

## 基于矩阵方法的有界Petri网系统的能观性分析

高娜<sup>1,2</sup>, 韩晓光<sup>1,2</sup>, 陈增强<sup>1,2,3†</sup>, 张青<sup>3</sup>

(1. 南开大学 计算机与控制工程学院, 天津 300350;

2. 天津市智能机器人技术重点实验室, 天津 300350; 3. 中国民航大学 理学院, 天津 300300)

**摘要:** Petri网和有限自动机是离散事件动态系统的两类主要研究内容. 而Petri网系统的能观性分析与判别是基于Petri网的实际系统设计、优化、监测及控制的重要基础. 以往关于Petri网能观测性的研究缺乏量化的充要判别条件. 本文利用代数矩阵方法研究了带有输出的有界Petri网系统的能观性问题. 首先, 基于矩阵的半张量积, 将带有输出的有界Petri网系统的动态行为以线性方程组的形式建立了数学模型. 然后, 针对初始标识和当前标识, 介绍了两种能观性定义. 最后, 基于矩阵运算建立了关于有界Petri网系统能观性的几个充分必要条件, 并给出严格证明. 数值算例验证了理论结果. 本文提出的方法实现了有界Petri网系统能观性的矩阵运算, 易于计算机实现.

**关键词:** 离散事件动态系统; 能观性; 有界Petri网系统; Petri网; 矩阵的半张量积

**引用格式:** 高娜, 韩晓光, 陈增强, 等. 基于矩阵方法的有界Petri网系统的能观性分析. 控制理论与应用, 2018, 35(1): 71–78

中图分类号: TP273 文献标识码: A

## Observability analysis of bounded petri net systems via a matrix approach

GAO Na<sup>1,2</sup>, HAN Xiao-guang<sup>1,2</sup>, CHEN Zeng-qiang<sup>1,2,3†</sup>, ZHANG Qing<sup>3</sup>

(1. College of Computer and Control Engineering, Nankai University, Tianjin 300350, China;

2. Tianjin Key Laboratory of Intelligent Robotics, Tianjin 300350, China;

3. College of Science, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China)

**Abstract:** Petri nets and finite automata are two main kinds of research contents in discrete event dynamic systems. The observability analysis and judgement of Petri nets are essential for the design, optimization, monitoring and control of actual systems, but quantitative necessary and sufficient conditions for observability are inexistent during existing research literature. This study investigates the observability problem of bounded petri net systems with outputs via a matrix approach. Firstly, several different petri nets with outputs are introduced. Secondly, using semi-tensor product of matrices, the mathematical modeling of dynamical behavior of bounded petri net systems with outputs is established in the form of linear equations. Thirdly, two different observability definitions, either for initial marking or current marking, are introduced. Finally, some matrix-form necessary and sufficient conditions for both the initial and current marking are first proposed. The proposed approach realizes the matrix operation for the observability of bounded petri net systems and it can be realized easily by computer.

**Key words:** discrete event dynamic systems; observability; bounded Petri net systems; Petri net; semi-tensor product of matrices

**Citation:** GAO Na, HAN Xiaoguang, CHEN Zengqiang, et al. Observability analysis of bounded petri net systems via a matrix approach. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(1): 71–78

### 1 引言(Introduction)

离散事件动态系统是以事件驱动状态演化的动态系统且它的状态集是离散的. 它常见于计算机通信网

络, 城市交通网络, 柔性制造系统等.

能观性是动态系统的一个重要性质, 针对基于时间驱动动态系统的能观性研究已经有很完整的理

收稿日期: 2016–11–05; 录用日期: 2017–04–13.

†通信作者. E-mail: chenqz@nankai.edu.cn; Tel.: +86 22-23508547.

本文责任编辑: 赵千川.

国家自然科学基金项目(61573199, 61573200), 天津市自然科学基金项目(14JCYBJC18700)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61573199, 61573200) and the National Natural Science Foundation of Tianjin (14JCYBJC18700).

论结果. 在基于事件驱动的离散事件动态系统研究中, 自动机和Petri网是最主要的两种模型与方法<sup>[1-2]</sup>, 其中自动机的能观性已经有较多文献研究<sup>[3-4]</sup>, 而目前关于Petri网能观性的研究结果较少, 具体文献介绍如下.

文献[5-6]主要研究了基于变迁观测的Petri网标识的可估计性问题, 并给出了估计算法. 它们所研究的Petri网称之为标签Petri网, 即观测信息来源于发生变迁. 基于部分能观标签Petri网的故障诊断或控制器设计等问题也被广泛研究, 例如最近的文献[7-8]也是以部分能观的标签Petri网为研究对象进而讨论其控制器设计问题. 而文献[9-10]以一种更普遍的Petri网系统为基础研究了诊断问题, 即这类Petri网是变迁和库所部分能观的, 也称之为带有部分能观测库所的标签Petri网. 可见Petri网的能观性对于其他问题的研究至关重要, 所以本文主要研究Petri网能观性的判定条件. 在以上两种关于能观性的Petri网结构的基础上, 文献[11-12]归纳给出了较全面的研究能观性的Petri网结构的定义. 其中主要分为3种: 观测信息来源于发生变迁, 观测信息来源于可达标识和观测信息同时来源于发生变迁和可达标识. 本文的研究对象即为这3种最普遍的能观性Petri网结构.

矩阵的半张量积作为一种新的矩阵乘法<sup>[13]</sup>, 首先在布尔网络领域取得了有效成果<sup>[14-17]</sup>. 随后, 它也被应用于有限自动机<sup>[4]</sup>、petri网<sup>[18-19]</sup>、博弈论等领域. 特别地, 对于布尔网络和自动机的能观性, 利用矩阵的半张量积, 文献[4, 15-17]已经给出了能观性的充要条件. 那么对于Petri网的能观性, 本文的目的就是用矩阵的半张量积给出基于矩阵的充要条件.

