=1}^n \Omega_i \supseteq \Omega$, Ω_i 非空, $i = 1, 2, \dots, n$;
- 2) $\Omega_i \cap \Omega_{i+1} = \Xi_i$, Ξ_i 为两个参数子集的交集;
- 3) $\forall \theta^* \in \Omega_i, \exists \theta_i^* \in \Omega_i$ 和 $0 \leq r_i \leq \infty$ 满足下式:

$$\|\theta^* - \theta_i^*\| \leq r_i,$$

其中: θ_i^* 为参数子集 Ω_i 的中心, r_i 为 Ω_i 的半径.

这样, 就可将参数子集 Ω_i 的中心 θ_i^* 作为各个子区间的标称模型, 所有标称模型构成多模型集.

注 2 由上面的子区间分解方法2)可知, 混合控制器的子区间分解需要保证相邻两个子区间之间有交集, 并且建立的子区间集能够覆盖整个参数变化区间.

4 混合多模型鲁棒控制器 (Mixing multiple model robust controller)

对于上面获得的各子模型, 下面根据鲁棒控制理论中的H_∞理论设计对应的子控制器.

4.1 H_∞子控制器设计(H_∞ sub-controller design)

4.1.1 H_∞理论介绍(Introduction of H_∞)

考虑如图1(a)所示的不确定反馈系统, 其中: w 为外部输入, y 为控制输出, 包括跟踪误差、调节误差等^[11]. 为了方便, 将图1(a)化简成图1(b)所示形式.

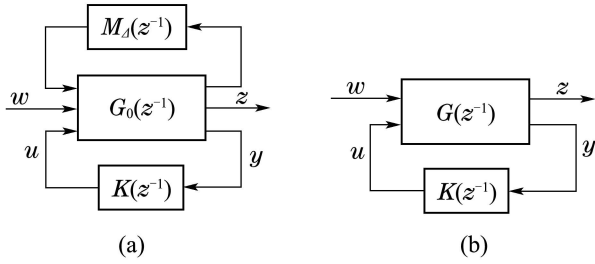


图1 不确定反馈系统
Fig. 1 Uncertain feedback system

假设 $G(z^{-1})$ 为真有理矩阵,表示广义被控对象,并且分块为

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix},$$

于是有

$$\begin{aligned} z &= G_{11}w + G_{12}u, \\ y &= G_{21}w + G_{22}u. \end{aligned} \quad (6)$$

由系统反馈,消去式(6)中的和,可得

$$z = [G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{12}]\omega. \quad (7)$$

为了使问题简化,假设 $(I - G_{22}K)$ 对每一个真有理矩阵都是可逆的,则上式可简写成

$$z = H(GK)\omega. \quad (8)$$

H_∞ 标准控制问题可以描述为:寻找一个真实有理的控制矩阵 K ,在 K 镇定 G 的情况下,使得从 w 到 z 的传递函数矩阵的 H_∞ 范数极小化,即

$$\min_k \|H(GK)\|_\infty. \quad (9)$$

若给定常数 $\gamma > 0$,寻找一个真实有理的控制矩阵 K ,在 K 镇定 G 的情况下,使得从 w 到 z 的传递函数矩阵 H_∞ 的范数小于 $\gamma > 0$,即

$$\|H(GK)\|_\infty < \gamma, \quad (10)$$

则 H_∞ 变成次优的控制问题.

4.1.2 H_∞ 自控制器(H_∞ sub-controller)

为了便于分析、求解被控对象 H_∞ 控制器,首先将文中建立各标称子模型从传递函数形式转换为状态方程形式.第 i 个标称子模型如下:

$$G_{0,i}(z^{-1}) = \frac{N_{0,i}(z^{-1})}{D_{0,i}(z^{-1})} = \frac{\alpha_{m,i}\theta_{b,i}^*}{1 + \beta_{n,i}\theta_{b,i}^*}, \quad (11)$$

将其转换为状态方程形式:

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= A_i x_i(k) + B_i u_i(k), \\ y_i(k) &= C_i x_i(k) + D_i u_i(k). \end{aligned} \quad (12)$$

为了求解子模型的 H_∞ 控制器,首先给出如下定理.

定理 1^[11] 假设 $\gamma > 0$,且 $G(z^{-1})$ 的最小实现由 (A, B, C, D) 给出,则矩阵 A 是稳定阵,因此令 $\|G\|_\infty$

$< \gamma$ 的充要条件是存在 $X > 0$,满足

$$\begin{bmatrix} XA + A^T X & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (13)$$

在 H_∞ 理论中将被控对象(12)表示成如下的状态空间实现形式,并且进一步分块为

$$G_{0,i}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & B_{1,i} & B_{2,i} \\ C_{1,i} & D_{11,i} & D_{12,i} \\ C_{2,i} & D_{21,i} & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

定义矩阵

$$N_Y = [C_{2,i} \ D_{21,i}]_\perp, \quad (15)$$

$$N_X = [B_{2,i}^T \ D_{12,i}^T]_\perp, \quad (16)$$

式中: $[C_{2,i} \ D_{21,i}]_\perp$ 是满足 $[C_{2,i} \ D_{21,i}]A = 0$ 的满秩矩阵 A 中的列数最多的矩阵, $[B_{2,i}^T \ D_{12,i}^T]_\perp$ 的意义相同.

