

# 含有摩擦补偿的全方位移动机器人自抗扰控制

王圣翔<sup>1</sup>, 任超<sup>1†</sup>, 马书根<sup>1,2</sup>

(1. 天津大学 电气自动化与信息工程学院, 天津 300072;

2. 立命馆大学 理工学部机器人系, 日本 滋贺 5258577)

**摘要:** 本文针对全方位移动机器人轨迹跟踪中的摩擦补偿问题, 提出了一种改进的非线性自抗扰控制器. 首先建立了含有经典静态摩擦模型的全方位移动机器人动力学模型. 其次, 基于该模型设计非线性控制器和线性扩张状态观测器并给出了系统的稳定性分析. 通过将模型已知项加入线性扩张状态观测器中得到摩擦力的估计值, 并将估计值用于非线性控制器中摩擦补偿部分. 为减小摩擦力对机器人低速运动轨迹跟踪控制的影响, 非线性控制器采用变增益控制器进行轨迹跟踪控制. 最后通过仿真结果验证本文提出控制器的有效性.

**关键词:** 摩擦; 全方位移动机器人; 自抗扰控制; 非线性控制系统

中图分类号: TP273 文献标识码: A

## Active disturbance rejection control with friction compensation for an omnidirectional mobile robot

WANG Sheng-xiang<sup>1</sup>, REN Chao<sup>1†</sup>, MA Shu-gen<sup>1,2</sup>

(1. School of Electrical and Information Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China;

2. Department of Robotics, College of Science and Engineering, Ritsumeikan University, Shiga 5258577, Japan)

**Abstract:** This paper presents an improved nonlinear active disturbance rejection controller with friction compensation, designed for trajectory tracking control of an omnidirectional mobile robot. The dynamic model with static friction model of an omnidirectional mobile robot is presented firstly. Based on this model, a linear extended state observer and a nonlinear controller are designed while the stability analysis is provided. To get the estimation of friction, the available model is added into the linear extended state observer and the estimation is used in friction compensation of the nonlinear controller. To decrease influence of friction when the robot is in low-speed, a variable gain controller is used in the nonlinear controller for trajectory tracking control. Finally, the simulation results are demonstrated to prove the controller effective for friction compensation.

**Key words:** friction; omnidirectional mobile robot; active disturbance rejection control; nonlinear control systems

### 1 引言(Introduction)

全方位移动机器人是一种完整约束机器人, 与非完整约束机器人相比具有更高的机动性和灵活性, 适合在狭窄的空间中工作, 在各行业的应用广泛, 如智能轮椅、搬运机器人、救灾机器人等<sup>[1]</sup>. 在移动机器人低速运动或行进路面较为粗糙时, 机器人与地面的摩擦力对机器人运动影响较大, 传统的机器人运动控制方法精度较低, 因此, 摩擦补偿在提高全方位移动机器人轨迹跟踪控制精度中具有重要作用.

目前对不考虑摩擦力的全方位移动机器人动力学建模研究较为广泛<sup>[2-5]</sup>, 但对于考虑摩擦力的动力学

建模研究仍很有限. André等首先建立了基于经典静态摩擦模型的全方位移动机器人动力学模型<sup>[6]</sup>, 同时还提出了模型中的粘滞摩擦系数、库伦摩擦系数、机器人转动惯量等模型参数的测量方法. 随后, Andre采用Stribeck摩擦力模型代替经典静态摩擦模型进行动力学建模, 并给出了新的粘滞摩擦系数等模型参数的测量方法<sup>[7]</sup>. 两者相比, 前者的摩擦力估计方法较简单, 后者得到的摩擦力的估计值更准确.

基于含有经典静态摩擦模型的全方位移动机器人动力学模型, Júlio等设计了含有摩擦补偿的模型预测控制器<sup>[8]</sup>. 该控制器中使用的粘滞摩擦系数等模型参

收稿日期: 2017-02-20; 录用日期: 2017-09-12.

† 通信作者. E-mail: renchao@tju.edu.cn; Tel.: +86 15922014821.

本文责任编辑: 王龙.

国家自然科学基金项目(61603270), 天津市科技支撑计划重点项目(15ZCZDZX00810)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61603270) and Key Project of Tianjin Science and Technology Support Program (15ZC-ZDZX00810).

数需通过实验测得估计值. 但是如果地面环境改变, 模型中粘滞摩擦系数等模型参数随之改变, 因此该控制器无法保持较好的控制效果. 为使控制器在机器人受到不同的摩擦力时仍可以保持较好的控制效果, 岳李勇等利用径向基神经网络逼近摩擦力, 并基于反步设计法设计了自适应控制器, 对移动机器人运动过程中受到的摩擦力和不可建模的动态进行补偿<sup>[9]</sup>. 虽然该控制器在机器人受到不同摩擦力时轨迹跟踪误差较小, 但是由于神经网络算法的计算量较大.

自抗扰控制通过扩张状态观测器对系统总扰动进行估计进而进行补偿. 扩张状态观测器是自抗扰控制的重要组成部分, 对于扰动的估计不依赖于被控对象的精确模型<sup>[10]</sup>, 结构简单, 计算量小. 自抗扰控制在移动机器人领域得到了广泛的应用, 如: Kang等将移动机器人与地面产生的相对滑动作为扰动, 提出含有相对滑动的移动机器人自抗扰控制器<sup>[11]</sup>; Ren等基于自抗扰控制, 在传统PD控制器中加入系统总扰动的估计值进行全方位移动机器人轨迹跟踪控制<sup>[12]</sup>.

本文主要有3个创新点: 首先, 基于经典静态摩擦模型对全方位移动机器人进行动力学建模; 其次, 基于该动力学模型设计非线性控制器和线性扩张状态观测器(linear extended state observer, LESO). 非线性控制器分为摩擦补偿部分和轨迹追踪部分. 摩擦补偿部分中, 摩擦力的估计值由LESO得到. 为提高对摩擦力估计的准确性, 本文将模型已知部分加入LESO对摩擦力进行估计<sup>[13]</sup>. 为提高机器人低速运动时轨迹追踪控制的精度, 非线性控制器中轨迹追踪部分增益随机器人速度减小而增大; 最后, 系统稳定性分析证明了系统是有界输入有界输出稳定的. 本文最后通过仿真结果验证了控制器的有效性.