本文的主要贡献分为以下3部分: 第一, 利用矩阵的半张量积, 给出了带有输出的有界Petri网动态行为的矩阵模型, 使得可以用矩阵运算研究Petri网的能观性条件. 传统的Petri网能观性的研究大多是基于形式语言或者可达图, 所以本文的优点就是以矩阵运算的形式给出了能观性的判定条件. 第二, 针对初始标识和当前标识的两种能观性定义, 构建了两个矩阵以得到判断能观性的充分必要条件. 本文所给出的能观性的4个充要条件都是基于矩阵运算的, 易与计算机实现.

本文具体内容安排如下. 第2节主要介绍矩阵的半张量积和Petri网的基本知识与符号. 第3节介绍了3种Petri网的观测网结构和两种不同的能观性定义, 同时观测Petri网结构的数学模型也被给出. 第4节得出了初始标识两种能观性的基于矩阵形式的充要条件. 同样, 当前标识两种能观性的充要条件在第5节给出. 第6节用一个简单的例子说明了以上能观性条件的运算过程.

## 2 预备知识(Preliminaries)

### 2.1 基本符号(Notations)

- 1)  $\mathbb{N}$  ( $\mathbb{N}^+$ )表示非负整数(正整数)的集合.
- 2)  $\mathbb{R}^n$ 表示 $n$ 维列向量的集合.
- 3)  $\mathbf{1}_{1 \times b} = \underbrace{[1, 1, \dots, 1]}_b$ .
- 4)  $M^{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 维实矩阵的集合.
- 5)  $\text{col}_j(M)$ 表示矩阵 $M$ 的第 $j$ 列;  $\text{col}(M)$ 表示矩阵 $M$ 的列集合.
- 6)  $\delta_n^k$ 表示单位矩阵 $I_n$ 的第 $k$ 列,  $k = 1, 2, \dots, n$ . 同时令 $\delta_n^0 := [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ .
- 7)  $\Delta_n := \{\delta_n^1, \delta_n^2, \dots, \delta_n^n\}$ ;  $\bar{\Delta}_n := \{\delta_n^0, \delta_n^1, \dots, \delta_n^n\}$ .
- 8) 如果矩阵  $M \in M^{m \times n}$  满足  $\text{col}(M) \subseteq \Delta_m$  ( $\text{col}(M) \subseteq \bar{\Delta}_m$ ), 那么 $M$ 称为逻辑矩阵(广义逻辑矩阵). 并且令  $L^{m \times n}$  ( $\bar{L}^{m \times n}$ ) 表示  $m \times n$  维逻辑矩阵(广义逻辑矩阵)的集合.
- 9) 如果矩阵  $M \in L^{m \times n}$  ( $M \in \bar{L}^{m \times n}$ ), 那么矩阵  $M$  可以表示为  $M = [\delta_m^{i_1} \ \delta_m^{i_2} \ \dots \ \delta_m^{i_n}]$ , 并且简记为  $M := \delta_m [i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n]$ , 其中  $0 \leq i_k \leq m$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .
- 10) 矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  和  $B$  的张量积定义如下:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

### 2.2 矩阵的半张量积 (Semi-tensor product (STP) of matrices)

本小节仅介绍本文所用到的关于矩阵半张量积的知识. 关于矩阵半张量积更详细的介绍见文献[13].

**定义 1**<sup>[13]</sup> 矩阵  $A \in M^{m \times n}$  和  $B \in M^{p \times q}$  的半张量积定义为

$$A \ltimes B = (A \otimes I_{s/n})(B \otimes I_{s/p}), \quad (1)$$

其中:  $s$  为  $n$  与  $p$  的最小公倍数, 记作  $s = \text{lcm}(n, p)$ .

**例 1**  $[0 \ 1]^T \ltimes [1 \ 0]^T = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ ,  
 $[1 \ 1] \ltimes [1 \ 0] = [1 \ 1 \ 0 \ 0]$ .

**注 1** 矩阵的半张量积是普通矩阵乘法的推广, 即当  $n = p$ ,  $A \ltimes B = AB$ .

**引理 1**<sup>[16]</sup> 对于任意两个列向量  $X \in \mathbb{R}^n$  和  $Y \in \mathbb{R}^m$ , 存在换位矩阵  $W_{[m,n]} \in L^{mn \times mn}$  使得

$$X \ltimes Y = W_{[m,n]} \ltimes Y \ltimes X, \quad (2)$$

其中:  $W_{[m,n]} = \delta_{mn} [1, m+1, 2m+1, \dots, (n-1)m+$

$1, 2, m+2, 2m+2, \dots, (n-1)m+2, \dots, m, 2m, 3m, \dots, nm$ ].

**引理 2**<sup>[20]</sup> 若  $\Delta_{m^k}^d = \times_{i=1}^k \delta_m^{j_i}$  是  $k$  个  $m$  维逻辑列向量  $\delta_m^{j_i} (i=1, 2, \dots, k)$  的半张量积, 则这  $k$  个  $m$  维逻辑列向量的值分别求得为  $\delta_m^{j_i} = S_i^k \times \delta_{m^k}^d (i=1, 2, \dots, k)$ , 其中  $E_d = \underbrace{[I_m, \dots, I_m]}_m$ , 以及  $S_i^k (i=1, 2, \dots, k)$

的值如下:

$$\begin{cases} S_1^k = E_d^{k-1} \times W_{[m, m^{k-1}]}, \\ \vdots \\ S_i^k = E_d^{k-1} \times W_{[m^i, m^{k-i}]}, \\ \vdots \\ S_k^k = E_d^{k-1}. \end{cases} \quad (3)$$

### 2.3 Petri网(Petri nets)

本小节给出Petri网的基本定义和性质, 更详细的介绍见文献[21].

Petri网  $\langle N, M_0 \rangle$  的网结构  $N$  是一个4元组  $N = (P, T, \text{Pre}, \text{Post})$ , 其中  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  是有限库所集,  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  是有限变迁集,  $\text{Pre} : P \times T \rightarrow \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$  是由库所指向变迁的弧函数,  $\text{Post} : T \times P \rightarrow \mathbb{N}$  是由变迁指向库所的弧函数.

标识  $M \in \mathbb{R}^n$  是一个向量, 其中每个元素指的是Petri网中的相应库所所含有的非负的托肯数, 特别地,  $M_0$  表示Petri网的初始标识. 用  $M(p)$  表示库所  $p$  在标识  $M$  下所含有的托肯的个数.  $t = \{p \in P | \text{Post}(t, p) > 0\}$  表示变迁  $t \in T$  输出库所的集合,  $t = \{p \in P | \text{Pre}(p, t) > 0\}$  表示变迁  $t \in T$  输入库所的集合.