根据定理1,存在使被控对象(12)所示的系统内部稳定,且 $\|H(G_i, K_i)\|_\infty < \gamma$ 的控制器 K 的充要条件为LMI^[12]:

$$\begin{bmatrix} N_{X,i}^T \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i A_i^T + A_i X_i & X_i C_{1,i}^T & B_{1,i} \\ C_{1,i} X_i & -\gamma I & D_{11,i} \\ B_{1,i}^T & D_{11,i}^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} N_{Y,i}^T \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_i A_i^T + A_i Y_i & Y B_{1,i} & C_{1,i}^T \\ B_{1,i}^T Y_i & -\gamma I & D_{11,i}^T \\ C_{1,i} & D_{11,i} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} X_i & I \\ I & Y_i \end{bmatrix} \geq 0, \text{rank} \begin{bmatrix} X_i & I \\ I & Y_i \end{bmatrix} \leq n + n_k. \quad (19)$$

存在 $X_i > 0, Y_i > 0$.其中 n, n_k 分别是被控对象(11)和控制器 K_i 的阶次.

通过求解LMI可得 $K_i = Y_i * X_i^{-1}$,则

$$u_i = K_i * y_i. \quad (20)$$

因此,上述鲁棒子控制器的设计可以保证,在每个子区间,当模型的参数在给定的子区间范围内发生变化时,子控制器仍然能够镇定整个系统,并且保证系统具有良好的响应特性.

4.2 多模型混合鲁棒控制器 (Multiple model mixing robust controller)

当真实模型参数靠近两个候选模型的边界时,会产生持续切换问题.为此,本文设计多模型混合控制

器, 控制器输出为上述边界交集处所有子控制器输出的加权和, 从而避免了持续切换问题, 保证了系统响应的快速性和平稳性.

4.2.1 被控对象参数辨识(Parameter identification of controlled object)

基于上面建立的各子控制器, 需要求取其参与混合控制输出时的权值, 从而获取被控对象的混合控制输出. 本文中, 参与混合控制输出的各子控制器的权值是基于参数估计值 $\hat{\theta}(k)$ 计算得到的.

为了便于参数辨识, 将系统(1)–(2)转化成输入、输出形式^[13–14]:

$$y(k) = \theta^{*T} \phi(k) + N_0(z^{-1})d(k). \quad (21)$$

由于实际过程中存在干扰 $d(k)$ 等不确定性因素, 如果直接进行参数辨识, 会导致辨识参数产生较大的误差, 这将直接系统的控制性能, 因此则首先采用滤波器 $F(z^{-1})$ 对式(21)进行滤波处理, 保证辨识得到的参数值尽可能的接近真实值, 得到如下形式:

$$z(k) = \theta^{*T} \phi(k)F(z^{-1}) + \eta(k), \quad (22)$$

式中:

$$z(k) = F(z^{-1})y(k), \quad (23)$$

$$\eta(k) = N_0(z^{-1})F(z^{-1})d(k), \quad (24)$$

$$F(z^{-1}) = \frac{\lambda^n(k)}{(z^{-1} + \lambda(k))^n} F_\eta(z^{-1}), \quad (25)$$

$$F_\eta(z^{-1}) = \frac{N_F(z^{-1})}{D_F(z^{-1})}, \quad (26)$$

式中 $\eta(k)$ 为系统建模误差, 当辨识系统未知参数时, 它会产生干扰. 从式(23)–(25)可以看出, 通过对滤波器 $F(z^{-1})$ 进行合理设计, 可降低 $\eta(k)$ 的影响, $\lambda(k) > 0$ 是设计的参数, $F_\eta(z^{-1})$ 为最小相位的滤波器.

当采用参数估计值 $\hat{\theta}(k-1)$ 代替参数真值 θ^* 时, 会产生误差 $\hat{e}(k)$ 为

$$\begin{aligned} \hat{e}(k) &= z(k) - \hat{z}(k) = \\ & z(k) - \hat{\theta}^T(k-1)\phi(k)F(z^{-1}). \end{aligned} \quad (27)$$

定义一个误差模型, 它的输入为 $u(k)$ 和 $y(k)$, 输出为 $\hat{e}(k)$, 从式(21)–(25), 可得到误差模型^[7]

$$\begin{cases} x_E(k+1) = A_E(k)x_E(k) + B_E(k)u(k) + \\ \quad G_E(k)y(k), \\ z(k) = C_E(k)x_E(k) + D_E(k)y(k), \\ \hat{z}(k) = \theta^T(k-1)\phi(k), \quad \phi = C_Z x_E(k), \\ \hat{e}(k) = (C_E(k) - \theta^T(k-1)C_Z)x_E(k) + \\ \quad D_E(k)y(k), \end{cases} \quad (28)$$

式中 $x_E(k)$ 为误差模型的状态向量.