## 2 动力学建模(Dynamic modeling)

本文全方位移动机器人原型采用全向轮<sup>[14]</sup>, 通过3个电机驱动实现全方位移动. 在世界坐标系和相对于全方位移动机器人质心的移动坐标系中, 机器人的受力分析如图1所示, 模型参数定义如表1所示.

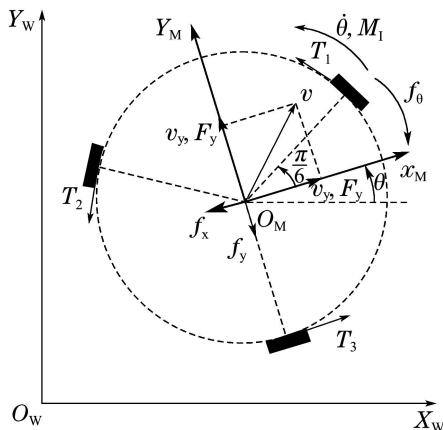


图1 机器人受力分析图  
Fig. 1 Force analysis of robot

表1 机器人模型参数定义

Table 1 Definition of parameters in robot model

参数名称	参数定义
$m$	机器人质量
$b_0$	电机、齿轮传动链和轮子的综合粘滞摩擦系数
$R_a$	电机电枢电阻
$L_0$	全方位轮内外轴心与机器人质心的平均距离
$I_0$	电机、齿轮传动链和轮子的综合转动惯量
$R$	全方位轮半径
$I_v$	机器人以质心为参考点的转动惯量
$k_b$	电机反电动势常数
$k_t$	电机转矩常数
$n$	齿轮减速比
$B_x, B_y, B_\theta$	分别与 $v_y, v_x$ 和 $\dot{\theta}$ 相关的粘滞摩擦系数
$C_x, C_y, C_\theta$	分别与 $v_y, v_x$ 和 $\dot{\theta}$ 相关的库仑摩擦系数
$f_x, f_y, f_\theta$	在 $v_y, v_x$ 和 $\dot{\theta}$ 方向上的摩擦力及力矩

从移动坐标系到世界坐标系的坐标变换矩阵为

$${}^W_M \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

则

$$\dot{\mathbf{q}} = {}^W_M \mathbf{R} \mathbf{V}_M, \quad (2)$$

其中:  $\mathbf{q} = [x \ y \ \theta]^T$ 表示世界坐标系下的机器人位姿,  $\mathbf{V}_M = [v_x \ v_y \ \dot{\theta}]^T$ 表示移动坐标系下的机器人速度. 在移动坐标系下, 机器人的动力学方程由图1可得:

$$\begin{cases} m(\dot{v}_x - v_y \dot{\theta}) = F_x - B_x v_x - C_x \text{sgn } v_x, \\ m(\dot{v}_y + v_x \dot{\theta}) = F_y - B_y v_y - C_y \text{sgn } v_y, \\ I_v \ddot{\theta} = M_1 - B_\theta \dot{\theta} - C_\theta \text{sgn } \dot{\theta}, \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{sgn } x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

其中:  $F_x$ 和 $F_y$ 分别表示机器人质心在移动坐标系中 $X_M$ 和 $Y_M$ 方向上受到牵引力的合力,  $M_1$ 是机器人相对于质心受到牵引力的合力矩, 则

$$\begin{cases} F_x = -\frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{2}T_2 + T_3, \\ F_y = \frac{\sqrt{3}}{2}T_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}T_2, \\ M_1 = T_1 L_0 + T_2 L_0 + T_3 L_0. \end{cases} \quad (4)$$

由式(3)-(4)得到全方位移动机器人在移动坐标系下的动力学模型为

$$M_1 \dot{\mathbf{V}}_M + C_1 \mathbf{V}_M + \mathbf{F}_1 = B_1 \mathbf{T}, \quad (5)$$

其中:  $\mathbf{T} = [T_1 \ T_2 \ T_3]^T$ 表示3个全方位轮分别受到的牵引力,

$$M_1 = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_v \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ L_0 & L_0 & L_0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & -m\dot{\theta} & 0 \\ m\dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_{\dot{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_x v_x + C_x \text{sgn } v_x \\ B_y v_y + C_y \text{sgn } v_y \\ B_{\theta} \dot{\theta} + C_{\theta} \text{sgn } \dot{\theta} \end{bmatrix}.$$

基于文献[15], 由式(1)–(5)得到世界坐标系中全方位移动机器人的动力学模型为

$$\ddot{q} + M^{-1}C\dot{q} + M^{-1}F = M^{-1}Bu, \quad (6)$$

其中:  $F = F_1$ ,

$$M = \begin{bmatrix} (\alpha_0 + m) \cos \theta & (\alpha_0 + m) \sin \theta & 0 \\ -(\alpha_0 + m) \sin \theta & (\alpha_0 + m) \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha_0 L_0^2 + I_v \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} \alpha_1 \cos \theta - \alpha_0 \dot{\theta} \sin \theta & \alpha_1 \sin \theta + \alpha_0 \dot{\theta} \cos \theta & 0 \\ -\alpha_1 \sin \theta - \alpha_0 \dot{\theta} \cos \theta & \alpha_1 \cos \theta - \alpha_0 \dot{\theta} \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha_1 L_0^2 \end{bmatrix},$$

$$B = \alpha_2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ L_0 & L_0 & L_0 \end{bmatrix},$$

$$\alpha_0 = \frac{3n^2 I_0}{2R^2}, \alpha_1 = \frac{3n^2}{2R^2} \left( b_0 + \frac{k_t k_b}{R_a} \right), \alpha_2 = \frac{nk_t}{RR_a}.$$

### 3 控制系统设计(Control system design)

控制系统结构框图如图2所示, 该系统主要包含两个部分: 非线性控制器和LESO. 首先设计LESO得到摩擦力的估计值, 然后设计非线性控制器进行摩擦补偿和轨迹追踪控制.