变迁  $t$  在标识  $M$  下可以发生当且仅当它所有的输入库所  $\forall p \in t$  满足  $M(p) \geq W(p, t)$ , 记作  $M[t >]$ . 假设变迁  $t$  的发生使得标识  $M$  到达标识  $M'$ , 记作  $M[t > M']$ , 其中  $M'$  的每个元素的值为  $M'(p) = M(p) + \text{Post}(t, p) - \text{Pre}(p, t)$ . 相似地,  $M[\sigma >]$  表示变迁序列  $\sigma = t_{j_1} t_{j_2} \dots t_{j_k}$  可以在标识  $M$  下发生, 进而用  $M[\sigma > M']$  表示标识  $M$  在发生变迁  $\sigma$  的作用下可以到达标识  $M'$ .  $L(N, M_0) = \{\sigma \in T^* | M_0[\sigma >]\}$  表示所有在Petri网  $\langle N, M_0 \rangle$  中可发生的变迁序列的集合. 如果存在一个发生变迁序列  $\sigma \in L(N, M_0)$  使得  $M_0[\sigma > M]$ , 称标识  $M$  在Petri网  $\langle N, M_0 \rangle$  中可达. 所有从初始标识可达的标识的集合称为该Petri网  $\langle N, M_0 \rangle$  的可达集(reachability set), 记作  $R(N, M_0)$ .

$\langle N, M_0 \rangle$  称为有界Petri网系统当且仅当存在一个非负整数  $k \in \mathbb{N}$  使得所有可达标识  $M \in R(N, M_0)$  下的每个库所的托肯数都满足  $M(p) \leq k$ . 一个Petri网是有界的当且仅当它的可达标识集  $R(N, M_0)$  是有界集合.

有界Petri网系统  $\langle N, M_0 \rangle$  的动态行为用可达标识

图(reachability graph)  $R = (\mathcal{X}, E, P)$  表示, 其中:  $\mathcal{X} = R(N, M_0) = \{M_0, M_1, \dots, M_r\}$  是可达标识集,  $E = \{(M_j, M_i) | M_j, M_i \in \mathcal{X}, \exists t_k \in T : M_j[t_k > M_i]\}$  是连接任意两个可达标识的弧关系的集合,  $P : E \rightarrow T$  是弧关系和变迁的对应函数, 对应关系为  $P(M_j, M_i) = t_k$  当且仅当  $M_j[t_k > M_i]$ .

### 3 有界Petri网系统(Bounded Petri net systems)

#### 3.1 3种有界Petri网系统的数学模型(Mathematical models of three bounded Petri net systems)

综合一直以来对Petri网的能观性或者状态估计等问题的研究, 文献[11–12]在能观性问题上将Petri网分成了三种网系统, 分别是标签Petri网(Labeled petri nets), 带有输出的标签Petri网(Labeled petri nets with outputs)和自适应标签Petri网(Adaptive labeled petri nets). 这三种网系统的本质区别是关于输出的定义, 而能观性定义的本质就是根据输出估计状态.

首先, 标签Petri网是一个4元组  $G = (N, M_0, \Sigma, \ell)$ , 其中,  $\langle N, M_0 \rangle$  是一个Petri网,  $\Sigma$  是字母表,  $\ell : T \rightarrow \Sigma \cup \{\varepsilon\}$  是将每个变迁  $t \in T$  映射到字母表中或者空字符的标签函数. 因为标签Petri网的输出集是  $\Sigma$ , 所以它的输出由发生变迁唯一决定.

带有输出的标签Petri网是一个5元组  $Q = (N, M_0, \Sigma, \ell, f)$ , 其中,  $(N, M_0, \Sigma, \ell)$  是一个标签Petri网,  $f : R(N, M_0) \rightarrow \mathbb{R}^k$  是可达标识的映射函数. 因为带有输出的标签Petri网的输出集包括两部分  $\Sigma$  和  $\mathbb{R}^k$ , 所以它的输出分别是关于变迁的函数和可达标识的函数.

自适应标签Petri网  $Z = (N, M_0, \tilde{\Sigma}, \tilde{\ell})$ , 其中:  $\langle N, M_0 \rangle$  是一个Petri网,  $\tilde{\Sigma}$  是字符集,  $\tilde{\ell} : R(N, M_0) \times T \rightarrow \tilde{\Sigma} \cup \{\varepsilon\}$  是关于可达标识和变迁的映射函数. 显而易见, 自适应标签Petri网的输出是由变迁和可达标识共同决定的. 文献[11–12]指出在有界的情况下, 标签Petri网和带有输出的标签Petri网都可以转化为自适应标签Petri网, 即自适应标签Petri网是更为普遍的一种网系统.

对于有界Petri网系统, 文献[19]利用矩阵的半张量积将它的动态行为表达成线性方程的形式. 基于本文的目的是以数学的形式研究有界Petri网系统的能观性问题, 所以本小节在文献[19]的基础上, 给出以上所讨论的3种有界Petri网的数学模型.

因为自适应标签Petri网较其他两种标签Petri网是更为普遍的一种网系统, 所以以有界的自适应标签Petri网为例陈述建模过程. 具体过程如下:

已知有界自适应标签Petri网  $Z = (N, M_0, \tilde{\Sigma}, \tilde{\ell})$ , 它的可达标识集, 变迁集和输出集分别为  $\mathcal{X} = \{M_0, M_1, \dots, M_{n-1}\}$ ,  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  和  $\tilde{\Sigma} = \{y_1,$

$y_2, \dots, y_q\}$ . 如果将每个可达标识, 变迁和输出用逻辑列向量表示, 即  $M_{i-1} \sim \delta_n^i, i = 1, 2, \dots, n, t_j \sim \delta_m^j, j = 1, 2, \dots, m$  和  $y_r \sim \delta_q^r, r = 1, 2, \dots, q$ , 那么称  $\delta_n^i, \delta_m^j$  和  $\delta_q^r$  是标识  $M_{i-1}$ , 变迁  $t_j$  和输出  $y_r$  的列向量形式.

