

考虑导弹速度时变的角度约束最优中制导律

熊少锋^{1,2†}, 魏明英¹, 赵明元¹, 熊 华¹

(1. 北京电子工程总体研究所, 北京 100854; 2. 中国航天科工集团 防御技术研究院, 北京 100854)

摘要: 以导弹逆轨拦截高速运动目标为背景, 本文运用间接高斯伪谱法设计带攻击角度约束的最优中制导律. 通过零化弹目相对法向速度, 将攻击角度约束转化为视线角约束. 考虑导弹速度时变的情况, 建立带角度约束的制导方程. 根据极小值原理推导最优中制导律的解析表达式, 运用高斯伪谱法对最优中制导律进行离散化, 把微分方程转化为代数方程, 避免了求解 Riccati 方程. 该方法不需要预先知道导弹未来的速度信息, 计算量小, 具有较好的实时性. 仿真结果表明该中制导律可以满足逆轨拦截对弹目交会角的约束, 且中制导末端的过载较小.

关键词: 中制导律; 最优控制; 逆轨拦截; 角度约束; 高斯伪谱法; 导弹速度时变

引用格式: 熊少锋, 魏明英, 赵明元, 等. 考虑导弹速度时变的角度约束最优中制导律. 控制理论与应用, 2018, 35(2): 248–257

中图分类号: TJ765.3 文献标识码: A

Impact angle constrained optimal midcourse guidance law for missiles of time-varying speed

XIONG Shao-feng^{1,2†}, WEI Ming-ying¹, ZHAO Ming-yuan¹, XIONG Hua¹

(1. Beijing Institute of Electronic System Engineering, Beijing 100854, China;

2. The Defense Technology Research Institute of China Aerospace Science and Industry Corporation, Beijing 100854, China)

Abstract: In the background of counter parallel intercepting high-speed moving target, the indirect Gauss pseudospectral method is employed to design an impact angle constrained optimal midcourse guidance law in this paper. Through vanishing the relative normal velocity between missile and target, the impact angle constraint is converted into the line of sight angle constraint. Considering the time-varying velocity of missile, the guidance equation with impact angle constraint is established. An analytical expression of optimal midcourse guidance law is derived based on the Minimum Principle. The Gauss pseudospectral method is used to discretize the optimal midcourse guidance law, then differential equations are turned into algebraic equations, and solving the Riccati equations is avoided. It does not need to know in advance the future velocity information of missiles and the computation load is small, which indicates that the proposed method has good real time property. The simulation results show that the proposed mid-course guidance law can satisfy the intersection angle constraint of counter parallel intercepting, and the acceleration command at the end of the midcourse guidance is small.

Key words: midcourse guidance law; optimal control; head on interception; impact angle constraint; Gauss pseudospectral method; time-varying velocity of missile

Citation: XIONG Shaofeng, WEI Mingying, ZHAO Mingyuan, et al. Impact angle constrained optimal midcourse guidance law for missiles of time-varying speed. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(2): 248–257

1 引言(Introduction)

拦截战术弹道导弹(tactical ballistic missile, TBM)的制导律设计是一个富有挑战性的课题. 对于中远程防空拦截问题而言, 一般都采用“中制导+末制导”的复合制导体制^[1]. 其中, 中制导律的作用是把导弹引导到能保证导引头可靠截获目标的预定区域内, 并为末制导提供一个尽可能好的初始攻击条件.

一般来说TBM再入大气层时的速度远大于拦截弹

的速度. 在这种情况下, 传统的追踪模式无法拦截以TBM为代表的高速目标, 因此为了提高拦截成功率, 需要采用逆轨拦截模式. 逆轨拦截要求中制导末端拦截弹的速度方向和目标的速度方向近乎相反, 换句话说要求中制导末端, 拦截弹和目标的速度交会角趋于零. 同时为了保证中末制导平稳交班和末制导弹道的平直性, 要求中制导末端拦截弹的需用过载尽可能小. 综合而言, 逆轨拦截高速运动目标对中制导律

收稿日期: 2017-06-04; 录用日期: 2017-11-08.

†通信作者. E-mail: shepinxiong@163.com; Tel.: +86 15210985746.

本文责任编辑: 孟斌.

中国博士后科学基金第62批面上项目(2017M620863)资助.

Supported by the China Postdoctoral Science Foundation (2017M620863).

提出了攻击角度和过载两方面的约束^[2-3]。文献中常见的制导律设计方法包括比例制导、滑模制导和最优制导,下面将对它们分别进行介绍。

文献[4]根据精确的虚拟目标比例导引系统数学模型,设计出的虚拟目标比例导引律,不仅能保证导弹以给定的落角击中目标,而且有效地避免了比例导引末端控制量发散的问题。文献[5]提出了一种带落角约束的偏置比例导引律,并设计了一种盲区控制方案以减少终点处的法向过载。文献[4-5]中的打击对象都是固定目标。针对逆轨、顺轨拦截高速运动目标,文献[6]将线性的比例制导(proportional navigation, PN)和负比例制导(retro proportional navigation, RPN)作为标称指令,将碰撞角约束作为反馈指令,设计了带末端碰撞角约束的(angle control proportional navigation, ACPN)和(angle control retro-proportional navigation, ACRPN)两种制导律。ACPN使用正比例系数,逆轨拦截目标;ACRPN使用负比例系数,顺轨拦截目标。

滑模控制对干扰具有强鲁棒性且算法简单,被广泛应用于制导律设计^[7-9]。文献[10]利用扩张状态观测器对目标机动等干扰项进行估计并补偿,设计了带角度约束的滑模制导律。文献[11]采用基于Kriging的无模型有限长单位冲激响应滤波器估计目标机动的加速度,并运用非奇异终端滑模控制算法设计了带终端角度约束的制导律。基于滑模控制理论,文献[12-13]设计了考虑自动驾驶仪动态特性的带角度约束制导律。