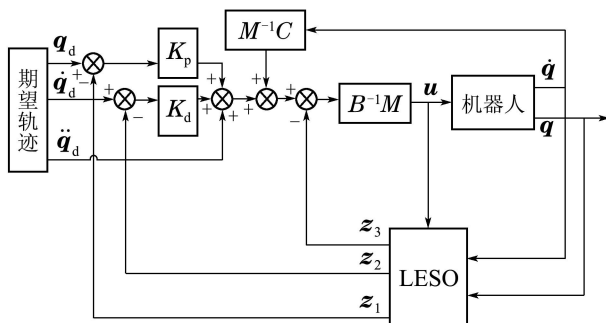


图 2 控制系统框图

Fig. 2 Control system diagram

### 3.1 扩张状态观测器设计(Design of LESO)

基于全方位移动机器人动力学模型(6), 将模型已知项  $M^{-1}C\dot{q}$  加入 LESO, 可以得到全方位移动机器人所受摩擦力的估计值  $F_e$ .

定义状态变量  $x_1 = q, x_2 = \dot{q}, x_3 = f(t), f(t) = -M^{-1}F$ , 则系统的状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 - M^{-1}C\dot{q} + M^{-1}Bu, \\ \dot{x}_3 = \dot{f}(t). \end{cases} \quad (7)$$

设  $z_i (i = 1, 2, 3)$  为状态变量  $x_i$  的估计值, 则

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = x_1 - z_1, \\ \dot{z}_1 = z_2 + \beta_1 \tilde{x}_1, \\ \dot{z}_2 = z_3 + \beta_2 \tilde{x}_1 - M^{-1}C\dot{q} + M^{-1}Bu, \\ \dot{z}_3 = \beta_3 \tilde{x}_1, \end{cases} \quad (8)$$

其中:

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 3\omega_o & 0 & 0 \\ 0 & 3\omega_o & 0 \\ 0 & 0 & 3\omega_o \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 3\omega_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3\omega_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\omega_o^2 \end{bmatrix},$$

$$\beta_3 = \begin{bmatrix} \omega_o^3 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_o^3 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_o^3 \end{bmatrix}.$$

这里,  $\omega_o$  是观测器带宽<sup>[16]</sup>且  $\omega_o > 0$ . 由于  $z_3$  为  $x_3$  的估计值, 故摩擦力的估计值  $F_e$  为

$$F_e = -Mz_3. \quad (9)$$

### 3.2 控制器设计(Design of controller)

含有摩擦补偿的自抗扰控制器(active disturbance controller with friction, ADRCF)可以分为摩擦补偿部分和轨迹追踪部分. 其中, 摩擦补偿部分设计如下:

$$u_1 = B^{-1}F_e = -B^{-1}Mz_3. \quad (10)$$

轨迹追踪部分设计如下:

$$u_2 = B^{-1}M[\ddot{q}_d + K_p(q_d - z_1) + K_d(\dot{q}_d - z_2) + M^{-1}C\dot{q}], \quad (11)$$

其中:  $q_d$  为机器人期望位姿,

$$K_p = \begin{bmatrix} \omega_{c1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{c2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{c3}^2 \end{bmatrix}, K_d = \begin{bmatrix} 2\omega_{c1} & 0 & 0 \\ 0 & 2\omega_{c2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega_{c3} \end{bmatrix}.$$

为了提高机器人低速运行时的控制精度, 令

$$\omega_{ci} = \omega_c \left( 1 + \frac{a}{|\dot{q}_i| + b} \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (12)$$

其中:  $\omega_c$  为控制器的初始带宽<sup>[16]</sup>,  $\dot{q}_i$  表示  $\dot{q}$  的第  $i$  个分量.

由式(12)可知, 控制器每个通道的增益会随着机

器人速度的变化而变化,当速度较大时,控制器增益与初始增益相近;当速度较小时,控制器增益增大,提高控制精度.每个通道的最大增益由参数 $a$ 和参数 $b$ 确定,通过参数的调节避免控制器带宽大于观测器带宽或执行器饱和问题.

由式(10)–(11)可得控制器的输出为

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{M}[\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_p(\mathbf{q}_d - \mathbf{z}_1) + \mathbf{K}_d(\dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{z}_2) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{z}_3]. \quad (13)$$

### 3.3 稳定性分析(Stability analysis)

令观测误差 $\tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{z}_i (i = 1, 2, 3)$ , 由式(7)–(8)得:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 = \tilde{\mathbf{x}}_2 - 3\omega_o\tilde{\mathbf{x}}_1, \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 = \tilde{\mathbf{x}}_3 - 3\omega_o^2\tilde{\mathbf{x}}_1, \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_3 = \dot{\mathbf{f}}(t) - \omega_o^3\tilde{\mathbf{x}}_1. \end{cases} \quad (14)$$

**定理 1** 在式(14)中,若 $\mathbf{f}(t)$ 的每个元素都是有界的,则对于任意的 $\omega_o > 0$ ,存在一个常向量 $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3]^T$ ,且 $\sigma_i > 0$ ,使得在有限时间内 $\tilde{\mathbf{x}}_i$ 中的每个元素 $\tilde{x}_{ij}(t)$ 满足:  $|\tilde{x}_{ij}(t)| \leq \sigma_i (i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3)$ .

**证** 令 $\boldsymbol{\varepsilon}_i = \frac{1}{\omega_o^{i-1}}\tilde{\mathbf{x}}_i$ , 得

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \omega_o\mathbf{A}_o\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\mathbf{B}_o\dot{\mathbf{f}}(t)}{\omega_o^2}, \quad (15)$$

其中:  $\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} -3\mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_3 \\ -3\mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{I}_3$ 表示3阶单位矩阵,  $\mathbf{O}_3$ 表示3阶零矩阵.