针对式(28)的误差模型, 采用如下具有约束投影

算法的辨识算法:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k) &= P_r \left\{ \hat{\theta}(k-1) + \Lambda \frac{\hat{e}(k)\phi(k)}{c + \phi^T(k)\phi(k)} \right\} = \\ & \begin{cases} \hat{\theta}(k-1) + \Lambda \frac{\hat{e}(k)\phi(k)}{c + \phi^T(k)\phi(k)}, & \hat{\theta}(k) \in \Omega, \\ \hat{\theta}(k-1), & \hat{\theta}(k) \notin \Omega. \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

上式中: Λ 为自适应增益, c 为常量, $P_r\{\cdot\}$ 为投影算子, 用于将 $\hat{\theta}(k)$ 约束在参数集 Ω 中.

4.2.2 混合控制器设计 (Design of mixing controller)

为了求取混合信号, 首先判断已辨识参数 $\hat{\theta}$ 是否属于 Ω_i , 因此将 $\hat{\theta}$ 做如下处理:

$$x_i(\hat{\theta}) = \left(\hat{\theta} - \left(\frac{\theta_{b,i} + \theta_{a,i}}{2} \right) \right) / \frac{\theta_{a,i} - \theta_{b,i}}{2}. \quad (30)$$

当 $|x_i(\hat{\theta})| < 1$ 时, 表明 $\hat{\theta} \in \Omega_i$, 称 Ω_i 为活跃的参数子集, 而 $\theta_{b,i}, \theta_{a,i}$ 分别表示第 i 个子集的下界和上界, 则子控制器 K_i 的控制输出参与混合; 当 $|x_i(\hat{\theta})| \geq 1$ 时, 表明 $\hat{\theta} \notin \Omega_i$, 则子控制器 K_i 不参与混合.

对于位于活跃的参数子集中的 $x_i(\hat{\theta})$, 根据下式求取每个子控制器的混合信号:

$$\tilde{\beta}_i(x_i(\hat{\theta})) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-x_i^2}}, & |x_i| < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad (31)$$

合在一起, 得

$$\tilde{\beta}(\hat{\theta}(k)) = [\tilde{\beta}_1(\hat{\theta}(k)) \quad \tilde{\beta}_2(\hat{\theta}(k)) \quad \cdots \quad \tilde{\beta}_n(\hat{\theta}(k))]^T. \quad (32)$$

再对式(32)进行归一化处理, 有

$$\beta_i(\hat{\theta}) = \frac{\tilde{\beta}_i(\hat{\theta})}{\sum_{i=1}^n \tilde{\beta}_i(\hat{\theta})}, \quad (33)$$

于是可得被控对象的混合信号

$$\beta(\hat{\theta}(k)) = [\beta_1(\hat{\theta}(k)) \quad \beta_2(\hat{\theta}(k)) \quad \cdots \quad \beta_n(\hat{\theta}(k))]^T, \quad (34)$$

并且上述混合信号具有如下性质:

1) $\beta_1(\hat{\theta}(k)) + \beta_2(\hat{\theta}(k)) + \cdots + \beta_n(\hat{\theta}(k)) = 1$, 其中 $\beta_1(\hat{\theta}(k)), \beta_2(\hat{\theta}(k)), \cdots, \beta_n(\hat{\theta}(k)) \geq 0$; 并且当 $\hat{\theta}(k) \notin \Omega$ 或 $\hat{\theta}(k) \notin \Omega_i, \beta_i(\hat{\theta}(k)) = 0$.

2) $\beta(\hat{\theta}(k))$ 是关于 $\hat{\theta}(k)$ 的连续函数. 令离线子控制器的控制输出为 $\bar{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n]$; 则可以得到混合控制输出为

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} * \beta(\hat{\theta}(k)) = \beta_1(\hat{\theta}(k)) * u_1 + \\ & \beta_2(\hat{\theta}(k)) * u_2 \cdots + \beta_n(\hat{\theta}(k)) * u_n. \end{aligned} \quad (35)$$

结合上面的分析, 给出多模型混合鲁棒控制器的整体结构框(见图2). 图2中: y_r 为参考输出; K_i 为子控

制器; β 为混合信号; u 为混合控制输出; d 为外加扰动; y 为模型输出; $\hat{\theta}$ 为辨识参数. 混合器和估计器组成监督机构, 其功能是实时地监测输入输出信号, 达到动态调节混合信号的功能.