最优控制因为对各种约束条件的考虑,在制导律设计方面有着较大的优越性^[14-16]。文献[17]应用Schwarz不等式设计了带落角约束的任意加权函数最优制导律,它形式简单,易于工程实现。文献[18]利用间接Gauss伪谱法设计了带角度约束的最优制导律,由于不需要求解非线性规划问题,计算量小,实时性好。文献[17-18]中,打击的对象都是固定目标。文献[19]根据中制导末端的视场角约束,提出一种新的虚拟目标的设置方法,并运用最优控制理论设计了满足视场角约束的中制导律。文献[20]采用终端投影变换法对高阶制导模型进行降阶处理,设计了一种具有速度交会角约束的最优制导律。考虑时变的加速度界限,文献[21]基于线性二次型最优控制理论,设计出了一种打击机动目标且满足落角约束的次优制导律。在三维空间内,考虑自动驾驶仪的二阶动态特性,文献[1]采用高斯伪谱法设计了多约束条件下的最优中制导律,且将剩余飞行时间 n 次方的倒数作为控制权重系数,可使得过载在制导末端趋于小值,但它需要使用算法软件包SNOPT求解非线性规划问题,计算量大,不适于在线运行。

总的来说,前述的文献在设计制导律时,都是假定导弹速度是恒定不变的。但是在实际工程中,由于有

发动机推力和空气阻力的作用,导弹的速度是时变的,而且变化范围较大,从1 Ma以下到5~6 Ma,因此关于导弹速度恒定不变的假设不再成立,故有必要研究考虑导弹速度时变的制导律设计。

文献[22]将剩余飞行距离引入到指标函数,基于最优控制理论设计了带终端角度约束和导引头视场角约束的制导律,使得过载在制导末端趋于小值,在仿真时考虑了导弹速度是时变的,取得了良好的效果,但是打击对象为固定目标。文献[23]将导弹速度的变化率和目标机动视为总扰动,利用干扰观测器对其进行估计,设计了带角度约束的滑模制导律,但打击对象为低速运动的坦克目标。针对机动目标,文献[24]采用伴随变换法设计了考虑导弹速度时变的最优制导律,给出了制导律的解析表达式。但是,它用到了导弹速度从当前时刻到终端时刻的积分,导弹未来的速度一般是难以提前预知的,工程应用困难,且它没有考虑角度约束。

针对拦截匀速运动目标,本文考虑导弹速度时变的情况,运用间接Gauss伪谱法^[25]设计满足弹目速度交会角和末端过载尽可能小约束条件的最优中制导律。它具有以下特点:

- 1) 不再假设导弹速度是常值,考虑了导弹速度时变的问题。
- 2) 可满足弹目速度交会角约束,且使得过载在中制导末端趋于小值。
- 3) 不需要积分求解Riccati方程,也不需要求解序列二次规划问题,计算量小,实时性好,而且无需预先知道从当前时刻到终端时刻的导弹速度信息,知道导弹当前时刻的速度和速度的变化率即可,导弹速度的变化率可由加速度计测量得到,工程应用前景广阔。

2 弹目拦截方程(Missile target engagement equations)

纵向平面内的弹目拦截几何如图1所示。

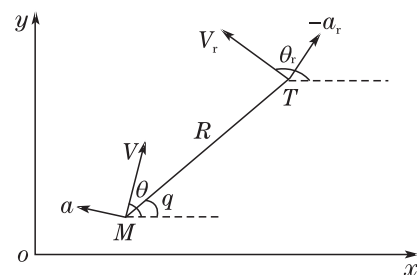


图1 弹目拦截几何

Fig. 1 Missile target engagement geometry

在图1中: M 和 T 分别表示导弹和目标, V 和 V_T 分别表示导弹和目标的速度, a 和 a_T 分别表示导弹和目标的法向加速度, θ 和 θ_T 分别表示导弹和目标的弹道倾角, R 表示弹目视线, q 表示视线角。

弹目相对运动学方程为^[18]

$$\dot{R} = V_T \cos(\theta_T - q) - V \cos(\theta - q), \quad (1)$$

$$R\dot{q} = V_T \sin(\theta_T - q) - V \sin(\theta - q), \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = \frac{a}{V}, \quad (3)$$

$$\dot{\theta}_T = \frac{a_T}{V_T}. \quad (4)$$

纵向平面内导弹的动力学方程为^[26]

$$\begin{cases} \dot{V} = \frac{T \cos \alpha - D}{m} - g \sin \theta, \\ \dot{\theta} = \frac{T \sin \alpha + L}{mV} - \frac{g \cos \theta}{V}, \\ D = \frac{1}{2} \rho V^2 S (C_{D0} + K C_{L\alpha}^2 \alpha^2), \\ L = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{L\alpha} \alpha. \end{cases} \quad (5)$$

在式(5)中: T 为发动机推力, D 和 L 分别为阻力和升力, ρ 为空气密度, S 为特征面积, m 为拦截弹质量, C_{D0} , $C_{L\alpha}$ 和 K 为空气动力系数, α 为攻角, g 为重力加速度.

对式(2)求导, 并将式(1)和(3)–(4)代入其中, 可得

$$\begin{aligned} \ddot{q} = & -2\frac{\dot{R}}{R}\dot{q} + \frac{1}{R}(\dot{V} \sin(q - \theta) - \\ & \dot{V}_T \sin(q - \theta_T)) + \frac{1}{R}(a_T \cos(q - \\ & \theta_T) - a \cos(q - \theta)). \end{aligned} \quad (6)$$

本文研究的打击对象为匀速运动目标, 故目标的轴向加速度 \dot{V}_T 和法向加速度 a_T 均为零, 因此式(6)可重写为

$$\ddot{q} = -2\frac{\dot{R}}{R}\dot{q} + \frac{1}{R}[\dot{V} \sin(q - \theta) - a \cos(q - \theta)]. \quad (7)$$

将导弹速度矢量和目标速度矢量之间的夹角定义为攻击角度, 即

$$\theta_{\text{imp}} = \theta_T - \theta. \quad (8)$$

当导弹和目标处于碰撞几何的三角形上时, 目标相对于导弹的速度沿垂直于视线方向的分量为零, 相应的数学表达式为

$$V_T \sin(\theta_T - q) - V \sin(\theta - q) = 0. \quad (9)$$

将式(8)代入式(9)得

$$V_T \sin(\theta_T - q) - V \sin((\theta_T - q) - \theta_{\text{imp}}) = 0.$$

对其进行三角函数展开得

$$\begin{aligned} V_T \sin(\theta_T - q) - V \sin(\theta_T - q) \cos \theta_{\text{imp}} + \\ V \cos(\theta_T - q) \sin \theta_{\text{imp}} = 0, \end{aligned}$$