假设观测器的初始观测误差为零,即 $\boldsymbol{\varepsilon}(0) = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ ,解方程(15)可以得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(t) &= \int_0^t \mathbf{e}^{\omega_o\mathbf{A}_o(t-\tau)} \frac{\mathbf{B}_o\dot{\mathbf{f}}(\tau)}{\omega_o^2} d\tau = \\ & \frac{1}{\omega_o^2} \left[ \int_0^t \omega_o\mathbf{A}_o\mathbf{e}^{\omega_o\mathbf{A}_o(t-\tau)} \mathbf{B}_o\dot{\mathbf{f}}(\tau) d\tau + \right. \\ & \left. \mathbf{e}^{\omega_o\mathbf{A}_o(t-\tau)} \mathbf{B}_o\dot{\mathbf{f}}(\tau) \Big|_0^t \right] = \\ & \frac{1}{\omega_o^2} \left[ \int_0^t \omega_o\mathbf{A}_o\mathbf{e}^{\omega_o\mathbf{A}_o(t-\tau)} \mathbf{B}_o\dot{\mathbf{f}}(\tau) d\tau + \mathbf{B}_o\dot{\mathbf{f}}(t) \right]. \end{aligned}$$

因为 $\mathbf{f}(t)$ 中每个元素都是有界的,即存在一个常向量 $\mathbf{f}_m$ ,满足 $|\mathbf{f}(t)| \leq \mathbf{f}_m$ . 因此

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(t) &\leq \frac{1}{\omega_o^2} \left[ \int_0^t \omega_o\mathbf{A}_o\mathbf{e}^{\omega_o\mathbf{A}_o(t-\tau)} \mathbf{B}_o\mathbf{f}_m d\tau + \mathbf{B}_o\mathbf{f}_m \right] = \\ & \frac{1}{\omega_o^2} \mathbf{e}^{\omega_o\mathbf{A}_ot} \mathbf{B}_o\mathbf{f}_m. \end{aligned} \quad (16)$$

根据文献[17],若 $\mathbf{A}_o$ 是赫尔维兹的,则存在一个有限的时间 $T_1$ ,对于所有 $t \geq T_1$ ,

$$|[\mathbf{e}^{\omega_o\mathbf{A}_ot}]_{ij}| \leq \frac{1}{\omega_o^9}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 9. \quad (17)$$

因此,可以得到

$$|[\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(t)]| \leq \frac{[\mathbf{f}_m]_i}{\omega_o^{11}}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (18)$$

由 $\boldsymbol{\varepsilon}_i = \frac{1}{\omega_o^{i-1}}\tilde{\mathbf{x}}_i$ 得

$$|\tilde{x}_{ij}(t)| \leq \frac{[\mathbf{f}_m]_i}{\omega_o^{12-i}} = \delta_i, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (19)$$

因此,扩张状态观测器的观测误差是有界的,并且随观测器带宽增加而减小.

下面对闭环系统进行分析.令追踪误差 $\mathbf{e}_1 = \mathbf{q}_d - \mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{e}_2 = \dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{x}_2$ , 则:  $\dot{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_2$ ,  $\dot{\mathbf{e}}_2 = -\mathbf{K}_p(\mathbf{e}_1 + \tilde{\mathbf{x}}_1) - \mathbf{K}_b(\mathbf{e}_2 + \tilde{\mathbf{x}}_2) - \tilde{\mathbf{x}}_3$ . 整理得

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_e\mathbf{e} + \mathbf{A}_x\tilde{\mathbf{x}}, \quad (20)$$

其中:

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_3 & \mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{K}_p & -\mathbf{K}_d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 \\ -\mathbf{K}_p & -\mathbf{K}_d & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}.$$

**定理 2** 在系统(7)–(8)和(13)中,若 $\mathbf{f}(t)$ 是有界的,则对于任意的 $\omega_o > 0$ 和 $\omega_c > 0$ ,存在一个常向量 $\boldsymbol{\rho} = [\rho_1 \ \rho_2 \ \dots \ \rho_6]^T$ ,且 $\rho_i > 0$ ,使得在有限时间内 $\mathbf{e}$ 中的每个元素 $e_i(t)$ 满足:  $|e_i(t)| \leq \rho_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ .

**证** 解方程(20)得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t) &= \mathbf{e}^{\int_0^t \mathbf{A}_e(\xi) d\xi} \mathbf{e}(0) + \mathbf{e}^{\int_0^t \mathbf{A}_e(\xi) d\xi} \int_0^t \mathbf{e}^{-\int_0^\xi \mathbf{A}_e(\zeta) d\zeta} \mathbf{A}_x\tilde{\mathbf{x}}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (21)$$

由式(12)得:  $\omega_c < \omega_{ci} < \omega_c(1 + \frac{a}{b})$ , 由定理1得

$$\begin{cases} [\mathbf{A}_x\tilde{\mathbf{x}}(\xi)]_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ |[\mathbf{A}_x\tilde{\mathbf{x}}(\xi)]_i| = |-\omega_{cj}^2\tilde{x}_{j1} - \omega_{cj}\tilde{x}_{j2} - \tilde{x}_{j3}| \leq \\ \quad (1 + \omega_c(1 + \frac{a}{b}))^2\delta_j = \lambda_j, \\ \quad i = 4, 5, 6, \quad j = i - 3. \end{cases}$$

令 $\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{e}^{\int_0^t \mathbf{A}_e(\xi) d\xi} \int_0^t \mathbf{e}^{\int_0^\xi -\mathbf{A}_e(\zeta) d\zeta} \mathbf{A}_x\tilde{\mathbf{x}}(\xi) d\xi$ ,  $\boldsymbol{\Gamma} = [0 \ 0 \ 0 \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]^T$ , 则

$$\boldsymbol{\varphi}(t) \leq \mathbf{e}^{\int_0^t \mathbf{A}_e(\xi) d\xi} \int_0^t \mathbf{e}^{\int_0^\xi -\mathbf{A}_e(\zeta) d\zeta} d\xi \boldsymbol{\Gamma}. \quad (22)$$

