

## 永磁球形电机的少保守性滑模控制

李洪凤<sup>†</sup>, 柳文俊

(天津大学 电气自动化与信息工程学院, 天津 300072)

**摘要:** 永磁球形电机轨迹跟踪控制方法常常利用高增益的控制输出来保证系统的鲁棒性及跟踪控制的快速性. 但这种保守控制会带来较大的控制作用, 甚至导致执行器饱和. 为了减少控制的保守性, 本文设计了一种带有非线性干扰观测器的模糊滑模控制器来解决球形电机的轨迹跟踪问题. 利用干扰观测器对不确定性、摩擦、外界干扰、负载扰动等进行估计, 并在控制输入端进行补偿实现对干扰的抑制. 并利用滑模控制器抵消干扰观测器的干扰观测误差及不可观测部分的干扰, 为了减少滑模的抖振, 本文利用模糊逻辑对该部分进行逼近, 并利用模糊的输出增益代替滑模的切换增益. 此外通过Lyapunov方程证明了本文控制器的稳定性. 仿真结果表明在存在模型不确定性及各种干扰的情况下, 本文的轨迹跟踪控制具有良好的动静态性能和少保守性.

**关键词:** 非线性干扰观测器; 永磁球形电机; 模糊滑模控制; 轨迹跟踪

**引用格式:** 李洪凤, 柳文俊. 永磁球形电机的少保守性滑模控制. 控制理论与应用, 2018, 35(2): 137 – 145

**中图分类号:** TP351      **文献标识码:** A

## Less conservative sliding mode control of permanent magnet spherical motor

LI Hong-feng<sup>†</sup>, LIU Wen-jun

(School of Electrical Automation and Information Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

**Abstract:** The high gains output is often adopted in the existing permanent magnet spherical motor (PMSM) trajectory tracking control method to ensure the robustness of the system and the fastness of tracking control. However, this conservative control will bring greater control, and even lead to actuator saturation. In order to reduce the conservativeness of control, this paper designs a fuzzy sliding mode controller with nonlinear disturbance observer to solve the trajectory tracking problem of PMSM. The nonlinear observer is used to estimate the uncertainty, friction, external disturbance and load disturbance, and compensate it at the control input so as to achieve the suppression of interference. The sliding mode controller is used to cancel the interference observation error of the disturbance observer and unobservable part disturbance. In order to reduce the undesirable chattering phenomenon, the fuzzy logic is used to approximate this part. And the sliding mode switching gain is replaced by the fuzzy output gain. In addition, the stability of the controller is proved by the Lyapunov equation. The simulation results show that the proposed algorithm can realize PMSM trajectory tracking control in the presence of model uncertainty and various disturbances, and has good dynamic and static performance and less conservativeness.

**Key words:** nonlinear disturbance observer; permanent magnet spherical motor; fuzzy sliding control; trajectory tracking

**Citation:** LI Hongfeng, LIU Wenjun. Less conservative sliding mode control of permanent magnet spherical motor. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(2): 137 – 145

### 1 引言(Introduction)

球形电机结构紧凑、体积小、响应速度快、在一个节点处可以提供多达3个自由度的运动, 这样灵巧的性能使得其在现代的航空航天、军事、智能机器人等领域具有广泛的应用前景<sup>[1-2]</sup>.

永磁球形电动机的动态模型是多变量、非线性、

强耦合的, 此外不确定性、摩擦、外界干扰、负载扰动等都会影响其控制性能和精度. 文献[3-4]将经典的PD控制应用到球形电机中, 控制方法设计简单、易于实现, 但对不确定性和外部干扰进行补偿需要较大的控制力矩, 具有一定的保守性. 文献[5]采用计算转矩法对球形电机进行控制, 在一定程度上实现了解耦控

收稿日期: 2017-05-19; 录用日期: 2017-11-08.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: lihongfeng@tju.edu.cn; Tel.: +86 22-27403740.

本文责任编辑: 武玉强.

国家自然科学基金项目(51677130)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (51677130).

制,但该方法是一种基于模型的方法,在存在不确定性、摩擦及外界扰动的情况下控制精度会受到影响.文献[6-7]利用神经网络具有学习能力及自适应性的特点,将其应用到球形电机的轨迹跟踪控制中,有效地对动力学模型的不确定性和外界扰动进行补偿,提高了球形电机的控制精度,但该算法计算量比较大,且容易陷入局部最优解,限制了其在实际系统中的应用.文献[8-13]分别将鲁棒控制和滑模变结构控制应用到球形电机的轨迹跟踪控制中.鲁棒控制通常是用一个结构和参数都固定不变的控制器的,来保证即使不确定性和外界干扰对系统的性能品质影响最恶劣的时候也能满足设计要求.这种以最差情况为基础的保守控制使得控制器在整个工作范围内都保证良好的性能指标是不现实的.滑模控制系统算法简单,响应速度快,对外界干扰和参数摄动具有很强的鲁棒性,是处理非线性系统的理想控制方法<sup>[14-15]</sup>.球形电机在运行过程中摩擦转矩、负载转矩以及外界干扰不易被精确建模,这些未知的干扰会恶化球形电机的控制性能及稳定性.滑模控制算法的实施需要知道干扰的上界,通常是选取整个运行过程中干扰的上确界作为干扰的上界,这样保守的控制会导致滑模跟踪性能变差,抖振现象加重<sup>[16]</sup>.为了处理这样的问题,观测器作为一种有力的工具吸引了研究者的关注<sup>[17-18]</sup>.基于干扰观测器的控制是由日本学者Nakao, Onish等于1987年提出,其基本思想是在频域内利用干扰观测器估计干扰,并在前馈通道中进行补偿<sup>[19]</sup>.Chen等首次提出了基于时域的干扰观测器方法<sup>[20]</sup>,开辟了控制领域的新思路,具有里程碑的意义.并给出了时域和频域扰动观测器设计方法之间关系的一般分析<sup>[21]</sup>,针对现有的干扰/不确定性估计及其抑制技术进行了全面系统的总结<sup>[22]</sup>.通过观测器对干扰进行观测并直接在控制输入端补偿,可减少滑模控制器的切换增益,避免了滑模的保守控制,并在一定程度上减少了滑模的抖振<sup>[23-24]</sup>.

本文设计了一个基于非线性干扰观测器的模糊滑模控制器,使得永磁球形电机的轨迹跟踪控制在获得良好动态性能的情况下具有少保守性.

## 2 永磁球形电动机的动力学模型(Dynamic model of PMSM)

永磁球形电动机的结构如图1所示,由球形转子和半球形定子组成,其中转子的赤道对称分布了一圈N,S极交替的永磁体,在定子壳上分3层放置集中线圈,每层放置18个线圈.转子输出轴上装有法兰,以传递电机产生的电磁力和电磁转矩.

永磁球形电动机的通电线圈和转子永磁体之间相互作用产生电磁转矩.按照一定的通电策略对定子线圈进行通电,可以实现其自转、偏航和俯仰3个自由度的运动.其中,赤道层线圈主要负责自转运行,南北纬

侧线圈主要负责偏航和俯仰运动.