进一步化简得

$$\frac{\sin(\theta_T - q)}{\cos(\theta_T - q)} = \frac{-V \sin \theta_{\text{imp}}}{V_T - V \cos \theta_{\text{imp}}},$$

经整理可得

$$q_f = \theta_T - \arctan\left(\frac{\sin \theta_{\text{imp}}}{\cos \theta_{\text{imp}} - V_T/V}\right). \quad (10)$$

在式(10)中 q_f 表示期望的视线角. 考虑到实际的逆轨拦截场景, 目标再入时其弹道倾角为 $(-180^\circ, -90^\circ)$ 区间内的一个值, 拦截弹的弹道倾角为 $(0^\circ, 90^\circ)$ 区间内的一个值, 逆轨拦截的攻击角度 θ_{imp} 应该取值为 -180° , 将其代入式(10)可得

$$q_f = \theta_T + \pi. \quad (11)$$

从式(11)可以看出, 逆轨拦截匀速运动目标时, 期望视线角 q_f 是一个定值; 逆轨拦截机动目标时, 期望视线角 q_f 是随着目标的弹道倾角变化而变化的.

令 $x_1 = q - q_f$, $x_2 = \dot{q}$, 建立考虑角度约束的制导模型为

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)u(t) + \mathbf{C}(t), \quad (12)$$

其中:

$$\mathbf{X}(t) = [x_1 \ x_2]^T, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2\frac{\dot{R}}{R} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}(t) = [0 \ -\frac{\cos(q - \theta)}{R}]^T, \quad u(t) = a,$$

$$\mathbf{C}(t) = [0 \ \frac{1}{R}[\dot{V} \sin(q - \theta)]]^T.$$

$\mathbf{C}(t)$ 里的内容是因为导弹存在轴向加速度而引起的导弹速度变化项.

3 最优中制导律设计 (Optimal midcourse guidance law design)

针对匀速运动目标, 考虑导弹速度时变和攻击角度约束, 基于最优控制理论设计中制导律. 选取如下的性能指标函数:

$$\begin{aligned} J = & \frac{1}{2} \mathbf{X}(t_f)^T \mathbf{F} \mathbf{X}(t_f) + \\ & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{X}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{X}(t) + R u(t)^2] dt, \end{aligned} \quad (13)$$

在式(13)中: $R = \frac{\zeta}{t_{\text{go}}}$, ζ 为一正数, $t_{\text{go}} = t_f - t$ 表示剩余飞行时间, \mathbf{F} 和 \mathbf{Q} 表示正定的对角矩阵, \mathbf{F} , \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 分别表示末端状态量、状态量和控制量的权重系数; t_0 和 t_f 分别表示初始时刻和终端时刻.

3.1 连续形式的最优解 (Continuous optimal solution)

构造如下形式的Hamiltonian函数:

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} [\mathbf{X}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{X}(t) + R u(t)^2] + \\ & \lambda(t)^T [\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)u(t) + \mathbf{C}(t)], \end{aligned} \quad (14)$$

式中 $\lambda(t) \in \mathbb{R}^2$ 为协态向量. 根据正则方程可得如下的状态方程与协态方程:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)u(t) + \mathbf{C}(t), \quad (15)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}} = -[\mathbf{Q}\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}(t)^T \lambda(t)]. \quad (16)$$

假设对控制量 u 的取值没有限制,可得控制方程

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Ru(t) + \mathbf{B}(t)^T \boldsymbol{\lambda}(t) = 0. \quad (17)$$

求解式(17)可得最优控制量为

$$u(t) = -R^{-1} \mathbf{B}(t)^T \boldsymbol{\lambda}(t). \quad (18)$$

将式(18)代入式(15),并根据横截条件,可得如下的两点边值问题:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & -\mathbf{B}(t)R^{-1}\mathbf{B}(t)^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}(t)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} \mathbf{C}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{F}\mathbf{X}(t_f). \end{cases} \quad (19)$$

3.2 基于Gauss伪谱法的离散解(Discrete solution based on Gauss pseudospectral method)

在式(19)中, \mathbf{X}_0 为状态初值.由于系统参数 $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ 和 $\mathbf{C}(t)$ 是时变的,式(19)难以直接求解.这里将采用间接高斯伪谱法求解式(19),大体思路是将状态变量 $\mathbf{X}(t)$ 和协态变量 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ 在一系列勒让德-高斯(Legendre-Gauss, LG)点上离散,并以离散点为节点构造Lagrange插值多项式来逼近状态变量 $\mathbf{X}(t)$ 和协态变量 $\boldsymbol{\lambda}(t)$.对插值多项式进行求导可近似状态变量 $\mathbf{X}(t)$ 和协态变量 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ 对时间的导数,即 $\dot{\mathbf{X}}(t)$ 和 $\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)$,进而可用一组代数方程代替微分方程(19),下面将给出具体的推导过程.

将时间区域 $[t_0, t_f]$ 映射到 $[-1, 1]$ 上,引入新的时间变量 τ 对 t 进行变换,可得

$$\tau = \frac{2}{t_f - t_0}t - \frac{t_f + t_0}{t_f - t_0}. \quad (20)$$

对式(20)两边求导可得

$$d\tau = \frac{2}{t_f - t_0}dt. \quad (21)$$

将式(20)–(21)代入式(19)可得

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(\tau) = \\ \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{A}(\tau) \mathbf{X}(\tau) - \\ \frac{t_f - t_0}{2} (\mathbf{B}(\tau)R^{-1}\mathbf{B}(\tau)^T \boldsymbol{\lambda}(\tau) - \mathbf{C}(\tau)), \\ \mathbf{X}(-1) = \mathbf{X}_0, \\ \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\lambda}}(\tau) = -\frac{t_f - t_0}{2} [\mathbf{Q}\mathbf{X}(\tau) + \mathbf{A}(\tau)^T \boldsymbol{\lambda}(\tau)], \\ \boldsymbol{\lambda}(1) = \mathbf{F}\mathbf{X}(t_f). \end{cases} \end{cases} \quad (22)$$