由式(12)和(20)得:  $\mathbf{A}_{e \min} \leq \mathbf{A}_e \leq \mathbf{A}_{e \max}$ , 则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(t) &\leq \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}_{e \max}t - \mathbf{A}_{e \min}\xi} d\xi \boldsymbol{\Gamma} \leq \\ & \mathbf{A}_{e \min}^{-1} \mathbf{e}^{(\mathbf{A}_{e \max} - \mathbf{A}_{e \min})t} \boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{A}_{e \min}^{-1} \mathbf{e}^{\mathbf{A}_{e \max}t} \boldsymbol{\Gamma}. \end{aligned} \quad (23)$$

因为 $\mathbf{A}_e$ 是赫尔维兹的,因此存在一个有限的时间 $T_2$ 和 $T_3$ ,对于所有 $t \geq T_2, i = 1, 2, \dots, 6$ ,

$$|[\mathbf{e}^{(\mathbf{A}_{e \max} - \mathbf{A}_{e \min})t} \boldsymbol{\Gamma}]_i| \leq \frac{\lambda_{\max}}{\omega_c^9}, \quad (24)$$

其中  $\lambda_{\max} = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ . 对于所有  $t \geq T_3$ ,

$$|[\mathbf{e}^{\mathbf{A}_e \max t} \boldsymbol{\Gamma}]_i| \leq \frac{\lambda_{\max}}{\omega_c^9}. \quad (25)$$

令  $T = \max\{T_1, T_2, T_3\}$ , 则对于  $t \geq T$ ,

$$|[\boldsymbol{\varphi}(t)]_i| \leq \begin{cases} (\frac{4}{\omega_c} + \frac{2}{\omega_c^2}) \frac{\lambda_{\max}}{\omega_c^9} & |i=1,2,3, \\ \frac{2\lambda_{\max}}{\omega_c^9} & |i=4,5,6. \end{cases} \quad (26)$$

令  $e_{\max}(0) = |e_1(0)| + |e_2(0)| + \dots + |e_6(0)|$ , 则

$$|[\mathbf{e}^{\int_0^t \mathbf{A}_e(\xi) d\xi} \mathbf{e}(0)]_i| \leq |[\mathbf{e}^{\mathbf{A}_e \max t} \mathbf{e}(0)]_i| \leq \frac{e_{\max}(0)}{\omega_c^9}.$$

因此, 对于所有  $t \geq T, i = 1, 2, \dots, 6$ ,

$$|e_i(t)| \leq \begin{cases} \frac{e_{\max}(0)}{\omega_c^9} + (\frac{4}{\omega_c} + \frac{2}{\omega_c^2}) \frac{\lambda_{\max}}{\omega_c^9} & |i=1,2,3 \\ \frac{e_{\max}(0)}{\omega_c^9} + \frac{2\lambda_{\max}}{\omega_c^9} & |i=4,5,6 \end{cases} \leq \rho_i, \quad (27)$$

其中

$$\rho_i = \max\left\{ \frac{e_{\max}(0)}{\omega_c^9} + (\frac{4}{\omega_c} + \frac{2}{\omega_c^2}) \frac{\lambda_{\max}}{\omega_c^9}, \frac{e_{\max}(0)}{\omega_c^9} + \frac{2\lambda_{\max}}{\omega_c^9} \right\}.$$

由式(27)可知, 本文提出的控制器是有界输入有界输出稳定的, 并且控制器和观测器的带宽越大, 追踪误差越小, 控制器控制效果越好, 但由于采样时间的限制, 带宽过大会导致系统不稳定, 需要根据实际系统进行调整. 通常观测器带宽取控制器带宽的3-5倍<sup>[16]</sup>.

### 4 仿真(Simulation)

下面将通过仿真实验验证本文提出的含有摩擦补偿的自抗扰控制器的有效性. 仿真实验采用两种控制器与本文提出的控制器进行对比, 一种是文献[12]所采用的传统线性自抗扰控制器(linear active disturbance controller, LADRC), 另一种是文献[8]所采用的含有摩擦补偿的模型预测控制器(model predictive control, MPC). 仿真的采样时间  $\Delta t$  设置为 0.01 s. 仿真采用的模型参数如表2, LADRC和ADRCF采用的控制器参数设定值如表3, MPC采用的控制器参数与文献[8]采用的参数一致.

1) 实验1: 低速直线往返轨迹追踪控制.

选取参考轨迹如下:

$$\begin{cases} x_d = -0.05t + 0.00125t^2 \text{ m}, \\ y_d = 0 \text{ m}, \\ \theta_d = 0 \text{ rad}. \end{cases} \quad (28)$$

$x$ 方向轨迹追踪仿真结果如图3所示. 当  $t = 20 \text{ s}$

时, 机器人  $x$  方向参考轨迹达到最小值且机器人速度为0. 此时采用LADRC的机器人轨迹出现了2 s左右的死区, 而采用MPC和ADRCF的机器人轨迹死区较小, 但是ADRCF的控制效果明显优于MPC. 另外, 由于机器人起步时需要克服最大静摩擦力, 因此在机器人起步时, LADRC出现明显的超调过程, 而采用含有摩擦补偿的MPC和ADRCF的机器人起步过程较平稳. 图4展示了机器人轨迹追踪误差曲线. 为量化对比两种控制器的控制效果, 这里采用绝对误差积分(integral absolute error, IAE)和最大绝对误差(maximum error integral, MAE)作为评价标准. 定义如下:

$$IAE_{xy} \text{ m} = \int_0^T (|e_x| + |e_y|) dt,$$

$$IAE_{\theta} \text{ rad} = \int_0^T |e_{\theta}| dt,$$

$$MAE_{xy} \text{ m} = \max\{\max |e_x|, \max |e_y|\},$$

$$MAE_{\theta} \text{ rad} = \max |e_{\theta}|.$$

3种控制器的IAE和MAE计算结果如表4所示. 可以看出, ADRCF的IAE和MAE都远小于MPC和LADRC. 图5为仿真过程控制输入的变化曲线. 图6为由LESO得到的摩擦力的估计值. 综上所述, 当机器人运动速度较低时, ADRCF极大的减小了摩擦带来的影响, 控制效果明显优于MPC和LADRC.