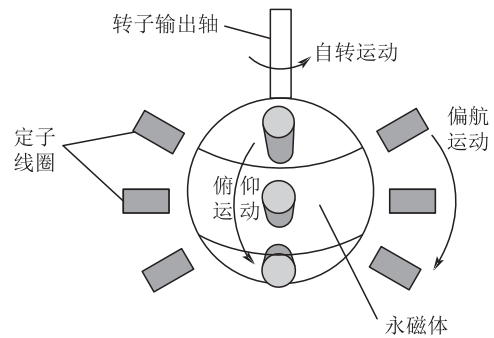


图1 永磁球形电机的结构

Fig. 1 The structure of a PMSM

设永磁球形电动机的定子坐标系 $xyz$ 和转子坐标系 $dqp$ ,坐标系 $xyz$ 固定在定子上,坐标系 $dqp$ 固定在转子上,两个坐标系之间的相对位置及永磁球形电动机的三自由度运动可以用广义欧拉角 $\alpha, \beta, \gamma$ 定义,坐标系 $dqp$ 可以由坐标系 $xyz$ 经过三次绕轴旋转变换得到<sup>[7]</sup>.

根据拉格朗日方法得到永磁球形电动机的动态模型如下:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + \Delta M(\theta)\ddot{\theta} + \Delta C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + \tau_{fdl} = \tau, \quad (1)$$

式中:  $\theta = [\alpha \ \beta \ \gamma]^T$  表示广义位移,  $M(\theta)$  为惯性矩阵,  $C(\theta, \dot{\theta})$  为离心力与哥氏力矩阵,  $\Delta M(\theta)$ ,  $\Delta C(\theta, \dot{\theta})$  是球形电机的模型不确定项,  $\tau_{fdl}$  是转子在 $\alpha, \beta, \gamma$ 三个轴向的摩擦力矩、负载转矩及外界扰动之和矩阵,  $\tau$  是转子在3个轴向的控制转矩矩阵.  $M(\theta)$ ,  $C(\theta, \dot{\theta})$  表达式如下:

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} J_{dq} \cos^2 \beta + J_p \sin^2 \beta & 0 & J_p \sin \beta \\ 0 & J_{dq} & 0 \\ J_p \sin \beta & 0 & J_p \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

式(3)中的各个子变量分别为

$$c_{11} = (J_p - J_{dq})\dot{\beta} \cos \beta \sin \beta,$$

$$c_{12} = (J_p - J_{dq})\dot{\alpha} \cos \beta \sin \beta,$$

$$c_{13} = J_p \dot{\beta} \cos \beta,$$

$$c_{21} = (J_{dq} - J_p)\dot{\alpha} \cos \beta \sin \beta,$$

$$c_{22} = c_{31} = c_{33} = 0,$$

$$c_{23} = -c_{32} = -J_p \dot{\alpha} \cos \beta,$$

其中 $J_d$ ,  $J_q$ 和 $J_p$ 分别为永磁球形电动机转子在 $dqp$ 坐标系3个轴向上的主转动惯量.由永磁球形电动机结构,其转子沿输出轴方向呈轴对称,于是 $J_d = J_q \neq$

$J_p$ , 设  $J_d = J_q = J_{dq}$ .

球形电机总的干扰定义如下:

$$d = \Delta M(\theta)\ddot{\theta} + \Delta C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + \tau_{fdl}. \quad (4)$$

将方程(4)代入方程(1)得

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + d = \tau. \quad (5)$$

### 3 非线性干扰观测器的设计((Design of nonlinear disturbance observer))

球形电机在运行过程中摩擦转矩、负载转矩以及外界干扰不易被精确建模, 这些未知的干扰以及模型的不确定性会恶化球形电机的控制性能及稳定性. 为了对这些未知的干扰及模型不确定性进行估计, 本文设计了一个基于递推算法的非线性观测器. 将位置误差  $e$  选为状态量, 如方程(6), 方程(7)–(8)分别是其一阶导、二阶导:

$$e = \theta_d - \theta, \quad (6)$$

$$\dot{e} = \dot{\theta}_d - \dot{\theta}, \quad (7)$$

$$\ddot{e} = \ddot{\theta}_d - \ddot{\theta}, \quad (8)$$

$$\dot{\tilde{e}} = \dot{e} - \dot{\hat{e}}, \quad (9)$$

$$d = \tilde{d} + \hat{d}, \quad (10)$$

式中:  $\theta_d = [\alpha_d \ \beta_d \ \gamma_d]^T$  是期望欧拉角轨迹,  $\hat{e}$  是对  $e$  的估计,  $\tilde{e}$  是  $\hat{e}$  和  $e$  之间的误差,  $\tilde{d}$  是对  $d$  的估计,  $\hat{d}$  是  $d$  和  $\tilde{d}$  之间的误差.

将方程(8)代入方程(5)得

$$\ddot{e} = -M^{-1}\tau + M^{-1}C\dot{\theta} + M^{-1}d + \ddot{\theta}_d. \quad (11)$$

基于递推算法的非线性干扰观测器设计如下:

$$\begin{cases} \dot{\hat{d}} = K_1 \tilde{e}, \\ \ddot{\hat{e}}_i = -M^{-1}\tau + M^{-1}C\dot{\theta} + M^{-1}\hat{d} + \ddot{\theta}_d + K_2 \dot{\tilde{e}}_{i-1}, \end{cases} \quad (12)$$

其中方程(12)中的  $K_1 = \text{diag}\{k_{11}, k_{12}, k_{13}\}$ ,  $K_2 = \text{diag}\{k_{21}, k_{22}, k_{23}\}$  是正定对角阵,  $\dot{\tilde{e}}_{i-1}$  是上一采样周期误差估计的误差的一阶导, 方程(9)中的  $\dot{\hat{e}}$  可以通过对  $\hat{e}$  进行积分获得, 进而得到  $\dot{\tilde{e}}_i$ , 从而得到  $\hat{d}$ , 对其积分可以获得  $\tilde{d}$ .

选取Lyapunov方程如下:

$$V_1(t) = \frac{1}{2} \tilde{d}^T K_1^{-1} M^{-1} \tilde{d} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{e}}^T \dot{\tilde{e}}. \quad (13)$$

对方程(13)进行求导, 并假设干扰是慢时变信号 ( $\dot{\tilde{d}} = 0$ ) 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= \dot{\tilde{d}}^T K_1^{-1} M^{-1} \tilde{d} + \dot{\tilde{e}}^T \dot{\tilde{e}} = \\ &(\dot{\tilde{d}} - \dot{\tilde{e}}^T K_1^{-1} M^{-1} \tilde{d} + \dot{\tilde{e}}^T - \dot{\tilde{e}}). \end{aligned} \quad (14)$$

将方程(11)–(12)代入上式得

$$\dot{V}_1(t) = -\dot{\tilde{e}}^T \tilde{d} + \dot{\tilde{e}}^T (M^{-1} \tilde{d} - K_2 \dot{\tilde{e}}_{i-1}) =$$

$$\dot{\tilde{e}}^T (-K_2 \dot{\tilde{e}}_{i-1}). \quad (15)$$

由于采样周期很短, 可以认为在采样周期内  $\dot{\tilde{e}}$  保持不变, 因而方程(15)变为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= \dot{\tilde{e}}^T (-K_2 \dot{\tilde{e}}) = \\ &(-k_{21} \dot{\tilde{e}}_{\alpha i}^2 - k_{22} \dot{\tilde{e}}_{\beta i}^2 - k_{23} \dot{\tilde{e}}_{\gamma i}^2) \leq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

其中  $\dot{\tilde{e}}_i = [\dot{\tilde{e}}_{\alpha i} \ \dot{\tilde{e}}_{\beta i} \ \dot{\tilde{e}}_{\gamma i}]^T$ .