在实际工程中,制导指令是按照一定的制导周期 Δt 来计算更新的.在时间区间 $[t, t + \Delta t]$ 内,采用 t 时

刻的信息来计算制导指令,在时间区间 $[t + \Delta t, t + 2\Delta t]$ 内,采用 $t + \Delta t$ 时刻的信息来计算制导指令,依此类推下去.因此从工程的角度来看,在一个制导周期内,系统参数 $\mathbf{A}(\tau)$, $\mathbf{B}(\tau)$ 和 $\mathbf{C}(\tau)$ 是不变的,分别简记为 \mathbf{A} , \mathbf{B} 和 \mathbf{C} ,故可将式(22)和(23)分别重新写为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(\tau) = \frac{t_f - t_0}{2} [\mathbf{A}\mathbf{X}(\tau) - \\ \mathbf{B}R^{-1}\mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}(\tau) + \mathbf{C}], \\ \mathbf{X}(-1) = \mathbf{X}_0, \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\lambda}}(\tau) = -\frac{t_f - t_0}{2} [\mathbf{Q}\mathbf{X}(\tau) + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}(\tau)], \\ \boldsymbol{\lambda}(1) = \mathbf{F}\mathbf{X}(t_f). \end{cases} \quad (25)$$

在式(24)中,初始时刻的状态变量 $\mathbf{X}(-1)$ 是已知的;在式(25)中,为了满足角度约束和零脱靶量,要求 $q(t_f) - q_f = 0$ 和 $\dot{q}(t_f) = 0$,所以终端时刻的状态变量 $\mathbf{X}(t_f)$ 也是已知的.因此在运用高斯伪谱法对式(24)和(25)进行离散时,需要将初始时刻-1和终端时刻1分别考虑进去.对于状态变量 $\mathbf{X}(\tau)$,用初始点 $\tau_0 = -1$ 和 N 个高斯节点 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ 上的离散状态构造Lagrange插值多项式来近似,可得

$$\mathbf{X}(\tau) = \mathbf{X}(-1)L_0(\tau) + \sum_{i=1}^N \mathbf{X}(\tau_i)L_i(\tau). \quad (26)$$

在式(26)中:

$$L_i(\tau) = \prod_{k=0, k \neq i}^N \frac{\tau - \tau_k}{\tau_i - \tau_k}$$

为标量, $i = 0, 1, \dots, N$.对式(26)求导可得

$$\dot{\mathbf{X}}(\tau) = \mathbf{X}(-1)\dot{L}_0(\tau) + \sum_{i=1}^N \mathbf{X}(\tau_i)\dot{L}_i(\tau). \quad (27)$$

对应连续方程(26)–(27),在离散节点 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ 处,对每一个节点都是成立的.记 $\tilde{D}_k = \dot{L}_0(\tau_k)$, $D_{ki} = \dot{L}_i(\tau_k)$,将它们代入式(27)可得

$$\dot{\mathbf{X}}(\tau_k) = \mathbf{X}(-1)\tilde{D}_k + \sum_{i=1}^N \mathbf{X}(\tau_i)D_{ki}, \quad (28)$$

式中: $k = 1, 2, \dots, N$, $\tilde{D} \in \mathbb{R}^N$ 和 $D \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 为微分矩阵,可以预先计算出来.对于协态变量 $\boldsymbol{\lambda}(\tau)$,用 N 个高斯节点 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ 处和末端点 $\tau_{N+1} = 1$ 上的离散状态构造Lagrange插值多项式来近似,可得

$$\boldsymbol{\lambda}(\tau) = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\lambda}(\tau_i)L_i(\tau) + \boldsymbol{\lambda}(1)L_{N+1}(\tau). \quad (29)$$

在式(29)中:

$$L_i(\tau) = \prod_{k=1, k \neq i}^{N+1} \frac{\tau - \tau_k}{\tau_i - \tau_k}$$

为标量, $i = 1, 2, \dots, N + 1$.对式(29)求导可得

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(\tau) = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\lambda}(\tau_i)\dot{L}_i(\tau) + \boldsymbol{\lambda}(1)\dot{L}_{N+1}(\tau). \quad (30)$$

对应连续方程(29)–(30), 在离散节点 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ 处, 对每一个节点都是成立的. 记 $\tilde{D}_k^* = \dot{L}_{N+1}(\tau_k), D^*_{ki} = \dot{L}_i(\tau_k)$, 将它们代入式(30)可得

$$\dot{\lambda}(\tau_k) = \sum_{i=1}^N \lambda(\tau_i) D^*_{ki} + \lambda(1) \tilde{D}_k^*. \quad (31)$$

式(31)中: $k = 1, 2, \dots, N, \tilde{D}^* \in \mathbb{R}^N$ 和 $D^* \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 为微分矩阵. 将式(28)和(31)分别代入式(24)和(25)可得离散形式的状态方程和协态方程

$$\tilde{D}_k X(-1) + \sum_{i=1}^N D_{ki} X_i = \frac{t_f - t_0}{2} (A X_k - B R^{-1} B^T \lambda_k + C), \quad (32)$$

$$\tilde{D}_k^* \lambda(1) + \sum_{i=1}^N D^*_{ki} \lambda_i = -\frac{t_f - t_0}{2} (Q X_k + A^T \lambda_k), \quad (33)$$

在式(32)–(33)中:

$$X_k = X(\tau_k), X_i = X(\tau_i), \lambda_k = \lambda(\tau_k), \lambda_i = \lambda(\tau_i), k = 1, 2, \dots, N.$$

状态变量的终值 $X(1)$ 和协态变量的初值 $\lambda(-1)$ 可通

过高斯积分得到

$$X(1) = X(-1) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{i=1}^N w_i (A X_i - B R^{-1} B^T \lambda_i + C), \quad (34)$$

$$\lambda(-1) = \lambda(1) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{i=1}^N w_i (Q X_i + A^T \lambda_i). \quad (35)$$

在式(34)–(35)中, w_i 为高斯积分系数. 记

$$\begin{aligned} \lambda &= [\lambda_1^T \ \lambda_2^T \ \dots \ \lambda_N^T]^T \in \mathbb{R}^{2N}, \\ \lambda_{N+1} &= \lambda(1) \in \mathbb{R}^2, \\ X &= [X_1^T \ X_2^T \ \dots \ X_N^T]^T \in \mathbb{R}^{2N}, \\ X_0 &= X(-1) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