表 2 模型参数设定值

Table 2 Value of parameters in model

模型参数	参数值
$m$	10 kg
$b_0$	$1 \times 10^{-4} \text{ Nms/rad}$
$R_a$	1.53 $\Omega$
$L_0$	0.25 m
$I_0$	$1.5 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$R$	0.04 m
$I_v$	$1.35 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$k_b$	$460 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$
$k_t$	$0.029 \text{ N} \cdot \text{m/A}$
$n$	71
$B_x, B_y$	$0.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}$
$B_{\theta}$	$0.2 \text{ N} \cdot \text{s/rad}$
$C_x, C_y$	5 N
$C_{\theta}$	$1 \text{ N} \cdot \text{m}$

表 3 控制器参数设定值

Table 3 Value of parameters in controller

控制器参数	参数值
$\omega_o, \omega_c$	15, 4
$a, b$	0.02, 0.01

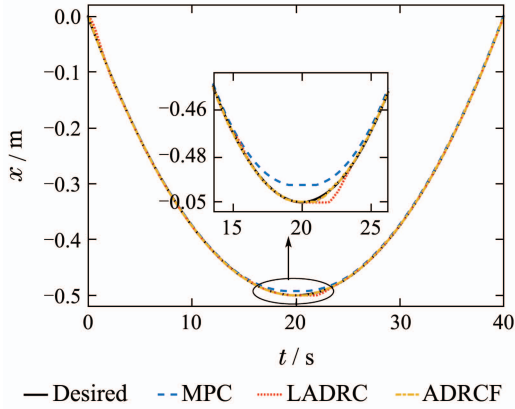


图3 直线轨迹追踪仿真结果

Fig. 3 Simulation results of line trajectory tracking

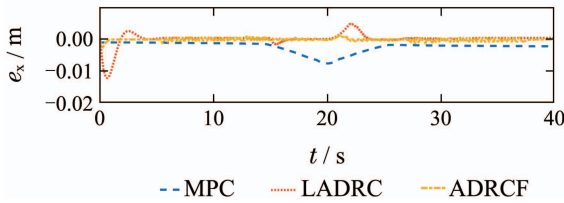


图4 直线轨迹机器人位姿误差e曲线

Fig. 4 Errors of line trajectory tracking

表4 直线轨迹的IAE和MAE

Table 4 IAE and MAE of line trajectory tracking

算法	IAE <sub>x</sub>	MAE <sub>x</sub>
MPC	0.1200	0.0192
LADRC	0.1063	0.0288
ADRCF	0.0123	0.0027

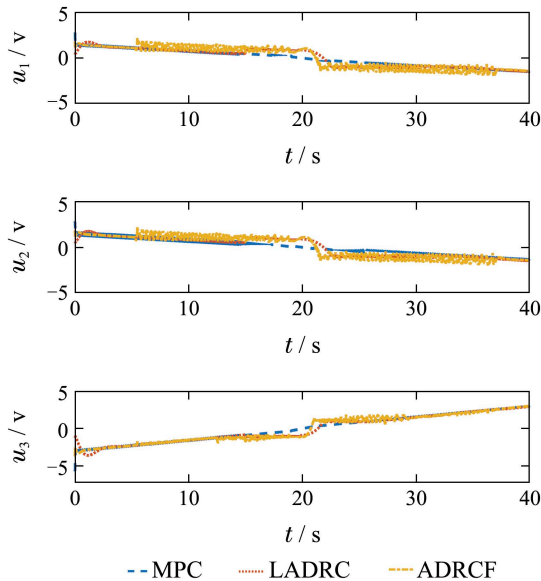


图5 直线轨迹控制输入u曲线

Fig. 5 Control inputs of line trajectory tracking

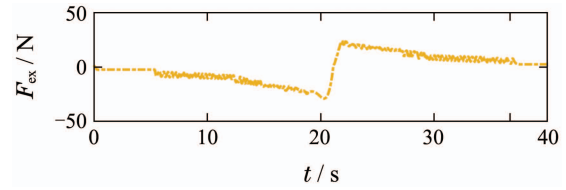


图6 直线轨迹摩擦力估计值F<sub>e</sub>曲线

Fig. 6 Friction estimations of line trajectory tracking

2) 实验2: 双纽线轨迹追踪控制.

期望轨迹选取如下, 模型参数和控制参数值与实验1相同:

$$\begin{cases} x_d = \sin\left(\frac{\pi t}{15}\right) \text{ m}, \\ y_d = \sin\left(\frac{2\pi t}{15}\right) \text{ m}, \\ \theta_d = 0.05t \text{ rad}. \end{cases} \quad (29)$$

由双纽线特性可知, 机器人在接近y方向极值时运动速度较慢, 在接近原点时运动速度较快. 为比较在机器人受到不同摩擦力时3种控制器的控制效果, 在机器人运行15s时, 将摩擦力系数增加为初始的三倍, 即:  $B_x = 1.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ ,  $B_y = 1.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ ,  $B_\theta = 0.6 \text{ N} \cdot \text{s/rad}$ ,  $C_x = 15 \text{ N}$ ,  $C_y = 15 \text{ N}$ ,  $C_\theta = 3 \text{ N} \cdot \text{m}$ . 仿真结果如图7所示.