因而该非线性干扰观测器是稳定的, 观测器的观测误差可以渐进收敛到零, 即可用观测值  $\hat{d}$  逼近干扰  $d$ .

### 4 滑模控制器的设计 (Design of sliding mode controller)

前文所述, 通过非线性干扰观测器对干扰进行估计, 并在控制输入端补偿, 为了消除干扰观测器的观测误差及未观测部分干扰对球形电机控制性能的影响, 本文设计了一个滑模控制器.

将方程(5)变形得

$$\ddot{\theta} = -M^{-1}(\theta)C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} - M^{-1}(\theta)d + M^{-1}(\theta)\tau(t). \quad (17)$$

令  $f(\theta, t) = -M^{-1}C\dot{\theta} - M^{-1}d$ ,  $g(\theta, t) = M^{-1}$ , 方程(17)重写为

$$\ddot{\theta} = f(\theta, t) + g(\theta, t)\tau(t). \quad (18)$$

轨迹跟踪的目的是使输出  $\theta$  跟踪给定的输入信号  $\theta_d$ , 令  $\theta(t) = \theta_1(t)$ ,  $\dot{\theta}(t) = \theta_2(t)$  将方程(18)及跟踪误差写成状态空间形式:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1(t) = \theta_2(t), \\ \dot{\theta}_2(t) = f(\theta, t) + g(\theta, t)\tau(t), \\ e_1(t) = \theta_{1d}(t) - \theta_1(t) = [e_{1\alpha} \ e_{1\beta} \ e_{1\gamma}]^T, \\ e_2(t) = \theta_{2d}(t) - \theta_2(t) = [e_{2\alpha} \ e_{2\beta} \ e_{2\gamma}]^T = \dot{e}_1(t). \end{cases} \quad (19)$$

定义滑模面为

$$s(t) = C e_1 + e_2 = \begin{bmatrix} s_\alpha(t) \\ s_\beta(t) \\ s_\gamma(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\alpha e_{1\alpha} + e_{2\alpha} \\ c_\beta e_{1\beta} + e_{2\beta} \\ c_\gamma e_{1\gamma} + e_{2\gamma} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

式中  $C$  是一正定对角矩阵,  $C = \text{diag}\{c_\alpha \ c_\beta \ c_\gamma\}$ .

控制的目的是实现轨迹跟踪, 即  $e_1(t) = 0$ , 此外当系统的状态进入滑模面时有  $\dot{e}_1(t) = 0$ , 因而控制器设计如下:

$$\begin{cases} \tau(t) = g^{-1}(\theta, t)(\dot{\theta}_{2d}(t) - \hat{f}(\theta, t) + u(t)), \\ \hat{f}(\theta, t) = -M^{-1}(\theta)C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} - M^{-1}(\theta)\hat{d}, \end{cases} \quad (21)$$

式中:  $u(t) = [u_\alpha(t) \ u_\beta(t) \ u_\gamma(t)]^T$  是滑模的输入, 用来处理观测器的观测误差及不可观测的干扰;  $\dot{\theta}_{2d}(t)$  表示期望  $\theta_{2d}(t)$  的导数. 为了简便, 下面以  $f$ ,  $g$ ,  $\hat{f}$  分别

代表  $f(\theta, t), g(\theta, t), \hat{f}(\theta, t)$ . 将方程(21)代入方程(19)得

$$\dot{\theta}_2(t) = f + g[g^{-1}\{\dot{\theta}_{2d}(t) - \hat{f} + u(t)\}]. \quad (22)$$

对方程(22)进行整理得

$$\dot{e}_2(t) = \hat{f} - f - u(t). \quad (23)$$

令  $F(\theta, t) = \hat{f} - f$ , 可以看出  $F(\theta, t)$  包含了所有的干扰, 则方程(23)变为

$$\dot{e}_2(t) = F(\theta, t) - u(t) = \begin{bmatrix} F_\alpha(\theta, t) - u_\alpha(t) \\ F_\beta(\theta, t) - u_\beta(t) \\ F_\gamma(\theta, t) - u_\gamma(t) \end{bmatrix}, \quad (24)$$

式中  $F(\theta, t) = [F_\alpha(\theta, t) \ F_\beta(\theta, t) \ F_\gamma(\theta, t)]^T$ . 针对带有不确定性和外加干扰的系统, 一般采用的控制率为等效控制加切换控制, 即

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_{ss}(t), \quad (25)$$

$u_{eq}(t) = [u_{\alpha eq}(t) \ u_{\beta eq}(t) \ u_{\gamma eq}(t)]^T$  为等效控制,  $u_{ss}(t) = [u_{\alpha ss}(t) \ u_{\beta ss}(t) \ u_{\gamma ss}(t)]^T$  为切换控制, 当系统进入滑模态时, 有

$$s(t) = \dot{s}(t) = 0. \quad (26)$$

将方程(19)(24)-(25)代入方程(26)可得

$$C\dot{e}_1(t) + F(\theta, t) - u_{eq}(t) - u_{ss}(t) = 0, \quad (27)$$

其中等效控制  $u_{eq}(t)$  的目的是使得系统在滑模面上, 切换控制  $u_{ss}(t)$  实现对干扰的抑制控制, 因而将等效控制率设计为

$$u_{eq}(t) = [c_\alpha \dot{e}_{1\alpha}(t) \ c_\beta \dot{e}_{1\beta}(t) \ c_\gamma \dot{e}_{1\gamma}(t)]^T. \quad (28)$$

取Lyapunov方程为

$$V_2(t) = \frac{1}{2}(s(t))^T s(t), \quad (29)$$

则

$$\dot{V}_2(t) = (s(t))^T \dot{s}(t). \quad (30)$$

将方程(19)-(20)(25)(28)代入方程(30)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) = & [F_\alpha(\theta, t) - u_{\alpha ss}(t)] s_\alpha(t) + \\ & [F_\beta(\theta, t) - u_{\beta ss}(t)] s_\beta(t) + \\ & [F_\gamma(\theta, t) - u_{\gamma ss}(t)] s_\gamma(t). \end{aligned} \quad (31)$$

为了满足  $\dot{V}_2(t) < 0$ ,  $u_{ss}(t)$  应设计为

$$\begin{cases} u_{\alpha ss}(t) = \eta_\alpha \text{ if } s_\alpha(t) > 0, \\ u_{\alpha ss}(t) = -\eta_\alpha \text{ if } s_\alpha(t) < 0, \\ u_{\beta ss}(t) = \eta_\beta \text{ if } s_\beta(t) > 0, \\ u_{\beta ss}(t) = -\eta_\beta \text{ if } s_\beta(t) < 0, \\ u_{\gamma ss}(t) = \eta_\gamma \text{ if } s_\gamma(t) > 0, \\ u_{\gamma ss}(t) = -\eta_\gamma \text{ if } s_\gamma(t) < 0, \end{cases} \quad (32)$$

其中:  $\eta_\alpha, \eta_\beta, \eta_\gamma$  均是正的常数, 且  $\eta_\alpha \geq F_\alpha(\theta, t)$ ,  $\eta_\beta \geq F_\beta(\theta, t)$ ,  $\eta_\gamma \geq F_\gamma(\theta, t)$ , 因而滑模控制输入为

$$u(t) = \begin{bmatrix} c_\alpha \dot{e}_\alpha(t) + \eta_\alpha \text{sgn}(s_\alpha(t)) \\ c_\beta \dot{e}_\beta(t) + \eta_\beta \text{sgn}(s_\beta(t)) \\ c_\gamma \dot{e}_\gamma(t) + \eta_\gamma \text{sgn}(s_\gamma(t)) \end{bmatrix}, \quad (33)$$

式中  $\text{sgn}(\cdot)$  代表符号函数.