利用矩阵的半张量积, 文献[19]将  $Z$  中可达标识之间的动态行为用线性方程表示如下:

$$x(k+1) = L \times u(k) \times x(k), \quad (4)$$

其中:  $L \in \bar{L}^{n \times nm}$  为  $Z$  的变迁标识转移矩阵;  $x(k)$  和  $u(k)$  分别表示  $Z$  在  $k$  时刻的标识和变迁的列向量形式.

**注 2** 利用矩阵的半张量积, Petri网的动态行为可表示成矩阵代数方程4. 相比较于传统的Petri网状态方程, 公式4只含有简单的矩阵乘法且以公式4为基础, 利用矩阵运算很容易可以给出Petri网可达性, 活性等动态性质的充分必要条件, 也进而可以用矩阵方法研究稳定性和能观性等性质.

同理,  $Z = (N, M_0, \tilde{\Sigma}, \tilde{\ell})$  的输出关系也可以表示成公式4的形式. 根据函数  $\tilde{\ell}(t_j, M_i) = y_r$  (或者空字符  $\varepsilon$ ) 可以用列向量表述为  $\tilde{\ell}(\delta_m^j, \delta_n^i) = \delta_q^r(\delta_q^0)$ , 其中,  $\delta_q^0$  是空字符的列向量形式. 可以构建一个输出矩阵  $H \in \bar{L}^{q \times mn}$  如下:

$$H = [H_1 \ H_2 \ \dots \ H_m], \quad (5)$$

其中:  $H_j = [\delta_q^{j_1} \ \delta_q^{j_2} \ \dots \ \delta_q^{j_n}], j = 1, 2, \dots, m$ , 而  $\delta_q^{j_i}$  满足  $\delta_q^{j_i} = \tilde{\ell}(\delta_m^j, \delta_n^i), i = 1, 2, \dots, n, 0 \leq j_i \leq q$ .

所以可以将有界自适应标签Petri网  $Z = (N, M_0, \tilde{\Sigma}, \tilde{\ell})$  的动态行为描述如下:

$$\begin{cases} x(k+1) = L \times u(k) \times x(k), \\ y(k) = H \times u(k) \times x(k), \end{cases} \quad (6)$$

其中:  $x(k), u(k)$  和  $y(k)$  分别表示自适应标签Petri网  $Z$  在  $k$  时刻的标识, 变迁和输出的列向量形式.

同理, 有界标签Petri网  $G = (N, M_0, \Sigma, \ell)$  的线性方程组形式为:

$$\begin{cases} x(k+1) = L \times u(k) \times x(k), \\ y(k) = H \times u(k). \end{cases} \quad (7)$$

这里的  $H \in \bar{L}^{q \times m}$  只是关于变迁的输出矩阵.

带有输出的有界标签Petri网  $Q = (N, M_0, \Sigma, \ell, f)$  的线性方程组形式为

$$\begin{cases} x(k+1) = L \times u(k) \times x(k), \\ y_1(k) = H_1 \times u(k), \\ y_2(k) = H_2 \times x(k). \end{cases} \quad (8)$$

这里的  $H_1 \in \bar{L}^{q_1 \times m}$  是关于变迁的输出矩阵,  $H_2 \in \bar{L}^{q_2 \times n}$  是关于可达标识的输出矩阵.

**注 3** 有界标签Petri网的式(7)和带有输出的有界标签Petri网的式(8)经过简单的矩阵扩充和方程合并操作都可

转化为有界自适应标签Petri网的式(6), 这也说明了有界自适应标签Petri网是一种更普遍的Petri网系统. 所以下节主要研究有界自适应标签Petri网的能观性.

### 3.2 有界Petri网系统的能观性定义(Observability definitions of Petri nets)

关于离散事件动态系统的能观性已有许多种不同的定义, 而作为离散事件动态系统最主要的建模工具之一的Petri网, 它的能观性定义自然也多种多样, 但这些定义的核心思想都是用所观察到的输出字符估计出初始标识或当前标识. 本小节将在文献[5, 22]的基础上, 以自适应标签Petri网  $Z = (N, M_0, \tilde{\Sigma}, \tilde{\ell})$  为对象给出两种不同的能观性定义, 这两种定义也被普遍应用于研究布尔网络和自动机的能观性问题.

**定义 2** 自适应标签Petri网  $Z = (N, M_0, \tilde{\Sigma}, \tilde{\ell})$  关于初始标识  $x(0)$  (当前标识  $x(T)$ ) 是  $T$  步弱能观的, 当且仅当存在一个输入序列  $u(0)u(1) \dots u(T-1)$  使得相对应的输出序列  $y(0)y(1) \dots y(T-1)$  可以唯一确定初始标识  $x(0)$  (当前标识  $x(T)$ ).

**定义 3**<sup>[22]</sup> 自适应标签Petri网  $Z$  关于初始标识  $x(0)$  (当前标识  $x(T)$ ) 是  $T$  步强能观的, 当且仅当对于任意的输入序列  $u(0)u(1) \dots u(T-1)$ , 每一个输出序列  $y(0)y(1) \dots y(T-1)$  都能唯一确定初始标识  $x(0)$  (当前标识  $x(T)$ ).

**注 4** 定义3是根据文献[22]中能观性的定义所给出基于动态模型6的新的表述, 而定义2是相对于定义3给出的一种能观性强度较弱的定义. 定义2和3的区别及直观判定方法详见第6节例证的第一部分.

### 4 初始标识的能观性条件(Observability conditions of initial marking)

本节首先给出有界自适应标签Petri网  $Z = (N, M_0, \tilde{\Sigma}, \tilde{\ell})$  的初始标识的两种能观性的矩阵判断条件.

首先, 有界自适应标签Petri网  $Z$  的线性方程组公式(6)在交换矩阵  $W_{[n,m]}$  的作用的下可表示为

$$\begin{cases} x(k+1) = L \times W_{[n,m]} \times x(k) \times u(k), \\ y(k) = H \times W_{[n,m]} \times x(k) \times u(k), \end{cases} \quad (9)$$

其中:  $L \times W_{[n,m]} \in \bar{L}^{n \times nm}, H \times W_{[n,m]} \in \bar{L}^{q \times nm}$ .