则综合式(32)–(33)可得

$$\begin{cases} \tilde{D} X_0 + D X + \frac{t_f - t_0}{2} \hat{D} \lambda = \frac{t_f - t_0}{2} \bar{C}, \\ \tilde{D}^* \lambda_{N+1} + D^* \lambda + \frac{t_f - t_0}{2} \hat{Q} X = 0. \end{cases} \quad (36)$$

在式(36)中:

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= [\tilde{D}_1 I_2 \ \tilde{D}_2 I_2 \ \dots \ \tilde{D}_N I_2]^T \in \mathbb{R}^{2N \times 2}, \tilde{D}^* = [\tilde{D}_1^* I_2 \ \tilde{D}_2^* I_2 \ \dots \ \tilde{D}_N^* I_2]^T \in \mathbb{R}^{2N \times 2}, \\ D &= \begin{bmatrix} D_{11} I_2 - \frac{t_f - t_0}{2} A & D_{12} I_2 & \dots & D_{1N} I_2 \\ D_{21} I_2 & D_{22} I_2 - \frac{t_f - t_0}{2} A & \dots & D_{2N} I_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{N1} I_2 & D_{N2} I_2 & \dots & D_{NN} I_2 - \frac{t_f - t_0}{2} A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N} \\ D^* &= \begin{bmatrix} D^*_{11} I_2 + \frac{t_f - t_0}{2} A^T & D^*_{12} I_2 & \dots & D^*_{1N} I_2 \\ D^*_{21} I_2 & D^*_{22} I_2 + \frac{t_f - t_0}{2} A^T & \dots & D^*_{2N} I_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^*_{N1} I_2 & D^*_{N2} I_2 & \dots & D^*_{NN} I_2 + \frac{t_f - t_0}{2} A^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}, \\ \hat{D} &= \begin{bmatrix} B R^{-1} B^T & \mathbf{0}_2 & \dots & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & B R^{-1} B^T & \dots & \mathbf{0}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & B R^{-1} B^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}, \hat{Q} = \begin{bmatrix} Q & \mathbf{0}_2 & \dots & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & Q & \dots & \mathbf{0}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & Q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}, \\ \bar{C} &= [C^T \ C^T \ \dots \ C^T]^T \in \mathbb{R}^{2N}, I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{0}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

将式(36)写成矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} D & \frac{t_f - t_0}{2} \hat{D} \\ \frac{t_f - t_0}{2} \hat{Q} & D^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{D} X_0 + \frac{t_f - t_0}{2} \bar{C} \\ -\tilde{D}^* \lambda_{N+1} \end{bmatrix}. \quad (37)$$

记

$$G = \begin{bmatrix} D & \frac{t_f - t_0}{2} \hat{D} \\ \frac{t_f - t_0}{2} \hat{Q} & D^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4N \times 4N},$$

$$S = \begin{bmatrix} -\tilde{D}X_0 + \frac{t_f - t_0}{2} \tilde{C} \\ -\tilde{D}^* \lambda_{N+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4N},$$

则式(37)变为

$$G \begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} = S. \tag{38}$$

求解式(38)可得

$$\begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} = G^{-1}S. \tag{39}$$

通过式(39)可以得到 N 个高斯节点上的状态变量 X_i 和协态变量 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, N$, 将它们分别代入式(34)和(35)计算可得终端时刻的状态变量 $X(1)$ 和初始时刻的协态变量 $\lambda(-1)$. 至此, $\tau_0 = -1, \tau_1, \dots, \tau_N, \tau_{N+1} = 1$ 共 $N + 2$ 个节点上的状态变量和协态变量均已求出, 根据式(18)可以求得每个时间节点上的最优控制量

$$u(\tau_i) = -R^{-1}B^T \lambda_i, i = 0, 1, \dots, N, N + 1. \tag{40}$$

从上述公式的推导过程可以看出, 最优中制导律不需要任何的积分或者迭代运算过程, 只需要知道初始时刻的状态 X_0 , 就可以解析地计算出 $[t_0, t_f]$ 区域内各个节点上的最优控制量, 计算量小, 可应用于工程实时在线计算过载指令. 式(40)得到的只是开环最优解, 无法抑制外界干扰的影响. 为此, 引入滚动时域方法, 具体步骤如下:

第1步 将当前时刻和当前状态分别设为初始时刻 t_0 和初始状态 X_0 ;

第2步 用弹目距离除以弹目相对速度沿视线的分量计算得出剩余飞行时间 t_{go} , 进而求得终端时刻 $t_f = t_0 + t_{go}$;

第3步 根据式(40)计算得到各个节点的最优控制量 $u_i, i = 0, 1, \dots, N, N + 1$, 只取 t_0 时刻的控制量 u_0 , 将其应用于导弹的动力学方程(5)计算得到下一时刻 $t_1 = t_0 + \Delta t$ 及相应的状态变量, Δt 为制导指令计算周期, 一般设为 10 ms;

第4步 判断导弹和目标的距离是否小于导引头的最大探测距离. 如果弹目距离大于导引头的最大探测距离, 则将当前时刻 t_1 设为初始时刻, 即 $t_0 = t_1$, 当前状态设为初始状态, 重复步骤1-3, 直到弹目距离小于导引头的最大探测距离.

这里说明两点: 1) 在导弹的中制导阶段, 导弹和目标在地面坐标系中的位置和速度均可以由地面雷达测量得到, 经数学运算可以得到弹目距离和弹目相对速度沿视线方向的分量; 2) 为了满足角度约束且击中目标, 终端时刻的状态变量 $X(t_f)$ 被设为零, 这就使得终端状态的权重 F 无论取值多少, 其跟 $X(t_f)$ 相乘后都是零, 因此需要靠调节状态量的权重 Q 来满足弹目速度交会角约束.