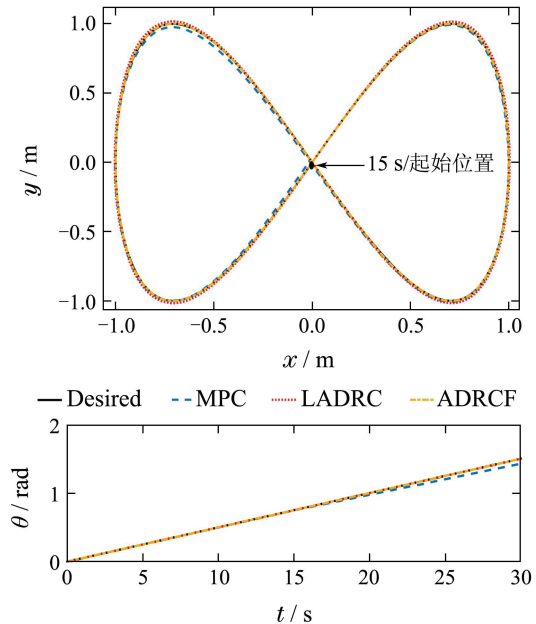


图7 双纽线轨迹追踪仿真结果

Fig. 7 Simulation results of lemniscate trajectory tracking

图8为仿真实验追踪误差曲线, 表4为3种控制器分别在0~15s和15~30s的IAE和MAE. 可以看出, 在0~15s时, 含有摩擦补偿的MPC和ADRCF的x-y轨迹追踪控制效果优于LADRC, 但是由于theta方向轨迹为线性轨迹, 导致该方向摩擦力复杂特性没有明显体现, 对系统影响较小, 因此3种控制器在theta方向的轨迹追踪控制效果相近. 在15~30s摩擦力增加后, MPC的

IAE<sub>xy</sub>增加73%, IAE<sub>θ</sub>增加155%, 控制效果明显下降。

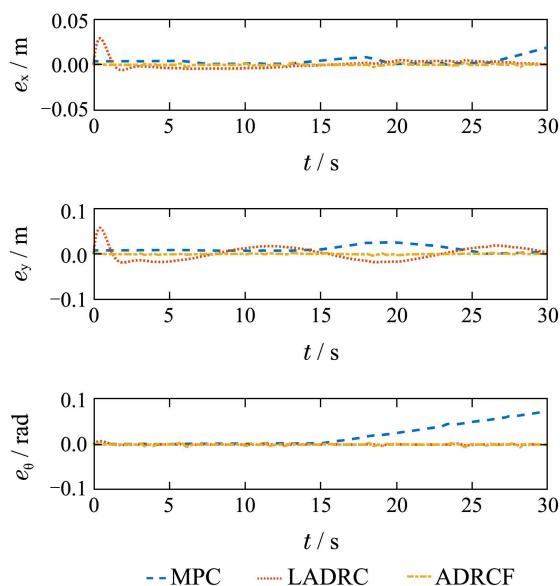


图 8 双纽线轨迹机器人位姿误差 $e$ 曲线  
Fig. 8 Errors of lemniscate trajectory tracking

由于MPC需要根据摩擦力模型计算最优的控制电压, 因此若摩擦力变化导致摩擦力模型不准确, MPC将无法得到准确的最优控制电压值, 控制效果下降。由式(29)可知, 18.9 s和26.1 s时, 机器人运行速度达到最小, 此时摩擦力对机器人轨迹追踪控制影响较大, ADRCF的控制效果较好, 较好的克服了机器人低速运动时摩擦力对系统的影响。因此, ADRCF对摩擦力的变化具有较强的鲁棒性。图9和图10分别展示了双纽线轨迹追踪控制输入曲线和摩擦力估计值曲线。

表 5 双纽线轨迹的IAE和MAE计算结果

Table 5 IAE and MAE of lemniscate trajectory tracking

算法	0 ~ 15 s			
	IAE <sub>xy</sub>	IAE <sub>θ</sub>	MAE <sub>xy</sub>	MAE <sub>θ</sub>
MPC	0.1604	0.0260	0.0101	0.0029
LADRC	0.2743	0.0094	0.0569	0.0072
ADRCF	0.0130	0.0114	0.0025	0.0047
算法	15 ~ 30 s			
	IAE <sub>xy</sub>	IAE <sub>θ</sub>	MAE <sub>xy</sub>	MAE <sub>θ</sub>
MPC	0.2780	0.5639	0.0258	0.0730
LADRC	0.2042	0.0067	0.0186	0.0024
ADRCF	0.0163	0.0105	0.0032	0.0056

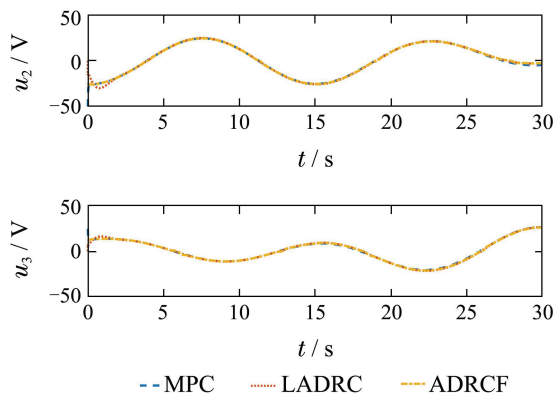
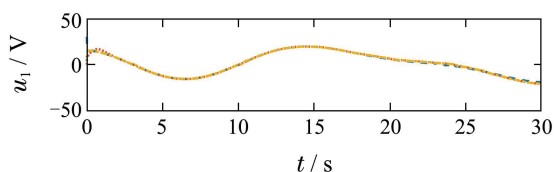