## 5 模糊控制器的设计(Design of fuzzy controller)

抖振现象是滑模控制固有的缺点, 由方程(33)可以看出, 常系数  $\eta$  和符号函数是引起滑模抖振的主要原因. 因而减少滑模的切换增益、柔化控制信号便可实现滑模的消抖. 当采用模糊逻辑对干扰观测器的观测误差及不可观测部分进行逼近后, 根据经验以降低抖振的目的来设计模糊规则, 用模糊控制器的输出增益代替滑模的切换控制增益, 可减少滑模的切换增益, 并可将来不连续的控制信号连续化, 因而模糊控制可有效地降低滑模的抖振<sup>[25]</sup>.

下面采用3个模糊控制器分别代替滑模控制的切换控制部分  $u_{\alpha ss}(t), u_{\beta ss}(t), u_{\gamma ss}(t)$ , 即利用模糊控制器的输出增益  $\eta_\alpha, \eta_\beta, \eta_\gamma$  分别代替  $\eta_\alpha \text{sgn}(s_\alpha(t)), \eta_\beta \text{sgn}(s_\beta(t)), \eta_\gamma \text{sgn}(s_\gamma(t))$ . 由于模糊逻辑可以以任意精度逼近致密集上的任意函数<sup>[26]</sup>, 因而存在  $\omega_\alpha > 0, \omega_\beta > 0, \omega_\gamma > 0$  满足

$$\begin{cases} |\eta_\alpha - F_\alpha(\theta, t)| \leq \omega_\alpha, \\ |\eta_\beta - F_\beta(\theta, t)| \leq \omega_\beta, \\ |\eta_\gamma - F_\gamma(\theta, t)| \leq \omega_\gamma, \end{cases} \quad (34)$$

其中  $\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_\gamma$  分别是3个轴向的模糊逼近误差, 可以是任意小的数.

考虑到模糊逼近误差, 3个轴向的滑模控制器的控制输入分别可以写为

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = c_\alpha \dot{e}_\alpha(t) + \eta_\alpha + \delta_\alpha, \\ u_\beta(t) = c_\beta \dot{e}_\beta(t) + \eta_\beta + \delta_\beta, \\ u_\gamma(t) = c_\gamma \dot{e}_\gamma(t) + \eta_\gamma + \delta_\gamma, \end{cases} \quad (35)$$

其中  $\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma$  分别是正常数.

取Lyapunov方程为

$$V_3(t) = \frac{1}{2}(s(t))^T s(t). \quad (36)$$

对方程(36)进行求导, 整理可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) = & [F_\alpha(\theta, t) - \eta_\alpha - \delta_\alpha] s_\alpha(t) + \\ & [F_\beta(\theta, t) - \eta_\beta - \delta_\beta] s_\beta(t) + \\ & [F_\gamma(\theta, t) - \eta_\gamma - \delta_\gamma] s_\gamma(t). \end{aligned} \quad (37)$$

将式(34)代入方程(37)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) \leq & (\omega_\alpha - \delta_\alpha) s_\alpha(t) + (\omega_\beta - \delta_\beta) s_\beta(t) + \\ & (\omega_\gamma - \delta_\gamma) s_\gamma(t), \end{aligned} \quad (38)$$

因而选择合适的 $\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma$ 可使上式满足 $\eta$ 可达条件, 根据文献[27]可以知道, 如果满足 $\eta$ 可达条件, 就可保证滑动变量有限时间到达滑动面。

下面以 $\alpha$ 轴向的模糊滑模控制为例, 模糊滑模控制将控制目标由跟踪误差转为滑模函数, 施加控制使滑模函数 $s_\alpha(t)$ 为零, 如果 $\|s_\alpha(t)\|$ 太大, 则 $\eta_\alpha$ 的值取一个大值才能保证系统的稳定性, 如果 $\|s_\alpha(t)\|$ 太小, 则 $F_\alpha(\theta, t)s_\alpha(t), \eta_\alpha s_\alpha(t), \delta_\alpha s_\alpha(t)$ 对 $\dot{V}_3(t)$ 的影响是无紧要的, 在这样的情况下,  $\eta_\alpha$ 取一个小值就可以保证系统的稳定性, 此外如果 $\|s_\alpha(t)\|$ 为0, 则 $\eta_\alpha$ 可取0, 可以发现模糊控制增益 $\eta_\alpha$ 是随着滑模面而时刻变化的,  $\eta_\alpha$ 由 $s_\alpha(t)$ 决定。

基于以上分析, 模糊控制器设计如下, 模糊控制器是单输入单输出的, 输入是 $s_\alpha(t)$ , 输出是 $\eta_\alpha$ 。描述输入和输出变量的语言值的模糊子集均为

$$\{\text{NB NM NS ZE PS PM PB}\},$$

其中NB...PB分别表示负大、负中、负小、零、正小、正中、正大。模糊规则为

$$\text{Rule : IF } s_\alpha(t) \text{ is } A, \text{ THEN } \eta_\alpha \text{ is } B,$$

其中 $A$ 和 $B$ 是模糊集, 均代表NB...PB, 均采用高斯隶属度函数, 如下式所示:

$$\mu_M(x_i) = \exp[-(\frac{x_i - \alpha_i}{\sigma})^2], \quad (39)$$

其中:  $M$ 代表模糊集NB...PB,  $x_i$ 代表 $s_\alpha(t)$ 或 $\eta_\alpha$ ,  $\alpha$ 代表函数的中心值,  $\sigma$ 代表函数的宽度。对于模糊集 $A, \alpha_i (i = 1, 2, \dots, 7) = -1, -0.6, -0.2, 0, 0.2, 0.6, 1, = 0.2$ ; 对于模糊集 $B, \alpha_i (i = 1, 2, \dots, 7) = -20, -12, -4, 0, 4, 12, 20, = 0.2$ 。