然后, 表示  $L \times W_{[n,m]}$  和  $H \times W_{[n,m]}$  如下:

$$\begin{cases} L \times W_{[n,m]} = \delta_n[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{nm}], \\ H \times W_{[n,m]} = \delta_q[\beta_{1,1}, \dots, \beta_{1,m}, \dots, \\ \beta_{n,1}, \dots, \beta_{n,m}], \end{cases} \quad (10)$$

其中:  $0 \leq \alpha_k \leq n, k = 1, 2, \dots, nm, 0 \leq \beta_{i,j} \leq q, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$ .

现在, 就可以构建一个初始标识-输出矩阵, 它是

解决初始标识能观性问题的关键. 具体步骤如下:

令

$$C_0 = \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,m} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \cdots & \beta_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n,1} & \beta_{n,2} & \cdots & \beta_{n,m} \end{bmatrix} \in M^{n \times m}. \quad (11)$$

然后对于  $k = 1, 2, \dots$ , 令

$$C_k = \begin{bmatrix} C_{k-1}^{\alpha_1} & C_{k-1}^{\alpha_2} & \cdots & C_{k-1}^{\alpha_m} \\ C_{k-1}^{\alpha_{m+1}} & C_{k-1}^{\alpha_{m+2}} & \cdots & C_{k-1}^{\alpha_{2m}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{k-1}^{\alpha_{(n-1)m+1}} & C_{k-1}^{\alpha_{(n-1)m+2}} & \cdots & C_{k-1}^{\alpha_{nm}} \end{bmatrix} \in M^{n \times m^{k+1}}, \quad (12)$$

其中  $C_{k-1}^j$  表示矩阵  $C_{k-1}$  的第  $j$  行. 特别地,  $C_{k-1}^0$  表示  $m^k$  维的全 0 行向量.

现在, 初始标识-输出矩阵可以定义如下:

$$N_{T-1}(\lambda) = \sum_{k=0}^{T-1} \lambda^k (C_k \otimes \mathbf{1}_{1 \times m^{T-1-k}}) \in M^{n \times m^T}. \quad (13)$$

**注 5** 初始标识-输出矩阵  $N_{T-1}(\lambda)$  中的每个元素代表的是有界自适应标签 Petri 网  $Z$  在时间段  $[0, T-1]$  的输出序列. 具体地说  $N_{T-1}(\lambda)$  的第  $i$  行  $j$  列上的元素  $N_{T-1}(\lambda)(i, j)$  代表的是初始标识  $x_0 = M_i$  在  $T$  步的输入序列  $u \sim \delta_{m^T}^j$  下的输出序列, 其中字母  $\lambda^k$  前的系数代表的是第  $k$  步的输出. 定理 1 将会给出证明.

首先, 令  $x(k, x_0, u)$  和  $y(k, x_0, u)$  是式(6)的解, 其中  $x(k, x_0, u)$  是初始标识  $x_0$  在输入序列  $u$  下的第  $k$  步的可达标识,  $y(k, x_0, u)$  是相应的第  $k$  步的输出. 特别地,  $x(0, x_0, u)$  和  $y(0, x_0, u)$  分别指初始标识和第 0 步的输出序列.

**定理 1** 令  $\sum_{k=0}^{T-1} a_{T-1}^{(k)}(i, j) \lambda^k$  表示矩阵  $N_{T-1}(\lambda)$  的第  $i$  行第  $j$  列元素, 那么有

$$y(k, \delta_n^i, \delta_{m^T}^j) = \delta_q(a_{T-1}^{(k)}(i, j)). \quad (14)$$

**证** 首先根据引理 2, 由输入序列  $u \sim \delta_{m^T}^j$  可以求得每一步的输入  $\delta_m^{j_i}$ ,  $i=0, 1, \dots, T-1$ ,  $1 \leq j_i \leq m$ .

当  $k=0$  时, 由公式(13)得  $a_{T-1}^{(0)}(i, j) = \beta_{i, j_1}$ , 而由式(6)解得第 0 步的输出为  $y(0, \delta_n^i, \delta_{m^T}^j) = \delta_q(\beta_{i, j_1}) = \delta_q(a_{T-1}^{(0)}(i, j))$ .

当  $k \geq 1$  时, 由公式 13 的建立过程可以得到  $a_{T-1}^{(k)}(i, j) = C_k^{(i, j^{(k)})}$ ,  $k=0, 1, \dots, T-1$ , 其中  $\delta_{m^{k+1}}^{j^{(k)}} = \delta_m^{j_0} \times \cdots \times \delta_m^{j_k}$ ,  $C_k^{(i, j)}$  是指矩阵  $C_k$  的第  $i$  行  $j$  列. 那么证明式(14)就变成了证明

$$y(k, \delta_n^i, \delta_{m^T}^j) = \delta_q(C_k^{(i, j^{(k)})}). \quad (15)$$

下面用归纳法证明式(15).

当  $k=1$  时,

$$\begin{aligned} y(1, \delta_n^i, \delta_{m^T}^j) &= \\ H \times W_{[n, m]} \times x(1) \times u(1) &= \\ H \times W_{[n, m]} \times L \times W_{[n, m]} \times x(0) \times u(0) \times u(1) &= \\ H \times W_{[n, m]} \times L \times W_{[n, m]} \times \delta_n^i \times \delta_m^{j_1} \times \delta_m^{j_2} &= \\ H \times W_{[n, m]} \times \delta_n(\alpha_{(i-1)m+j_1}) \times \delta_m^{j_2} &= \\ \delta_q(\beta_{\alpha_{(i-1)m+j_1}, j_2}). & \end{aligned} \quad (16)$$

又因为  $C_1^{(i, j^{(1)})} = \beta_{\alpha_{(i-1)m+j_1}, j_2}$ , 所以  $y(1, \delta_n^i, \delta_{m^T}^j) = \delta_q(C_1^{(i, j^{(1)})})$ .