5 稳定性分析(Stability analysis)

首先将离散传递函数(5)转换成离散状态方程

$$\begin{cases} x_P(k+1) = A_P x_P(k) + B_P u(k) + E_P d(k), \\ y(k) = C_P x_P(k). \end{cases} \quad (36)$$

式(36)中:

$$A_P = \begin{bmatrix} 0_{(m-1) \times 1} | I_{(m-1) \times (m-1)} & 0_{(m-1) \times m} & 0_{(m-1) \times (n-1)} \\ 0_{1 \times m} & 0_{1 \times m} & 0_{1 \times (n-1)} \\ 0_{(m-1) \times m} & 0_{(m-1) \times 1} | I_{(m-1) \times (m-1)} & 0_{(m-1) \times (n-1)} \\ 0_{1 \times m} & 0_{1 \times m} & 0_{1 \times (n-1)} \\ 0_{(n-2) \times m} & 0_{(n-2) \times m} & 0_{(n-2) \times 1} | I_{(n-2) \times (n-2)} \\ \theta_b^{*T} & \theta_b^{*T} & \theta_a^{*T} \end{bmatrix},$$

$$B_P = [0_{1 \times (m-1)} \quad I_{1 \times 1} \quad 0_{1 \times (m+n-1)}]^T, \quad E_P = [0_{1 \times (2m-1)} \quad I_{1 \times 1} \quad 0_{1 \times (n-1)}]^T, \quad C_P = [\theta_b^{*T} \quad \theta_b^{*T} \quad \theta_a^{*T}],$$

$$x_P = [a_m(z^{-1})u(k) \quad a_m(z^{-1})d(k) \quad -a_{n-1}(z^{-1})y(k)]^T,$$

x_P 表示状态向量. 因此, 将式(35)代入到离散状态系统(36), 可得到被控对象闭环状态方程

$$\begin{cases} x_P(k+1) = (A_P - B_P K C_P) x_P + E_P d(k), \\ y(k) = C_P x_P(k). \end{cases} \quad (37)$$

进一步对被控对象进行处理, 根据式(28)(36)–(37), 可以获得被控对象的状态误差模型

$$\begin{cases} x_{PE}(k+1) = A(k)x_{PE}(k) + B(k)\eta(k), \\ \hat{e}(k) = C(k)x_{PE}(k). \end{cases} \quad (38)$$

式(38)中:

$$x_{PE}(k) = [x_P(k) \quad x_E(k)]^T,$$

$$A(k) = \begin{bmatrix} A_P - B_P K(\hat{\theta}(k))C_P & 0 \\ G_E(k)C_P - B_E(k)K(\hat{\theta}(k))C_P & A_E(k) \end{bmatrix},$$

$$B(k) = \begin{bmatrix} E_P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C(k) = [D_E(k)C_P \quad C_E(k) - \hat{\theta}^T(k-1)C_Z].$$

为了证明采用运动趋势策略保证被控对象稳定性, 首先给出如下引理:

引理 1^[17-18] 对于如下状态方程:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k). \end{cases} \quad (39)$$

如果Riccati不等式

$$A^T(k)P(k)A(k) + C^T(k)C(k) - P(k) +$$

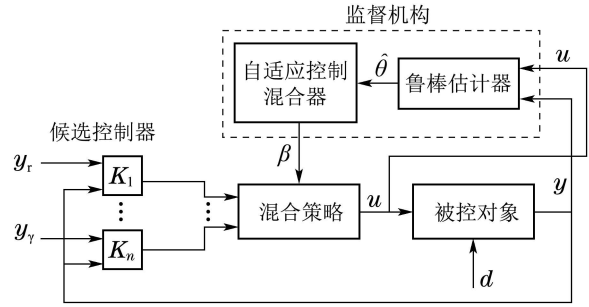


图2 多模型混合鲁棒控制结构框图

Fig. 2 Block diagram of multiple model hybrid robust control

$$A^T P(k)B(k)(I - B^T(k)P(k)B(k))^{-1}.$$

$$B^T(k)P(k)A(k) < 0 \quad (40)$$

有正定解 $P(k) = P^T(k)$ 且 $I - B^T(k)P(k)B(k) > 0$, 则系统(39)是渐近稳定.

根据引理1, 并且结合动态误差方程, 定义如下矩阵多项式:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} =$$

$$A^T(k)P(k)A(k) - P(k) + C^T(k)C(k) +$$

$$A^T P(k)B(k)(I - B^T(k)P(k)B(k))^{-1}.$$

$$B^T(k)P(k)A(k), \quad (41)$$

于是将动态误差方程(38)参数代入式(41)中, 处理得到

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix}, \quad (42)$$

式中:

$$\Theta_{11} = [A_1^T(k)P_1(k)E_p(k)M(k)E_p^T(k)P_1(k)A_1(k) + A_1^T(k)P_1(k)A_1(k) - P_1(k) + W_1^T(k)W_1(k)] + C_p^T(k)B_1^T(k)P_2(k)B_1(k)C_p(k),$$

$$\Theta_{12} = C_p^T(k)B_1^T(k)P_2(k)A_E(k) + W_1^T(k)W_2(k),$$

$$\Theta_{21} = A_E^T(k)P_2^T(k)B_1(k)C_p(k) + W_1^T(k)W_2(k),$$

$$\Theta_{22} = A_E^T(k)P_2(k)A_E(k) - P_2(k) + W_2^T(k)W_2(k).$$

根据上面的分析, 可得到如下结论:

设 $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0, \rho_3 > 0$ 是任意常数, 并且设 $Q = Q^T > 0$ 为定常矩阵. 如果下面两个Riccati方程

$$\begin{aligned} &A_1^T(k)P_1(k)A_1(k) - P_1(k) + \\ &W_1^T(k)W_1(k) + \rho_1 I + \\ &A_1^T(k)P_1(k)E_p M(k)E_p^T P_1(k)A_1(k) = 0, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} &A_E^T(k)P_2(k)A_E(k) - \\ &P_2(k) + W_2^T(k)W_2(k) + \rho_2 I = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

具有正定对称矩阵解 $P_1(k), P_2(k)$, 并且满足不等式

$$I - E_p^T(k)P_1(k)E_p(k) > 0, \quad (45)$$

则可得到误差模型的参数为

$$\begin{aligned} A_E(k) &= B_1(k)C_p, \\ C_E(k) &= \rho_3 Q + \theta^T(k-1)C_Z, \\ D_E(k) &= [\rho_3^{-1} \rho_2 Q^{-1} - \rho_3 Q^{-1} P_2 + \rho_3 Q] C_p^{-1}. \end{aligned}$$

则可得到如下结论:

- 1) 系统(37)是渐进稳定的.
- 2) 模型预测误差 $\hat{e}(k)$ 为有界, 并且

$$k \rightarrow \infty, \hat{e}(k) \rightarrow 0. \quad (46)$$

下文分别对3种结论做出证明, 为了证明方便, 下面的推导过程中, 将公式中 k 省略:

- 1) 由式(44)可知

$$\Theta_{22} = -\rho_2 I < 0. \quad (47)$$

把参数 A_E 代入式 Θ_{12} , 根据式(43)可得到

$$\Theta_{12} = P_2 - W_2^T W_2 - \rho_2 I + W_1^T W_2. \quad (48)$$

把参数 D_E 代入上式, 通过化解可得到 D_E . 又因为

$$\Theta_{21} = \Theta_{12}^T = [A_E^T P_2 B_1 C_p + W_2^T W]^T, \quad (49)$$

所以 $\Theta_{21} = 0$. 把式(43)和(44)代入 $\Theta_{11} = 0$ 可得

$$\Theta_{11} = -\rho_1 I + \Phi_{12} - W_1^T W_2.$$

因为 $W_1^T W_2 > 0, \Theta_{12} = 0$, 所以 $\Theta_{11} < 0$.

由上面的分析可知 $\Theta < 0$, 根据引理1, 故系统(37)是渐进稳定的.

2) 因为被控对象(37)是渐进稳定的, 根据文献[18]中引理2的结论, 可知

$$k \rightarrow \infty, x_{PE}(k) \rightarrow 0. \quad (49)$$

因而可以得到结论2).

6 仿真研究(Simulation experiment)

下面采用数值仿真验证方法的有效性, 并且将该方法应用到实际的工业生产中.

6.1 数值仿真分析(Numerical simulation analysis)

考虑如下的线性离散时间系统:

$$\begin{aligned} y(k+1) &= \\ &1.2y(k) - 1.22y(k-1) + b_1 u(k) + \end{aligned}$$

$$0.1u(k-1) + 0.85d(k) + 0.1d(k-1), \quad (50)$$

式中: b_1 为被控对象未知参数, $b_1 \in [-0.5, 0.9]$, 即参数集 $\Omega = [-0.5, 0.9]$, d 为输入扰动, 且为白噪声.

针对上述系统, 首先设计传统多模型控制器. 该控制器将参数变化空间 Ω 分解为8个子区间, 如表1所示. 在每个子空间建立子模型, 据此设计8个子控制器构成多模型控制器实现控制.

表 1 模糊控制规则

Table 1 Fuzzy control rules

区间名称	区间范围	标称值
Ω_1	[-0.50 -0.30]	-0.40
Ω_2	[-0.27 -0.07]	-0.17
Ω_3	[-0.04 0.16]	0.06
Ω_4	[0.13 0.33]	0.23
Ω_5	[0.30 0.50]	0.4
Ω_6	[0.47 0.67]	0.57
Ω_7	[0.64 0.81]	0.725
Ω_8	[0.72 0.9]	0.81

然后再设计本文提出的多模型混合鲁棒控制器. 该控制器将参数变化空间 Ω 分解为4个子区间, 如表2所示. 再根据标称值建立子模型, 采用 H_∞ 控制理论设计4个鲁棒控制器构成多控制器, 通过混合策略实现多模型控制. 假设被控对象的真实值 $\theta^* = 0.85$. 为了进行比较, 上述两种控制器的辨识初始值都取为相同的值, 即 $\hat{\theta} = -0.4$; 下面对 d 分两种情况进行讨论.

表 2 模糊控制规则

Table 2 Fuzzy control rules

区间名称	区间范围	标称值
Ω_1	[-0.5 0]	-0.25
Ω_2	[-0.2 0.3]	0.05
Ω_3	[0.1 0.6]	0.35
Ω_4	[0.4 0.9]	0.65

情况 1 输入扰动的均值 $E(d) = 0$, 方差 $\sigma^2 = 0.01$, 结果如图3所示.