模糊控制规则设计如表1所示。

表1 模糊控制规则  
Table 1 Fuzzy control rules

$e$	NB	NM	NS	ZO	PS	PM	PB
$\eta_\alpha$	NB	NM	NS	ZO	PS	PM	PB

### 6 仿真与分析((Simulation and analysis)

本文的永磁球形电动机轨迹跟踪框图如图2所示, 包括非线性观测器、滑模控制器、和3个模糊控制器。非线性观测器的观测值作为滑模控制器的输入, 3个模糊控制器的输出增益分别用来代替滑模控制中3个轴向的切换控制增益。其中非线性观测器中状态变量的初始值为零, 观测器的增益为:

$$K_1 = \text{diag}\{1200, 1200, 1200\},$$

$$K_2 = \text{diag}\{200, 200, 200\},$$

滑模控制器中 $C = \text{diag}\{10, 10, 10\}$ , 本文的采样时间为0.001 s。

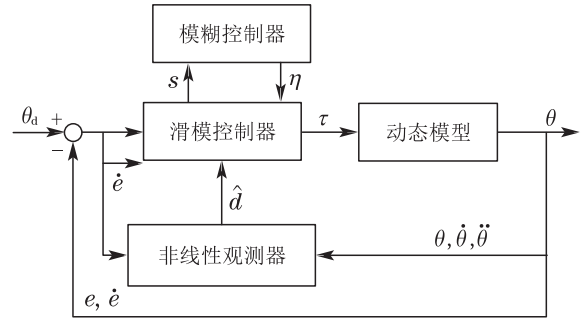


图2 永磁球形电动机的控制框图

Fig. 2 The control diagram of PMSM

由图2分析得, 整个系统的稳定性由3部分组成, 因而Lyapunov方程可以选取为

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t). \quad (40)$$

对方程(40)进行求导可得

$$\dot{V}(t) = \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) + \dot{V}_3(t). \quad (41)$$

由方程(15)(32)(38)可得 $\dot{V}(t) \leq 0$ , 根据李雅普诺夫稳定性理论可以说明整个系统是稳定的。

为了评估非线性干扰观测器对干扰的观测效果, 给定复合干扰如下:

$$d = \tau_f + \tau_d, \quad (42)$$

$\tau_d = 0.2r[\cos(\pi t) \sin(\pi t) \exp(-0.5\pi t)]^T$ 表示外界干扰,  $\tau_f = [1 \ 1 \ 1]^T$ 表示摩擦转矩及负载转矩之和矩阵,  $r$ 是 $(-1, 1)$ 之间的随机数。方程(42)给定的干扰意味着, 干扰有着20%的不确定性, 这个条件是比较苛刻的。图3是 $\alpha, \beta$ 和 $\gamma$ 三个轴向的干扰及其观测值。

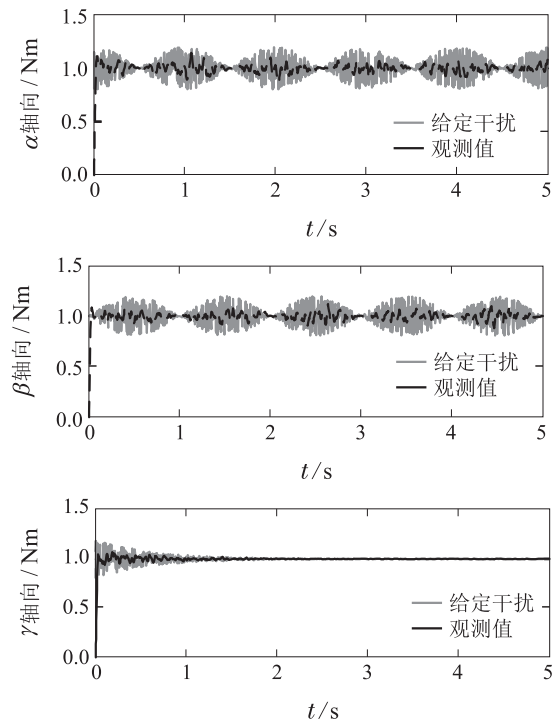


图3 干扰与其观测值比较

Fig. 3 Comparison of disturbance and its observed value

由图3可以看出,在方程(42)所示的苛刻条件下,非线性干扰观测器可以实时地对干扰进行准确的估计.

根据永磁球形电动机的机械建模参数,应用ADAMS软件可以得到球形电机3个轴向的转动惯量为

$$J_p = 2.32 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, J_d = J_q = J_{dq} = 2.27 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

为了验证本文所设计的基于非线性观测器的模糊滑模控制器可以消除不确定性、干扰对球形电机轨迹跟踪控制精度的影响,设计了以下仿真实验.

给定轨迹如下:

$$\theta_d = 0.35[\sin(\pi t) \quad \cos(\pi t) \quad 2t]^T, t \in [0, 5]. \quad (43)$$

在给定如方程(42)所示的干扰的基础上,假定模型分别存在20%的不确定性和50%的不确定性,并分别利用计算转矩法(calculate torque method, CTM)跟本文的方法进行对比仿真. 仿真结果分别如图4-5所示. 可以看出,本文所提出的控制方法对模型的参数变化不灵敏,鲁棒性更好.

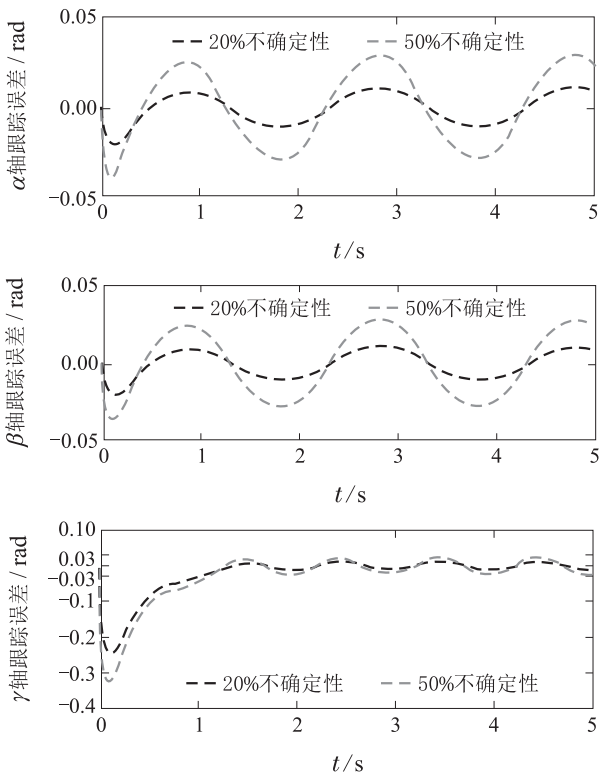


图4 20%和50%不确定性下CTM控制的跟踪误差  
Fig. 4 The tracking error of the CTM control with 20% and 50% uncertainty

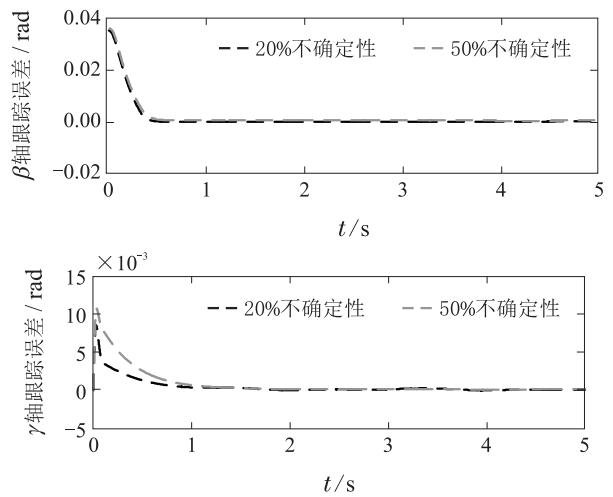
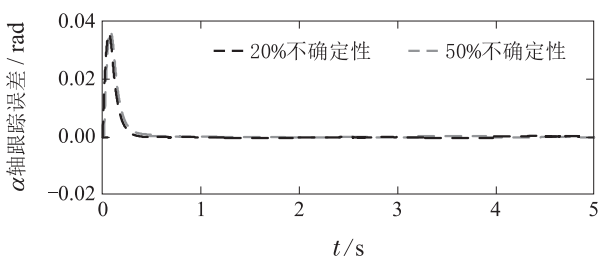