假设  $1 \leq k \leq T-2$  时, 式(15)都成立, 那么, 当  $k=T-1$  时,

$$\begin{aligned} y(T-1, \delta_n^i, \delta_{m^T}^j) &= \\ y(T-2, L \times W_{[n, m]} \times \delta_n^i \times \delta_m^{j_1}, \delta_{m^{T-1}}^l) &= \\ y(T-2, \delta_n^{\alpha_{(i-1)m+j_1}}, \delta_{m^{T-1}}^l) &= \\ \delta_q(C_{T-2}^{(\alpha_{(i-1)m+j_1}, l)}), & \end{aligned} \quad (17)$$

其中  $\delta_{m^{T-1}}^l = \delta_m^{j_1} \times \cdots \times \delta_m^{j_{T-1}}$ .

而因为  $C_{T-1}^{i, j} = C_{T-2}^{(\alpha_{(i-1)m+j_1}, l)}$ , 证得  $y(T-1, \delta_n^i, \delta_{m^T}^j) = \delta_q(C_{T-1}^{i, j})$ .

证毕.

**定理 2** 有界自适应标签 Petri 网  $Z$  的初始标识是弱能观(强能观)的, 当且仅当矩阵  $N_{T-1}(\lambda)$  存在一列(所有的列都)满足所含各个元素都不相同.

**证** ( $\Rightarrow$ ) 如果初始标识是  $T$  步弱能观的, 那么存在一个输入序列使得对于两个不相同的初始标识  $\delta_n^i, \delta_n^{i'}$ ,  $i \neq i'$ , 它们所对应的输出序列也不相同, 也就是说肯定存在  $k$  使得两个输出序列在第  $k$  步的输出不同. 根据定理 1 得, 矩阵  $N_{T-1}(\lambda)$  肯定存在一个列使得所含的元素不同.

( $\Leftarrow$ ) 如果矩阵  $N_{T-1}(\lambda)$  存在一列满足所含各个元素都不相同, 那么对于其中的任意两个元素肯定也不相同. 假设这两个元素可表示为  $\sum_{k=0}^{T-1} a_{T-1}^{(k)}(i, j) \lambda^k$  和  $\sum_{k=0}^{T-1} a_{T-1}^{(k)}(i', j) \lambda^k$ , 则肯定存在一个  $k$  使得  $a_{T-1}^{(k)}(i, j) \neq a_{T-1}^{(k)}(i', j)$ . 由定理 1 得, 上述所述等价于存在一个输入序列使得对于任意两个不同的初始标识, 它们所对应的输出序列都不完全相同.

强能观条件的证明和弱能观相似, 这里就不赘述. 证毕.

## 5 当前标识的能观性条件 (Observability conditions of current marking)

本节在初始标识-输出矩阵  $N_{T-1}(\lambda)$  的基础上, 给出一个当前标识-输出矩阵以研究当前标识的能观性.

由式(6)求得当前标识  $x_T$  和初始标识  $x_0$  的关系如下:

$$\begin{aligned}
 x(T) &= \\
 (L \times W_{[n,m]})^T \times x(0) \times u(0) \times \dots \times u(T-1) &= \\
 (L \times W_{[n,m]})^T \times W_{[m^T,n]} \times u(0) \times \dots \times \\
 u(T-1) \times x(0) &= \\
 G_T \times u(0) \times \dots \times u(T-1) \times x(0), & \quad (18)
 \end{aligned}$$

其中  $G_T = (L \times W_{[n,m]})^T \times W_{[m^T,n]} \in \bar{L}^{n \times nm}$ .

将矩阵  $G_T, N_{T-1}(\lambda)$  分块得

$$\begin{aligned}
 G_T &= [G_T^1 \ G_T^2 \ \dots \ G_T^{m^T}], \\
 N_{T-1}(\lambda) &= [N_{T-1}^1 \ N_{T-1}^2 \ \dots \ N_{T-1}^{m^T}], \quad (19)
 \end{aligned}$$

其中:  $G_T^k \in \bar{L}^{n \times n}, N_{T-1}^k \in M^{n \times 1}, k=1, 2, \dots, m^T$ .

现在, 就可以定义当前标识-输出矩阵如下:

$$M_T(\lambda) = [M_T^1 \ M_T^2 \ \dots \ M_T^{m^T}] \in M^{n \times m^T}, \quad (20)$$

其中:  $M_T^k = G_T^k N_{T-1}^k \in M^{n \times 1}, k=1, 2, \dots, m^T$ .

下面给出定理3证明矩阵  $M_T(\lambda)$  的每个元素都对应于当前状态的输出序列. 在此之前, 定义  $\bar{y}(k, x_T, u)$  表示当前标识  $x_T$  在  $T$  步的输入序列  $u$  下所对应的第  $k$  步的输出.

**定理 3** 令  $\sum_{k=0}^{T-1} b_{T-1}^{(k)}(i, j) \lambda^k$  表示矩阵  $M_T(\lambda)$  的第  $i$  行  $j$  列元素, 那么有

$$\bar{y}(k, \delta_n^i, \delta_{m^T}^j) = \delta_q(b_{T-1}^{(k)}(i, j)). \quad (21)$$

**证** 设经过  $T$  步输入序列  $u \sim \delta_{m^T}^j$  可以到达当前标识  $x_T \sim \delta_n^i$  的初始标识是  $x_0 \sim \delta_n^r$ . 那么这个初始标识也是唯一的, 因为一个初始标识在一个输入序列下至多只能到达一个当前标识.

由矩阵  $M_T(\lambda)$  的定义过程, 可以看出当前标识所对应的  $M_T(\lambda)$  中的每个元素都来源于可到达它的初始标识所对应的  $N_{T-1}(\lambda)$  的元素. 由定理1 和以上分析可知,  $M_T(\lambda)$  的每个元素都代表着当前标识所对应的输出序列, 即公式(21)成立.

证毕.