图 9 双纽线轨迹控制输入 $u$ 曲线

Fig. 9 Control inputs of lemniscate trajectory tracking

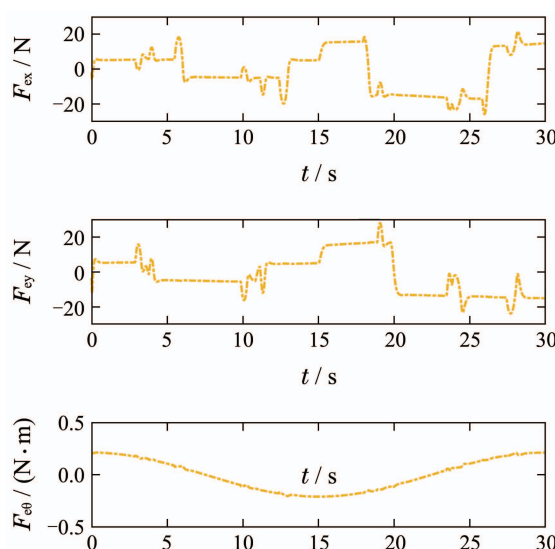


图 10 双纽线轨迹摩擦力估计值 $F_e$ 曲线

Fig. 10 Friction estimations of lemniscate trajectory tracking

LADRC将摩擦力作为总扰动的一部分, 通过对总扰动进行估计并补偿。MPC利用摩擦力模型计算得到的摩擦力估计值进行摩擦补偿。ADRCF利用已知的部分模型信息通过ESO对摩擦力进行估计进而进行补偿。通过直线与双纽线两种不同轨迹的全方位移动机器人轨迹追踪仿真实验可以看出, 虽然LADRC的鲁棒性较强, 但是LADRC的控制效果不及其他控制器。MPC在摩擦力模型比较准确时控制效果较好, 但是在机器人受到不同摩擦力时, 控制器效果明显变差, 鲁棒性较差。相比之下, 本文提出的控制器在机器人受到不同摩擦力时保持了较高的控制精度, 具有较强的鲁棒性。

### 5 结论(Conclusions)

针对全方位移动机器人轨迹追踪控制中的摩擦补偿问题, 本文基于自抗扰控制提出了含有摩擦补偿的非线性控制器。由于摩擦力模型复杂, 难以通过模型获得摩擦力估计值, 本文在线性扩张状态观测器中加

入模型已知项对摩擦力进行实时估计,并在控制器中进行摩擦补偿,极大的提高了控制器的鲁棒性.同时,本文提出的非线性控制器的增益根据机器人运动速度变小而变大,极大的减小了摩擦力在机器人低速运动时的影响,提高了控制器的控制精度.然后利用机器人系统中扰动有界的条件,证明了系统是有界输入有界输出稳定的.最后通过仿真结果验证了该控制器的有效性并且对摩擦力的变化具有较强的鲁棒性.

进一步工作:搭建全方位移动实验平台,将本文设计的控制器进行全方位移动机器人实际实验,对其实用性进行考查.同时,令机器人在不同的环境中运行以验证控制器对摩擦力变化的鲁棒性.最后根据实验结果对本文进行改进和完善.

### 参考文献(References):

- [1] ZHAO Dongbin, YI Jianqiang, DENG Xuyue. Structure and kinematic analysis of omnidirectional mobile robots [J]. *Robot*, 2003, 25(5): 394 – 398.  
(赵冬斌, 易建强, 邓旭玥. 全方位移动机器人结构和运动分析 [J]. 机器人, 2003, 25(5): 394 – 398.)
- [2] ROBERT L W, BRIAN E C, PAOLO G G, et al. Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots [J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2002, 18(2): 285 – 293.
- [3] REN C, MA S G. Dynamic modeling and analysis of an omnidirectional mobile robot [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Tokyo: IEEE, 2013, 11: 4861 – 4865.
- [4] GIOVANNI I. Swedish wheeled omnidirectional mobile robots: kinematics analysis and control [J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2009, 25(1): 164 – 171.
- [5] JAE H C, BYUNG J Y, WHEE K K, et al. The dynamic modeling and analysis for an omnidirectional mobile robot with three caster wheels [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics & Automation*. Taipei: IEEE, 2003, 9: 521 – 527.
- [6] ANDRÚ S C, ANTONIO P M, PAULO J C. Practical approach of modeling and parameters estimation for omnidirectional mobile robots [J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2009, 14(3): 377 – 381.
- [7] ANDRE G S C, MARIANE D C, LUCIANA M. Modeling and friction estimation for wheeled omnidirectional mobile robots [J]. *Robotica*, 2016, 34(9): 2140 – 2150.
- [8] JÚLIO C L, ANDRÉ G S, CARLOS E T, et al. Design and implementation of model predictive control with friction compensation on an omnidirectional mobile robot [J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2014, 19(2): 467 – 476.
- [9] YUE Liyong, XIE Wei. Adaptive tracking control of non-holonomic wheeled mobile robot including actuator dynamics [J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(6): 1001 – 1006.  
(岳李勇, 谢巍. 含有驱动器模型的移动机器人自适应跟踪控制 [J]. 控制理论与应用, 2008, 25(6): 1001 – 1006.)
- [10] HAN J Q. From PID to active disturbance rejection control [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, 56(3): 900 – 906.
- [11] KANG H S, KIM Y T, HYUN C H, et al. Generalized extended state observer approach to robust tracking control for wheeled mobile robot with skidding and slipping [J]. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2013, 10(2): 463 – 474.
- [12] REN C, MA S G. Analysis and control of an omnidirectional mobile robot [C] // *Proceedings of International Symposium on Robotics*. Seoul, South Korea: IEEE, 2003, 10: 1 – 6.
- [13] ZHANG Rong, HAN Jingqing. Parameter identification by model compensation auto disturbance rejection controller [J]. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(1): 79 – 81.  
(张荣, 韩京清. 用模型补偿自抗扰控制器进行参数辨识 [J]. 控制理论与应用, 2000, 17(1): 79 – 81.)
- [14] ZHOU J J, CHEN J, FU D D, et al. Multi-row type omnidirectional wheel: China, CN102700358A [P]. 2012-10-03.
- [15] REN C, MA S. Dynamic modeling and analysis of an omnidirectional mobile robot [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Tokyo, Japan: IEEE, 2013, 11: 4860 – 4865.
- [16] GAO Z Q. Scaling and bandwidth-parameterization based controller tuning [C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Denver, USA: IEEE, 2003, 6: 4989 – 4996.
- [17] ZHENG Q, LINDA Q G, GAO Z Q. On stability analysis of active disturbance rejection control for nonlinear time-varying plants with unknown dynamics [C] // *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, USA: IEEE, 2007, 12: 3502 – 3506.

### 作者简介:

王圣翔 (1992-), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为机器人控制、自抗扰控制, E-mail: wangsxgo@126.com;

任超 (1986-), 男, 讲师, 目前研究方向为机器人控制、自抗扰控制, E-mail: renchao@tju.edu.cn;

马书根 (1964-), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为仿生机器人设计与控制, E-mail: shugenma@tju.edu.cn.