图5 20%和50%不确定性下本文控制方法的跟踪误差  
Fig. 5 The tracking error of the proposed control with 20% and 50% uncertainty

给定干扰如方程(42)所示,期望轨迹如方程(43)所示,并假设模型具有20%的不确定性,图6-8分别表示采用滑模控制器(sliding mode controller, SMC),采用基于干扰观测器的滑模控制器(sliding mode controller based on disturbance observer, SMCO),采用基于模糊逻辑和非线性干扰观测器的滑模控制器(sliding mode controller based on fuzzy logic and nonlinear disturbance observer, FSMCO)进行轨迹跟踪时控制器的输入信号.

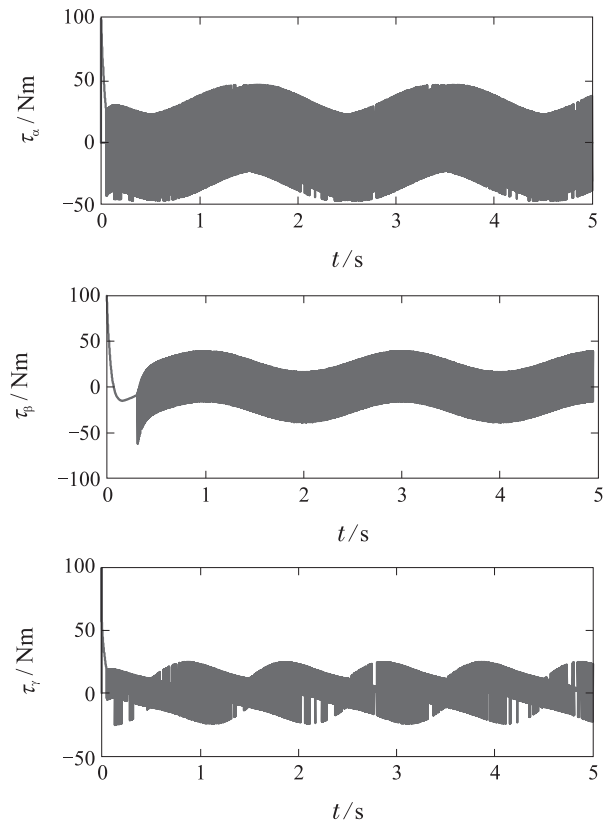


图6 采用SMC控制时各个轴向转矩输入信号  
Fig. 6 Torque input signals generated by SMC

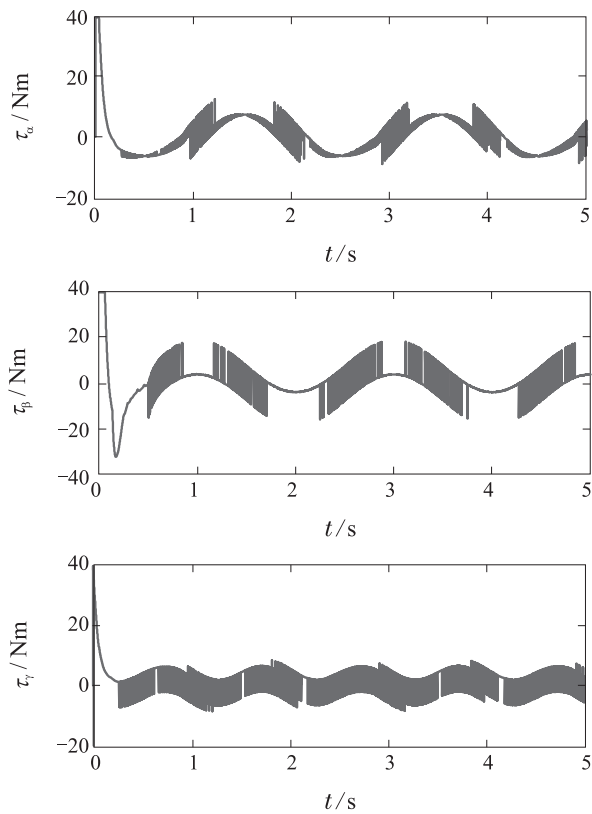


图7 采用SMCO控制时各个轴向转矩输入信号  
Fig. 7 Torque input signals generated by SMCO

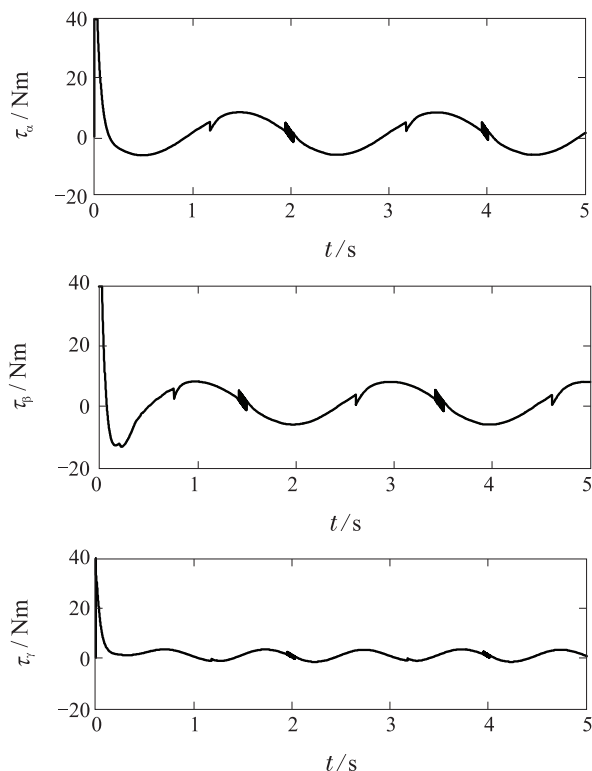


图8 采用FSMCO控制时各个轴向转矩输入信号  
Fig. 8 Torque input signals generated by FSMCO

由图6可以看出单独采用滑模控制器进行轨迹跟踪时, 由控制器产生的转矩输入信号具有较大的保守性且抖振现象很明显. 图7表明了当滑模控制器通过

非线性干扰观测器实时对干扰进行估计并在控制输入端进行补偿, 可以有效地避免滑模的保守控制, 并在一定程度上减少了滑模的抖振. 图8表明采用模糊控制器的输出增益代替滑模控制的切换控制, 可以保证控制率的连续性, 进一步减少了抖振.