**注 6** 定理3证明了矩阵  $M_T(\lambda)$  中的每个元素都表示当前标识在特定的输入序列下的输出序列, 那么接着就可以给出定理4 用矩阵  $M_T(\lambda)$  来判断当前标识的能观性.

**定理 4** 有界自适应标签Petri网  $Z$  的当前标识是弱能观(强能观)的, 当且仅当矩阵  $M_T(\lambda)$  存在一列(所有的列都)满足所含各个元素都不相同.

**证** 由定理3可知, 矩阵  $M_T(\lambda)$  的每个元素都对应于在特定输入序列下当前标识的输出序列. 又因为本文中当前标识的能观性和初始标识能观性的定义是统一的, 所以定理4的证明过程和定理2 相似. 这里就不赘述.

证毕.

## 6 例证(Illustrative example)

图1的Petri网  $\langle N, M_0 \rangle$  是对有2名救火队员的实际救火系统的建模. 其中  $p_1$  表示等待救火的队员数,  $p_2$  表示运水的队员数,  $p_3$  表示运桶的队员数,  $t_1$  表示接水动作,  $t_2$  表示泼水动作,  $t_3$  表示等待动作, 初始标识  $M_0 = [2 \ 0 \ x_0]$  表示2名队员都处于等待状态. 若再给定一个输出集  $\tilde{\Sigma} = \{y_1, y_2, y_3\}$  表示2名队员的能量值, 那么就可以用有界自适应标签Petri网  $Z = (N, M_0, \tilde{\Sigma}, \tilde{\ell})$  对其进行建模. 它对应的带有输出关系的可达标识图如图2所示.

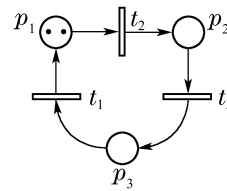


图1 有界Petri网系统  $\langle N, M_0 \rangle$

Fig. 1 Bounded Petri net systems  $\langle N, M_0 \rangle$

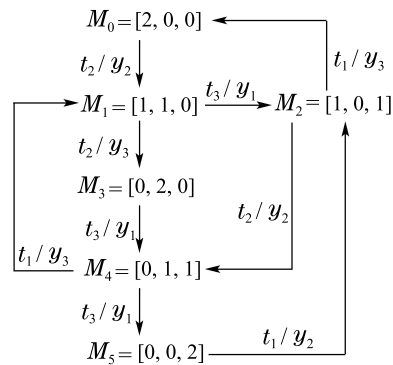


图2  $Z$  的带有输出关系的可达标识图

Fig. 2 The reachability graph with outputs of  $Z$

1) 以该Petri网建模实例为例, 解释说明初始标识的定义2和3的区别及其直观判定方法.

在救火系统中定义2和3的区别是: 强能观要求对于任意一个已知的动作序列下, 都可以根据2名队员能量的多少估计出救火队员的初始状态. 而弱能观只要求存在一个已知的动作序列, 使得可以根据2名队员能量的多少估计出救火队员的初始状态.

观察图2可得, 存在一个输入序列  $t_2 t_3$ , 它所对应的输出序列  $y_2 y_1$  同时对应两个初始标识  $M_0$  和  $M_2$ , 也即初始标识  $M_0$  和  $M_2$  在输入序列  $t_2 t_3$  下不能由输出序列唯一确定. 所以该Petri网的初始标识不是2步强能观的.

由图2可得, 因为存在一个输入序列  $t_1 t_2$ , 它所对应的输出序列  $y_3 y_2, y_3 y_3$  和  $y_2 y_2$  都可以唯一确定相应的初始标识  $M_2, M_4$  和  $M_5$ , 所以该Petri网的初始标识是2步弱能观的.

2) 用本文提出的方法判断初始标识(当前标识)的两种能观性.

对于有界自适应标签Petri网 $Z$ , 令 $M_{i-1} \sim \delta_6^i, i=1, \dots, 6; t_j \sim \delta_3^j, j=1, 2, 3; y_r \sim \delta_3^r, r=1, 2, 3$ .

$$\begin{cases} x(k+1) = L \times u(k) \times x(k), \\ y(k) = H \times u(k) \times x(k), \end{cases}$$

那么 $Z$ 的动态行为的矩阵模型为

其中:

$$L \times W_{[6,3]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \delta_6[0, 2, 0, 0, 4, 3, 1, 5, 0, 0, 0, 5, 2, 0, 6, 3, 0, 0],$$

$$H \times W_{[6,3]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \delta_3[0, 2, 0, 0, 3, 1, 3, 2, 0, 0, 0, 1, 3, 0, 1, 2, 0, 0].$$

在以上两个矩阵的基础上, 给出初始标识和当前标识的2步能观性的判断过程.

首先是初始标识能观性的判断.

由矩阵 $L \times W_{[6,3]}$ 和 $H \times W_{[6,3]}$ 可以得出

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由矩阵 $C_0, C_1$ 就可求得初始标识和两步的输出序列之间的对应关系矩阵如下:

$$N_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 3\lambda + 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2\lambda + 3 & 3 & 3\lambda + 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3\lambda + 3 & \lambda + 3 & 0 & 0 \\ 3\lambda + 2 & 2\lambda + 2 & 2 & 0 & 0 \\ \lambda + 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + 3 & 3\lambda + 1 & 2\lambda + 1 & 1 & 0 \\ \lambda + 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\lambda + 1 & 1 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 2\lambda + 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因为 $N_1(\lambda)$ 的第1, 6, 7, 8, 9列都含有相同的元素, 所以初始标识不是2步强能观的. 又因为存在一列满足所含有的元素不相同, 所以初始标识是2步弱能观的. 利用本文所提出的矩阵方法所得出的关于初始标识两种能观性的判定结果和第一问中根据可达标识图分析的结果一致, 说明了本文方法的正确性.

下面讨论当前标识 $x_2$ 的两种能观性.

$$G_2 = (L \times W_{[6,3]})^2 \times W_{[9,6]} = \delta_6[0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 4, 5, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 3, 5, 6, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 2, 3, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0].$$

由 $G_2$ 和 $N_1(\lambda)$ 求得

$$M_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 3\lambda + 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda + 3 & 0 & 3\lambda + 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3\lambda + 3 & 0 & 0 & 3\lambda + 2 \\ 0 & 2\lambda + 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\lambda + 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\lambda + 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + 2 & 2\lambda + 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + 3 & 0 & 2\lambda + 1 & 0 & 0 \\ \lambda + 2 & 0 & 0 & \lambda + 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

因为 $M_2(\lambda)$ 的第6列含有两个 $\lambda + 2$ 元素, 所以两步的当前标识不是强能观的. 但存在一列使得它的元素各不相同, 所以当前标识 $x_2$ 是弱能观的.