4 仿真分析与对比 (Simulation analysis and comparison)

这一小节通过数字仿真以说明所设计中制导律的性能. 仿真参数: 导弹的初始位置为(2 km, 1 km), 目标的初始位置为(90 km, 80 km), 导弹的初始速度为 200 m/s, 目标的速度和弹道倾角分别为 3 km/s 和 -135° , 导引头的最大探测距离为 10 km, 导弹的初始质量为 734 kg, 燃料的燃烧时间和消耗速率分别为 10 s 和 -24.4 kg/s, 在燃料燃烧期间发动机的推力 T 为 110 kN, 燃料消耗完毕后发动机推力 T 为 0 N, 导弹速度变化率的初始值为 100 m/s², 导弹的特征面积 $s = 0.146$ m², 重力加速度 $g = 9.8$ m/s², $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \zeta = 15$, 高斯节点数 $N = 3$, 仿真步长为 0.01 s, 空气动力系数 C_{D0}, K 和 $C_{L\alpha}$ 由表 1 查表获得.

表 1 空气动力系数

Table 1 Aerodynamic coefficients

马赫数	0.2	0.78	0.94	1.07	1.32	1.61	2.43	3.5	5.0	6.1
C_{D0}	0.241	0.213	0.258	0.407	0.445	0.372	0.255	0.190	0.150	0.145
K	0.110	0.136	0.135	0.109	0.108	0.115	0.121	0.134	0.154	0.160
$C_{L\alpha}$	9.15	7.51	7.61	9.63	9.89	9.18	8.91	7.94	7.03	6.93

4.1 有效性验证 (Verifying validation)

导弹的初始弹道倾角为 55° , 仿真结果如图 2-6 所示. 末端时刻, 弹目速度交会角为 -180.0607° , 与

逆轨拦截要求的交会角 -180° 相差 -0.0607° , 满足逆轨拦截对中制导末端时刻弹目交会角的约束. 在图 5 中, 导弹的过载指令在第 10 s 时产生了跳变, 这

是因为第10 s的时候, 导弹燃料消耗完毕, 发动机推力由110 kN跳转到0 N, 导弹纵向加速度由正变为负而导致的. 反映在图6中, 由于发动机推力的作用, 导弹前10 s处于加速过程, 第10 s时, 导弹速度达到峰值, 后面由于发动机推力为零, 导弹只受到空气阻力的作用, 其速度逐渐减小. 从式(39)可以看出, 协态 λ 与向量 S 相关, S 中的分量 \dot{C} 就包含了导弹速度的变化率 \dot{V} . 当发动机推力在第10 s从110 kN突变到0 N时, 导弹速度变化率 \dot{V} 势必也会跟着突变, 该突变进而通过式(39)传导给协态, 再经过式(40)传导给控制量 λ , 引起控制量的突变. 另外, 从图5可以看出, 在中制导初段, 过载指令较大, 而在中制导末段, 过载指令逐渐减小, 趋于一个小值, 这是因为控制权重 $R = \frac{\zeta}{t_{go}}$ 在中制导初段是一个较小的值, 而随着剩余时间 t_{go} 的减小, 控制权重 R 逐渐增大. 过载指令在中制导末端趋于小值, 有利于中末制导平稳交班. 在中制导末端导弹过载指令未趋于零的原因是过载指令里面包含了对重力加速度的补偿. 不考虑重力加速度的补偿, 导弹的过载指令如图7所示, 从中可以看到, 导弹过载在中制导末端趋于零.