现有的实现球形电机高精度轨迹跟踪控制的智能算法大多采用高增益的方法来保证系统的鲁棒性, 这种保守控制往往会带来较大的控制作用, 甚至导致执行器饱和. 在相同的轨迹跟踪目标和相同的给定干扰的情况下, 本文以滑模控制及鲁棒控制为例与本文的控制方法进行了对比分析. 图9给出了采用滑模方法与本文控制方法时的跟踪误差比较. 图10给出了采用鲁棒控制方法与本文控制方法时各个轴向转矩输入信号的比较. 图11给出了采用鲁棒控制与本文控制方法时的跟踪误差比较, 由图6、图8-11对比分析可以看出在存在不确定性、外界干扰、摩擦等情况下, 滑模控制、鲁棒控制及本文的控制方法均可实现高精度的轨迹跟踪, 但本文的控制方法在实现高精度的轨迹跟踪控制的前提下明显得降低了控制器的保守性.

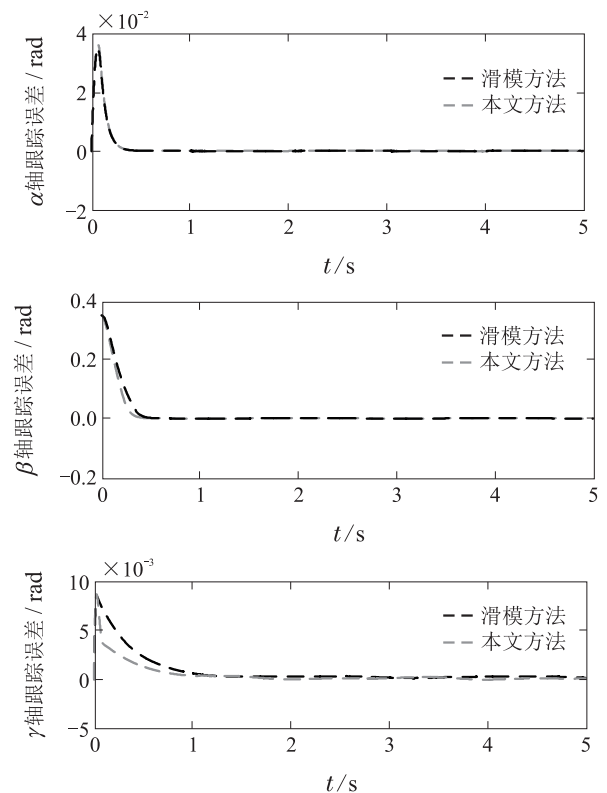
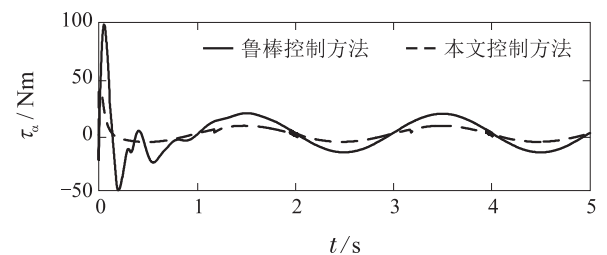


图9 SMC与FSMCO轨迹跟踪性能比较

Fig. 9 Tracking error comparisons for SMC and FSMCO



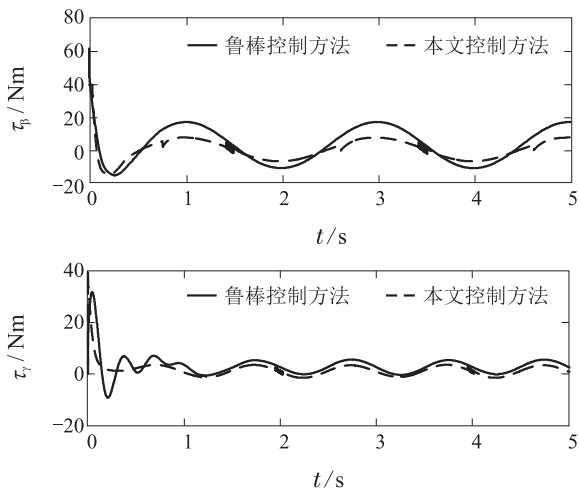


图 10 鲁棒控制与FSMCO控制转矩输入信号比较  
Fig. 10 Torque input signals comparisons for robust control and FSMCO control

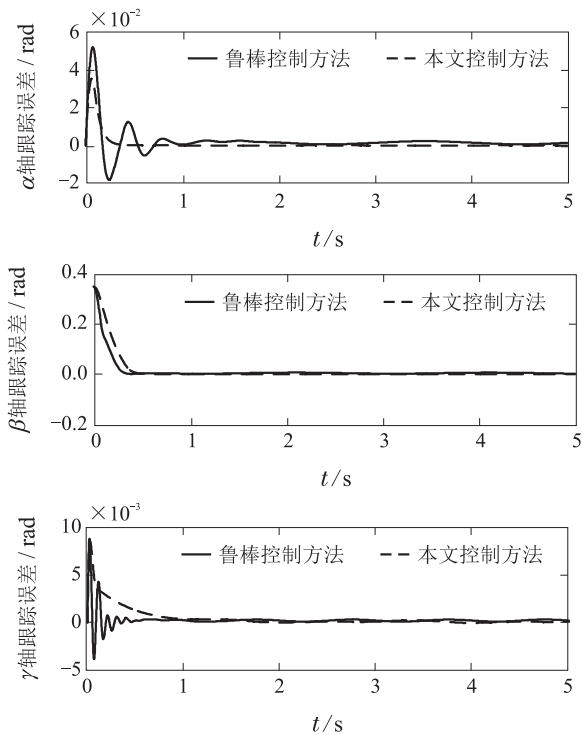


图 11 鲁棒控制与FSMCO轨迹跟踪性能比较  
Fig. 11 Tracking error comparisons for robust control and FSMCO control

为了进一步检验本文所提控制算法的跟踪性能, 本文采用了变化剧烈的方波信号作为轨迹跟踪信号, 给定干扰如方程(42)所示, 轨迹跟踪结果如图12所示。

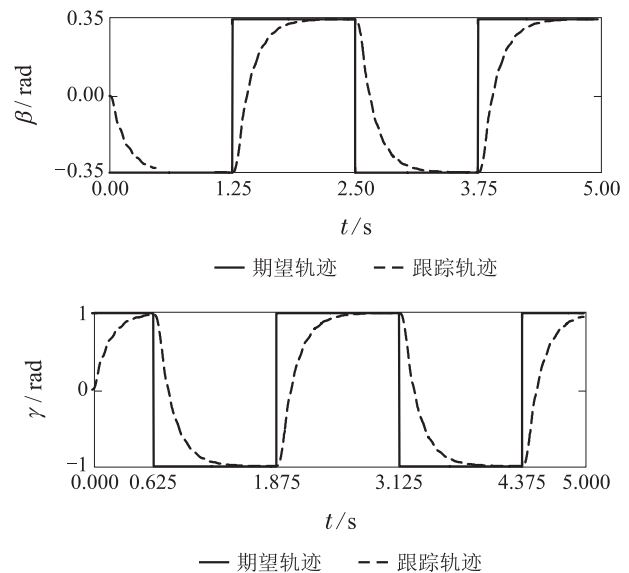
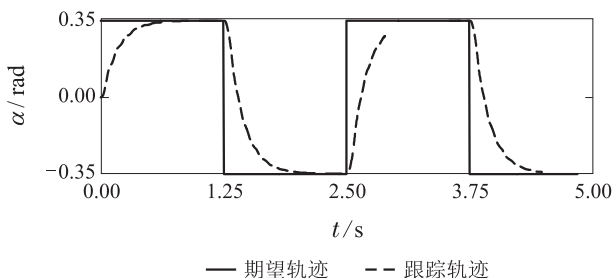