### 7 结论(Conclusions)

本文用矩阵的半张量积研究了带有输出的有界Petri网系统的两种能观性问题, 并且提出了能观性的充分必要条件. 本文首次用矩阵的半张量积研究有界Petri网系统的能观性, 实现了基于矩阵运算的可观性的判断条件. 本文的结果使得Petri网能观性的研究可以借助于MATLAB等数学工具进行分析, 进而提高了效率.

## 参考文献(References):

- [1] CASSANDRAS C G, LAFORTUNE S. *Introduction to Discrete Event System* [M]. Springer, New York, 2008.
- [2] LIU Jiufu, LIU Wenliang, ZHOU Jianyong, et al. An improved design of online fault diagnosis for partially observed Petri net systems [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2015, 32(7): 866 – 872. (刘久富, 刘文良, 周建勇, 等. 改进的部分能观Petri网系统在线故障诊断器设计 [J]. *控制理论与应用*, 2015, 32(7): 866 – 872.)
- [3] WANG W L, LAFORTUNE S, LIN F. An algorithm for calculating indistinguishable states and clusters in finite-state automata with partially observable transitions [J]. *Systems & Control Letters*, 2007, 56(9/10): 656 – 661.
- [4] XU X R, HONG Y G. Matrix expression and reachability of finite automata [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2012, 10(2): 210 – 215.
- [5] GIUA A, SEATZU C. Observability of place/transition nets [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(9): 1424 – 1437.
- [6] GIUA A. State estimation and fault detection using Petri nets [C] // *Proceedings of the 32nd International Conference on Applications and Theory of Petri Nets*. 2011, 29(11): 38 – 48.
- [7] LUO J L, ZHOU M C. Petri-net controller synthesis for partially controllable and observable discrete event systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, DOI: 10.1109/TAC.2016.2586604.
- [8] LUO J, ZHAO Q, HUANG Y S, et al. Discrete-event controller synthesis based on state space models [C] // *2015 IEEE International Conference on Automation Science and Engineering (CASE)*. New York: IEEE, 2015: 87 – 92.
- [9] GENÇ S, LAFORTUNE S. Distributed diagnosis of place-bordered Petri nets [J]. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2007, 4(2): 206 – 219.
- [10] LEFEBVRE D. Diagnosis with Petri nets according to partial events and states observation [J]. *IFAC Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*, 2012, 45(20): 1244 – 1249.
- [11] TONG Y, LI Z W, GIUA A. General observation structures for Petri nets [C] // *IEEE the 18th Conference on Emerging Technologies & Factory Automation*. New York: IEEE, 2013, DOI: 10.1109/ET-FA.2013.6648161.
- [12] TONG Y, LI Z W, GIUA A. On the equivalence of observation structures for Petri net generators [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(9): 2448 – 2462.
- [13] CHENG D Z, QI H S, ZHAO Y. *An Introduction to Semi-tensor Product of Matrices and Its Applications* [M]. Singapore: World Scientific, 2012.
- [14] CHENG Daizhan, QI Hongsheng, ZHAO Yin. Analysis and control of boolean networks: a semi-tensor product approach [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2011, 37(5): 530 – 540. (程代展, 齐洪胜, 赵寅. 布尔网络的分析与控制——矩阵半张量积方法 [J]. *自动化学报*, 2011, 37(5): 530 – 540.)
- [15] CHENG D Z, QI H S. Controllability and observability of boolean control networks [J]. *Automatica*, 2009, 45(7): 1659 – 1667.
- [16] ZHAO Y, QI H S, CHENG D Z. Input-state incidence matrix of boolean control networks and its applications [J]. *Systems & Control Letters*, 2010, 59(12): 767 – 774.
- [17] FORNASINI E, VALCHER M E. Observability, reconstructibility and state observers of boolean control networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(6): 1390 – 1401.
- [18] HAN X G, CHEN Z Q, ZHANG K Z, et al. Modeling and reachability analysis of a class of petri nets via semi-tensor product of matrices [C] // *Proceedings of the 34th Chinese Control Conference*. Beijing: Technical Committee on Control Theory, Chinese Association of Automation, 2015: 6586 – 6591.
- [19] GAO Na, HAN Xiaoguang, CHEN Zengqiang, et al. The modeling and reachability analysis of bounded petri net systems with synchronizing transition [J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2016, 36(7): 924 – 936. (高娜, 韩晓光, 陈增强, 等. 带有同步变迁的有界Petri网系统的建模及可达性分析 [J]. *系统科学与数学*, 2016, 36(7): 924 – 936.)
- [20] YAN Y Y, CHEN Z Q, LIU Z X. Semi-tensor product of matrices approach to reachability of finite automata with application to language recognition [J]. *Frontiers of Computer Science*, 2014, 8(6): 948 – 957.
- [21] MURATA T. Petri nets: properties, analysis and applications [J]. *Proceedings of the IEEE*, 1989, 77(4): 541 – 580.
- [22] CAMPOS-RODRIGUEZ R, RAMIREZ-TREVINO A, LOPEZ-MELLADO E. Observability analysis of free-choice Petri net models [C] // *Proceedings of the 2006 IEEE/SMC Int. Conference on System of Systems Engineering*. New York: IEEE, 2006, 6: 77 – 82.

## 作者简介:

高娜 (1992–), 女, 硕士, 目前研究方向为离散事件动态系统、Petri网、自动机等, E-mail: gaon\_yoo@163.com;

韩晓光 (1984–), 男, 博士, 目前研究方向为离散事件动态系统、Petri网、自动机等, E-mail: hxg-allen@163.com;

陈增强 (1964–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为智能预测控制、离散事件动态系统、复杂动态网络、多智能体控制系统等, E-mail: chenmq@nankai.edu.cn;

张青 (1965–), 女, 教授, 目前研究方向为混沌系统、复杂网络、多智能体系统等, E-mail: qz120168@hotmail.com.