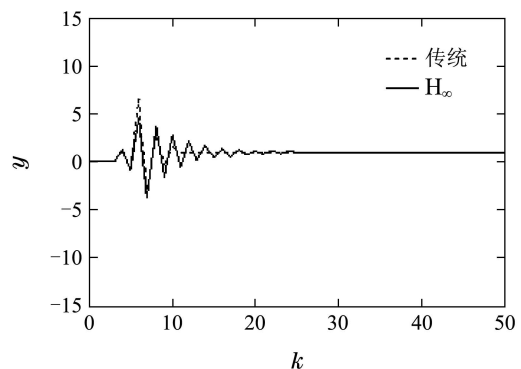


图 3(a) 2种方法输出对比

Fig. 3(a) Output contrast of two methods

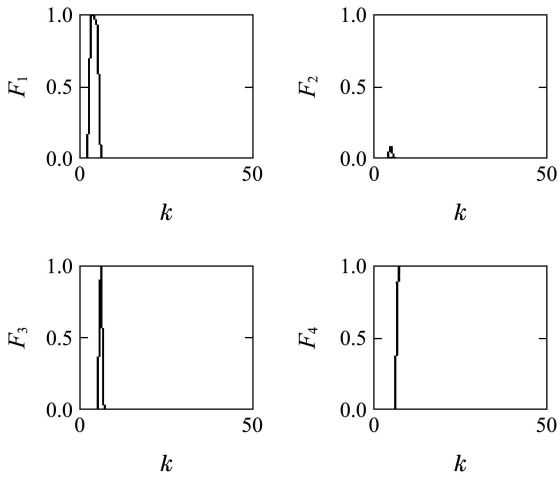


图 3(b) 4个子模型混合信号输出情况

Fig. 3(b) Mixed signal output of four sub-models

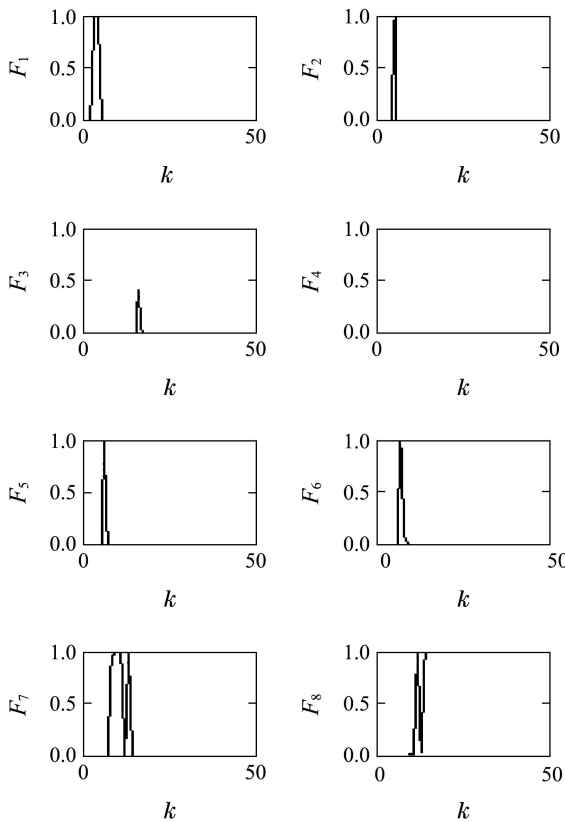


图 3(c) 8个子模型混合信号输出情况

Fig. 3(c) Mixed signal output of eight sub-models

当输入扰动很小时, 图3(a)表明采用本文的方法, 其超调量优于传统多模型控制器. 但由于采用混合加权的策略, 其过渡过程时间较长. 而在模型数量方面, 本文的方法只需建立4个子模型, 因此在减少子模型数量方面具有很大优势. 图3(b)–3(c)表明两种方法辨识参数最终都收敛到真实值所在子区间.

情况 2 输入扰动的均值 $E(d)=0$, 方差 $\sigma^2=0.6$, 结果如图4所示.

图3–4中, 图例“传统”表示对8个子集设计控制的输出; “ H_{∞} ”表示采用 H_{∞} 控制理论对4个子集设

计控制的输出.

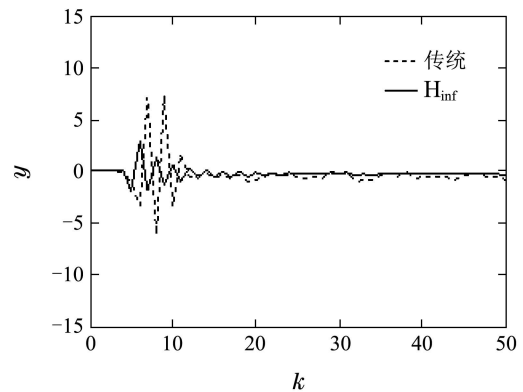


图 4 2种方法输出对比

Fig. 4 Output contrast of two methods

当输入扰动增大时, 对比图3–4可知, 采用传统多模型控制器时, 其超调量和过渡过程时间会急剧增加, 并且最终输出也存在较小波动. 而采用本文方法, 由于基于 H_{∞} 理论设计控制器, 无论超调量, 还是过渡过程时间, 都与图3近似, 表明本文控制器具有较好的鲁棒性.