图 12 采用方波信号时的轨迹跟踪性能  
Fig. 12 Trajectory tracking performance using square wave signal

由图12可以看出本文的控制器控制性能良好。

## 7 结论(Conclusions)

本文对存在模型不确定性、摩擦、外界干扰、负载扰动等干扰的永磁球形电机的轨迹跟踪控制进行了研究. 为了提高跟踪性能, 本文设计了一个基于非线性干扰观测器和模糊逻辑的滑模控制器. 非线性干扰观测器对干扰进行实时观测, 并在控制输入端进行补偿实现对干扰的抑制, 并利用滑模控制器对干扰观测器的干扰观测误差及不可观测部分进行抵消, 并利用模糊逻辑对该部分进行逼近, 用模糊的输出增益代替滑模的切换增益, 降低了滑模控制器的切换增益减少了滑模的抖振, 避免了传统控制器的保守控制. 仿真表明, 本文的控制算法跟踪精度高, 对系统的模型不确定性具有良好的鲁棒性, 对摩擦、外界干扰、负载扰动等具有良好的抗扰动能力, 并实现了少保守性的控制。

## 参考文献(References):

- [1] KASASHIMA N, ASHIDA K, YANO T. Torque control method of an electromagnetic spherical motor using torque map [J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2016, 21(4): 2050 – 2060.
- [2] BAI KUN, LEE K M, LU J. A magnetic flux model based method for detecting multi-DOF motion of a permanent magnet spherical motor [J]. *Mechatronics*, 2016, 39(11): 217 – 225.
- [3] BAI KUN, LEE K M. Direct field-feedback control of a ball-joint-like permanent-magnet spherical motor [J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2014, 19(3): 975 – 986.
- [4] SON H, LEE K M. Control system design and input shape for orientation of spherical wheel motor [J]. *Control Engineering Practice*, 2014, 24(3): 120 – 128.
- [5] WANG W, WANG J, JEWELL G W, et al. Design and control of a novel spherical permanent magnet actuator with three degrees of free-



- dom [J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2003, 8(4): 457 – 468.
- [6] XIA C, GUO C, SHI T. A neural-network-identifier and fuzzy-controller-based algorithm for dynamic decoupling control of permanent-magnet spherical motor [J]. *IEEE Transactions on industrial electronics*, 2010, 57(8): 2868 – 2878.
- [7] CHU J, NIGUCHI N, HIRATA K. Feedback control of outer rotor spherical actuator using adaptive neuro-fuzzy inference system [C] // *Proceedings of IEEE International Symposium on Sensing Technology*. Wellington: IEEE, 2013, 12: 401 – 405.
- [8] GUO Xiwen, WANG Qunjing, LI Guoli, et al. Adaptive fuzzy control for permanent magnet spherical motor based on friction compensation [J]. *Proceedings of the CSEE*, 2011, 31(15): 75 – 81. (过希文, 王群京, 李国丽, 等. 基于摩擦补偿的永磁球形电机自适应模糊控制 [J]. *中国电机工程学报*, 2011, 31(15): 75 – 81.)
- [9] LI Z. Robust control of PM spherical stepper motor based on neural networks [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, 56(8): 2945 – 2954.
- [10] GUO X, WANG Q, LI G, et al. Robust adaptive neural network tracking control of a permanent magnet spherical motor [C] // *Proceedings of IEEE International Symposium on Electrical Machines and Systems*. Sapporo: IEEE, 2012, 10: 1 – 5.
- [11] ZHANG L, CHEN W, LIU J, et al. A robust adaptive iterative learning control for trajectory tracking of permanent-magnet spherical actuator [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, 63(1): 291 – 301.
- [12] WEN Y, ZHAO Y, LI G, et al. A robust adaptive sliding-mode controller with bound estimation for permanent magnet spherical actuator [C] // *Proceedings of IEEE International Symposium on Electrical Machines and Systems*. Hefei: IEEE, 2016, 10: 178 – 183.
- [13] WEN Y, LI G, WANG Q, et al. A sliding-mode robust controller for permanent magnet spherical actuator using neural networks [C] // *Proceedings of IEEE International Symposium on Electrical Machines and Systems*. Chiba: IEEE, 2016, 11: 1 – 6.
- [14] KHAN Q, BHATTI A I, IQBAL M, et al. Dynamic integral sliding mode control for SISO uncertain nonlinear systems [J]. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 2012, 8(7): 4621 – 4633.
- [15] BEKIT B W, WHIDBORNE J F, SENEVIRATNE L D. Fuzzy sliding mode control for a robot manipulator [C] // *Proceedings of IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation*. Monterey: IEEE, 1997, 8: 320 – 325.
- [16] YANG B, SANG Y Y, SHI K, et al. Design and real-time implementation of perturbation observer based sliding-mode control for VSC-HVDC systems [J]. *Control Engineering Practice*, 2016, 56(11): 13 – 26.
- [17] LIU J, DENG H, CHEN W, et al. Robust dynamic decoupling control for permanent magnet spherical actuators based on extended state observer [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2016, 11(5): 619 – 631.
- [18] SUN L, LI D, LEE K Y, et al. Enhanced decentralized PI control for fluidized bed combustor via advanced disturbance observer [J]. *Control Engineering Practice*, 2015, 42(9): 128 – 139.
- [19] NAKAO M, OHNISHI K, MIYACHI K. A robust decentralized joint control based on interference estimation [C] // *Proceedings of IEEE International Symposium on Robotics and Automation*. Raleigh: IEEE, 1987, 3: 326 – 331.
- [20] CHEN W H, BALLANCE D J, GAWTHROP, et al. Robust control of PM spherical stepper motor based on neural networks [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2000, 47(4): 932 – 938.
- [21] SU J, CHEN W H, YANG J. On relationship between time-domain and frequency-domain disturbance observers and its applications [J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2016, 138(9): 091013.
- [22] CHEN W H, YANG J, GUO L, et al. Disturbance-observer-based control and related methods – an overview [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2000, 63(2): 1038 – 1095.
- [23] WANG J, LI S, YANG J, et al. Extended state observer-based sliding mode control for PWM-based DC–DC buck power converter systems with mismatched disturbances [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2015, 9(4): 579 – 586.
- [24] YUE W, LIU B, AN C, et al. Extended state observer-based adaptive hierarchical sliding mode control for longitudinal movement of a spherical robot [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 78(2): 1233 – 1244.
- [25] LIU Jinkun. *Sliding Mode Variable Structure Control MATLAB Simulation* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2015. (刘金琨. 滑模变结构控制MATLAB仿真 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2015.)
- [26] WANG L X, MENDEL J M. Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least-squares learning [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1992, 3(5): 807 – 814.
- [27] UTKIN V I. *Sliding modes in control and optimization* [M] // *Springer Science and Business Media*. Berlin, Germany: Springer, 2013.

#### 作者简介:

李洪凤 (1979–), 女, 副教授, 硕士生导师, 目前研究方向为永磁球形电机的磁场分析与控制, E-mail: lihongfeng@tju.edu.cn;

柳文俊 (1989–), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为球形电机的控制, E-mail: liu.wen\_jun@tju.edu.cn.