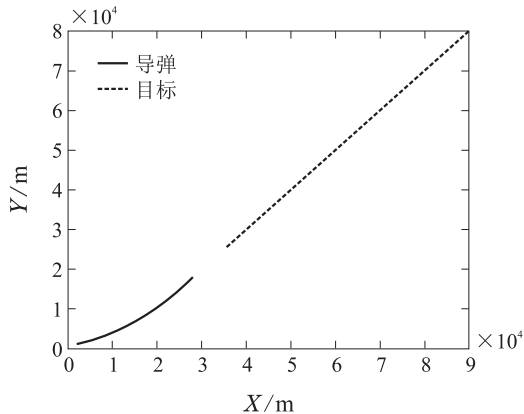


图2 弹目运动轨迹

Fig. 2 Trajectories of missile and target

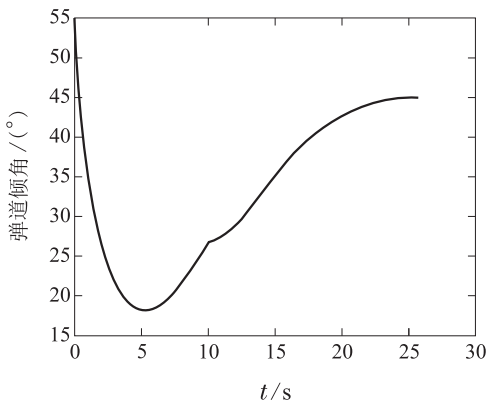


图3 弹道倾角

Fig. 3 Flight path angle of missile

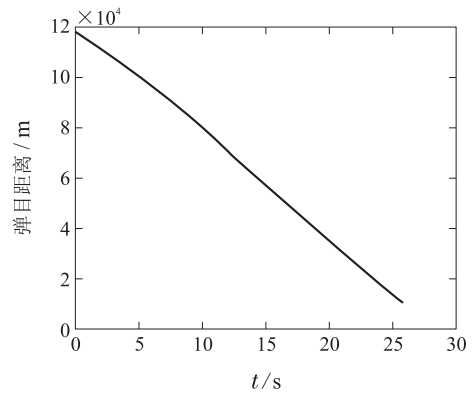


图4 弹目距离

Fig. 4 Distance between missile and target

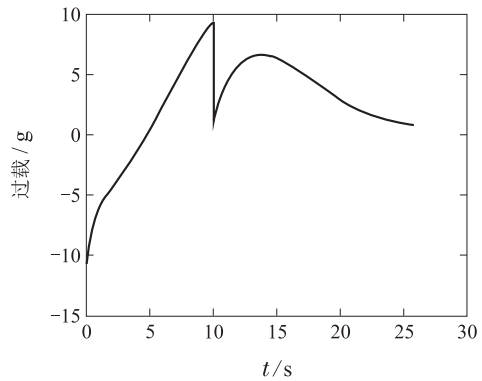


图5 过载

Fig. 5 Acceleration command of missile

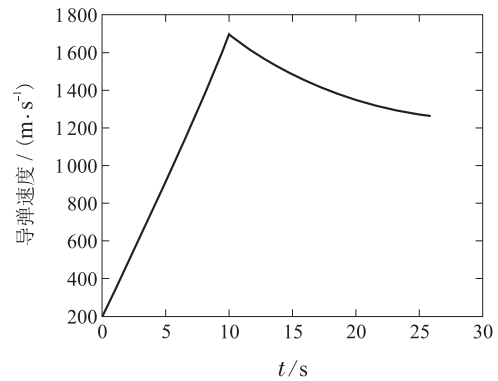


图6 导弹速度

Fig. 6 Velocity of missile

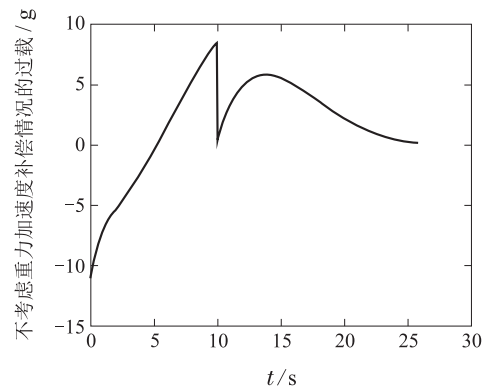


图7 不考虑重力加速度补偿情况的过载

Fig. 7 Acceleration command of missile without compensation for gravitational acceleration

4.2 不同初始弹道倾角下的制导性能(Performance of guidance law under various initial heading angles)

导弹的初始弹道倾角在中制导律设计中是一个重要的参数, 这里通过仿真说明本文设计的中制导律能够适用于较大范围内的导弹初始弹道倾角(假设导弹可以提供所需要的过载). 选取导弹初始弹道倾角的值分别为 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60° 和 70°, 仿真结果如图8-12所示.

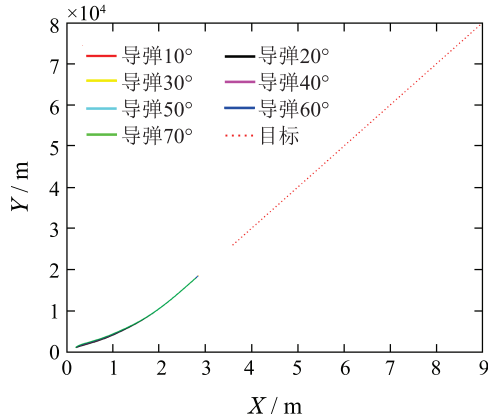


图 8 弹目运动轨迹

Fig. 8 Trajectories of missile and target

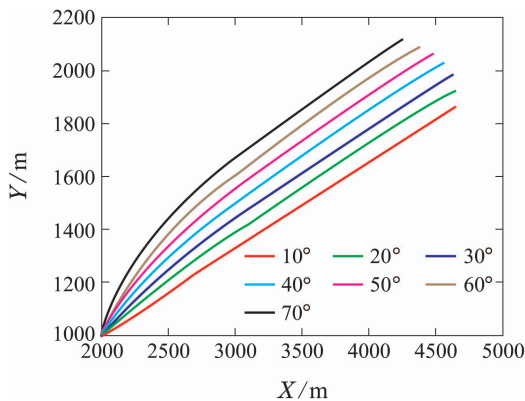


图 9 5 s 内的导弹运动轨迹

Fig. 9 Trajectories of missile within five minutes

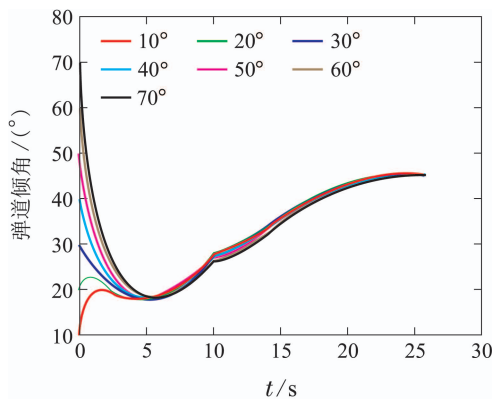


图 10 弹道倾角

Fig. 10 Flight path angle of missile

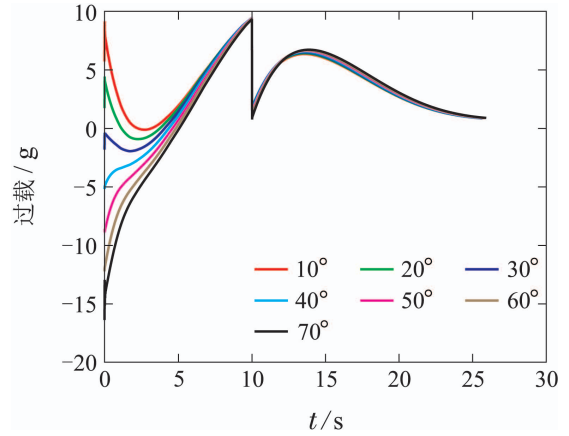


图 11 过载

Fig. 11 Acceleration command of missile

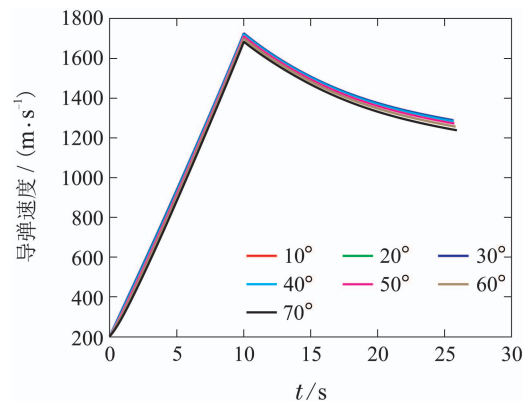


图 12 导弹速度

Fig. 12 Velocity of missile

在这7种场景下, 弹目速度交会角分别是 -180.0711° , -180.0693° , -180.0675° , -180.0650° , -180.0622° , -180.0587° 和 -180.0550° , 与逆轨拦截要求的弹目交会角 -180° 之间的差值分别为 -0.0711° , -0.0693° , -0.0675° , -0.0650° , -0.0622° , -0.0587° 和 -0.0550° , 满足逆轨拦截的要求. 从图 11 可以看出, 导弹的过载指令在中制导末段逐渐减小, 趋于一个小值, 有利于中末制导平稳交班. 这充分说明本文设计的最优中制导律对较大范围内的导弹初始弹道倾角具有较好的适应性.