6.2 丙烯腈聚合过程温度(Temperature of acrylonitrile polymerization process)

丙烯腈聚合过程是腈纶生产工艺中的关键工序, 该聚合反应工艺流程如图5所示.

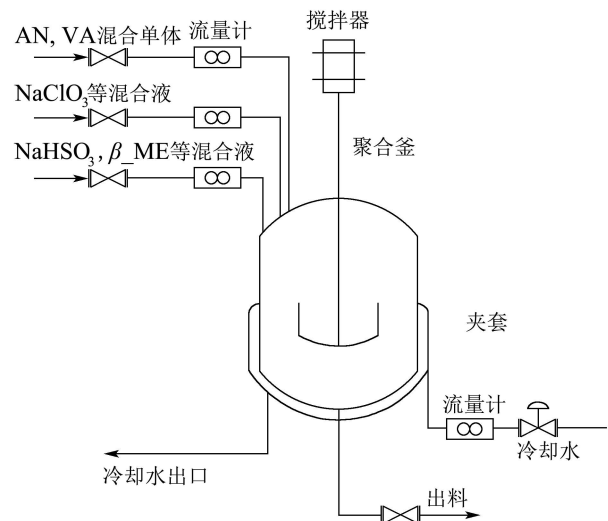


图 5 丙烯腈聚合反应工艺流程示意图

Fig. 5 Schematic diagram of acrylonitrile polymerization process

聚合反应是以丙烯腈 $CH_2 = CH - CN$ (acrylonitrile, AN)为第一单体, 醋酸乙烯酯 $CH_3COOCH = CH_2$ (vinyl acetate, VA)为第二单体, 采用水溶性 $NaHSO_3$, $NaClO_3$ 氧化还原体系为诱导剂, 巯基乙醇($\beta - ME$)为链转移剂, 在聚合釜内 $40^{\circ}C \sim 70^{\circ}C$ 的温度条件下进行, 并且反应物按生产比例配置混合后通过3条管道连续输送到聚合釜, 单体混合物主要为

89.05%的丙烯腈和10.95%的醋酸乙烯; NaClO_3 混合液主要为2.0%的 NaClO_3 , 少量 CuSO_4 的水溶液; 第3条管道主要为10.65%的 NaHSO_3 , 3.72%的 NaNO_3 以及(β -ME)的水溶液, 同时还配有含0.7%的 NaOH 的脱盐水, 每条管道都有精确的流量计检测流量. 在该生产过程中对温度的控制是至关重要的, 直接影响到产品的质量和产量, 甚至工艺的正常安全生产^[15-16]. 由于聚合过程的复杂性, 因此聚合釜是一个典型的具有惯性、时滞、非线性、时变等特点复杂控制对象. 为了改善系统的控制性能, 采用本文的控制方法对聚合釜温度进行控制. 首先将聚合过程的机理模型, 经线性化、离散化以后得到式(37)输入输出模型.

$$y(k) = 1.05y(k-1) - 0.054y(k-2) + b_1u(k-1) + 0.023u(k-2) + 0.034d(k-1) + 0.023d(k-2) + v(k) + 0.51v(k-1) + 0.42v(k-2). \quad (51)$$

由于实际生产的复杂性, 导致在线性化过程中, 参数 b_1 具有不确定性, 且变化范围是 $b_1 \in [-0.5 \ 0.2]$. u 是系统输入, 即聚合釜夹套冷却水的体积流量, $y(k)$ 是系统的输出, 即聚合釜内反应混合物的平均温度, d 是输入扰动, 且为随机白噪声, v 是白噪声.

分析本文方法对聚合釜内部温度的控制效果, 此时输入扰动 d 方差为 $\sigma^2 = 0.3$, 聚合釜内部温度响应情况见图6所示.

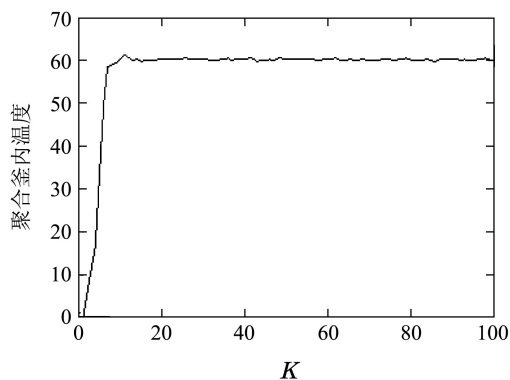


图6 聚合釜内温度变化曲线

Fig. 6 Internal temperature variation curve of polymerizer

由图6可知, 在丙烯腈聚合过程存在较大的输入扰动的时候, 采用本文提出的方法对聚合釜内部温度进行控制时, 可以保证聚合釜内温度快速平滑的响应, 并且能够保证输出具有很好的稳定性.

7 结语(Conclusions)

用传统方法设计多模型混合控制的子模型控制器时, 不仅会导致子模型的数量大大增加, 造成计算浪费, 增加响应时间, 而且会导致被控对象的鲁棒性能

较差. 针对上述问题, 本文提出了基于 H_∞ 理论的多模型混合鲁棒控制器设计方法. 该方法依据 H_∞ 理论设计子模型控制器, 保证子模型的抗干扰性, 并且减少了子模型的数量; 然后根据混合信号将子模型的控制输出进行混合加权得到被控系统的混合控制律, 解决了多模型切换控制存在的频繁切换问题. 最后仿真表明, 采用本文方法时, 能够保证被控对象有较好的暂态性能, 并且当输入扰动增大时, 被控对象的暂态性能没有发生明显变化, 说明该方法具有很好的鲁棒性. 最后将该方法应用到聚合反应过程中, 可以保证聚合釜内温度快速、平稳的响应.

参考文献(References):

- [1] HUANG A C, CHIEN M C. *Adaptive Control of Robot Manipulators* [M]. Singapore: Sage Publications, 1987.
- [2] SASTRY S, BODSON M, BARTRAM J F. Adaptive control: stability, convergence, and robustness [J]. *Acoustical Society of America Journal*, 1990, 88(1): 588 - 589.
- [3] NARENDRA K S, LIN Y H. Stable discrete adaptive control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, 25(3): 456 - 461.
- [4] ZHAI Junyong, FEI Shumin. Multi-model switching control based on dynamic model bank [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(12): 1410 - 1414.
(翟军勇, 费树岷. 基于动态模型库的多模型切换控制 [J]. 控制理论与应用, 2009, 26(12): 1410 - 1414.)
- [5] CIPRIAN L, ANDREEA U, DUMITRU P, et al. Stable algorithms switching for multiple models control systems [J]. *WSEAS Transactions on Systems*, 2009, 8(4): 451 - 460.
- [6] KUIPERS M, IOANNOU P. Multiple model adaptive control with mixing [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 55(8): 1822 - 1836.
- [7] BALDI S, IOANNOU P, MOSCA E. Multiple model adaptive mixing control: the discrete-time case [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(4): 1040 - 1045.
- [8] YU C, ROY R J, KAUFMAN H, et al. Multiple-model adaptive predictive control of mean arterial pressure and cardiac output [J]. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 1992, 39(8): 765 - 778.
- [9] LI Xiaoli, WANG Shuning. Multi-model adaptive control of system with bounded disturbance [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(4): 577 - 581.
(李晓理, 王书宁. 含有界扰动系统的多模型自适应控制 [J]. 控制理论与应用, 2003, 20(4): 577 - 581.)
- [10] GUSTAFSON J A, MAYBECK P S. Flexible spacestructure control via moving-bank multiple model algorithms [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1994, 30(3): 750 - 757.
- [11] SHEN Tielong. *H_∞ Control Theory and Applications* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1996.
(申铁龙. H_∞ 控制理论及应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1996.)
- [12] GAHINET P, NEMIROVSKII A, LAUB A J, et al. The LMI control toolbox [C] // *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 1994: 2038 - 2041.
- [13] IOANNOU P, FIDAN B. *Adaptive Control Tutorial* [M]. Philadelphia: SIAM, 2006.
- [14] CAO Xufeng, WANG Xin, WANG Zhenlei. Multiple models adaptive control with mixing and switching [J]. *Control Engineering of China*, 2014, 21(6): 878 - 881.

- (曹叙风, 王昕, 王振雷. 基于切换和混合策略的多模型自适应控制 [J]. 控制工程, 2014, 21(6): 878 – 881.)
- [15] CHAN K, NGOC B T N, YUN W Y, et al. Fabrications and electrochemical properties of two-phase activated carbon nanofibers from electrospinning [C] // *Nanotechnology Materials and Devices Conference*. Geongju; South Korea: IEEE, 2006: 412 – 413.
- [16] DING Donghu, JIN Jianxiang. A study on application and control strategies of PVC temperature system [J]. *Control and Instruments in Chemical Industry*, 2004, 31(2): 15 – 16.
(丁东湖, 金建祥. 聚氯乙烯温度控制方案的设计及应用 [J]. 化工自动化及仪表, 2004, 31(2): 15 – 16.)
- [17] QU Baida, LÜ Yanhui, HUANG Xiaoyuan. Robust H_1 control for discrete-time systems with nonlinear perturbations [J]. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(2): 309 – 311.
- (屈百达, 吕艳辉, 黄小原. 非线性摄动离散系统 H_1 鲁棒控制 [J]. 控制理论与应用, 2000, 17(2): 309 – 311.)
- [18] YAESH I, SHAKED U. A transfer function approach to the problems of discrete-time systems: H_∞ -optimal linear control and filtering [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, 36(11): 1264 – 271.

作者简介:

陈登乾 (1990–), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为多模型自适应控制, E-mail: 464267716@qq.com;

王昕 (1972–), 男, 副教授, 目前研究方向为多模型自适应控制, E-mail: wangxin26@sjtu.edu.cn;

王振雷 (1975–), 男, 教授, 目前研究方向为多模型自适应控制, E-mail: wangzhen_l@ecust.edu.cn.