4.3 与其他方法的比较(Comparison with other approaches)

为了进一步验证本文所设计制导律的性能, 将其与偏置比例导引律^[27]和传统最优制导律^[28]进行对比, 这两种制导律都是在导弹速度为常值情况下推导的. 偏置比例制导律的表达式为^[27]

$$\begin{cases} u_{BPN} = N_G V [\dot{q}(t) - \dot{q}_b(t)], \\ \dot{q}_b(t) = \frac{\eta V [q_f - q(t)]}{N_G R(t) \cos[\theta(t) - q(t)]}, \\ N_G = 4, \eta = 1.3. \end{cases} \quad (41)$$

考虑重力补偿的最优制导律为^[28]

$$u = 4V\dot{q}(t) - 2V\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}(q(t) - q_f) + g \cos(\theta(t)). \quad (42)$$

导弹初始发射角为 55° , 仿真结果如图13-16所示. 在偏置比例制导律、考虑重力补偿的最优制导律和考虑导弹速度时变的最优制导律作用下, 弹目速度交会角分别是 -145.8395° , -153.1109° 和 -180.0607° , 和期望的弹目速度交会角 -180° 相比, 差值分别为 34.1605° , 26.8891° 和 -0.0607° , 很显然本文设计的制导律可以获得更高精度的弹目速度交会角. 从图15可以看出, 偏置比例制导律和考虑重力补偿的最优制导律在制导末端, 过载均较大, 而本文设计的制导律使得过载在制导末端趋于一个小值, 更有利于中末制导平稳交班.

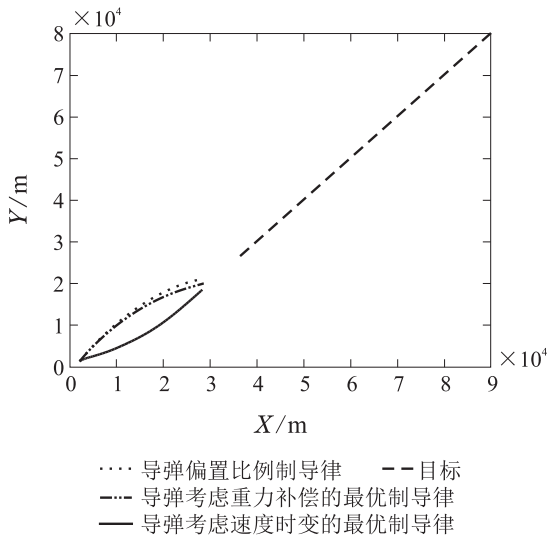


图13 弹目运动轨迹

Fig. 13 Trajectories of missile and target

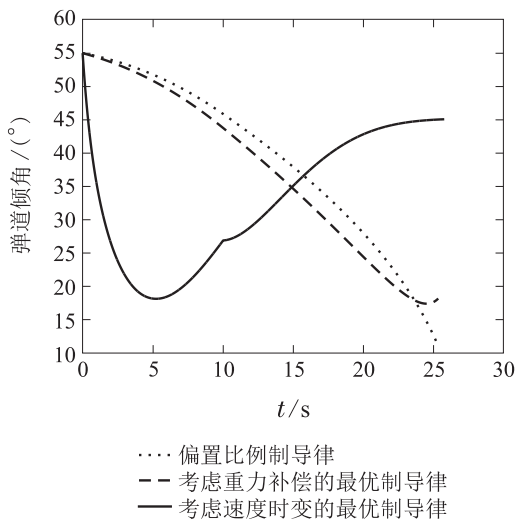


图14 弹道倾角

Fig. 14 Flight path angle of missile

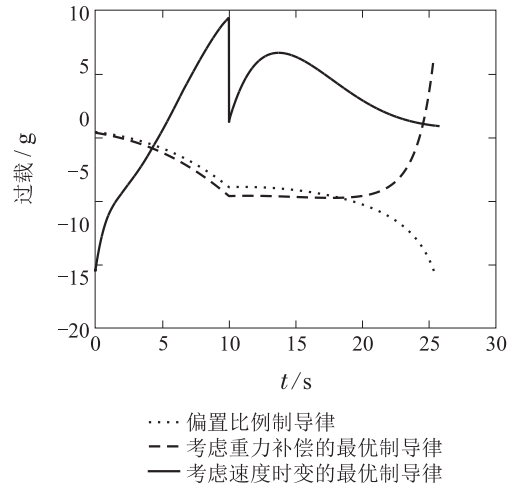


图15 过载

Fig. 15 Acceleration command of missile

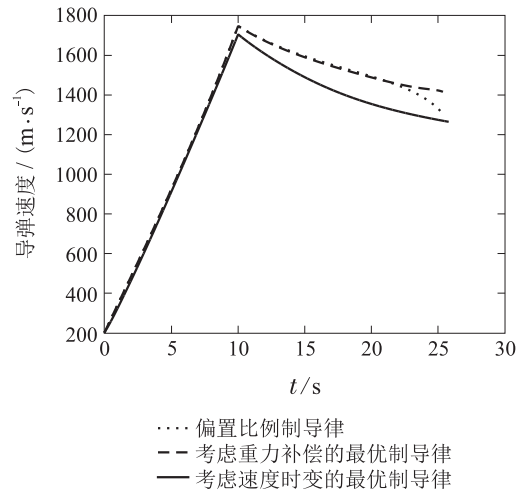


图16 导弹速度

Fig. 16 Velocity of missile

5 结论(Conclusions)

针对带角度约束的中制导律设计问题, 本文考虑导弹速度时变的情况, 运用间接高斯伪谱法设计了最优中制导律, 按照这种方法设计的中制导律不需要进行繁琐的积分运算, 计算量小, 可以实时在线运行. 仿真结果表明了该中制导律的有效性. 后续将对打击机动目标的情况进行研究.

参考文献(References):

- [1] MENG Kezi, ZHOU Di. Design of optimal midcourse guidance law with multiple constraints [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2016, 38(1): 116 – 122.
(孟克子, 周获. 多约束条件下的最优中制导律设计 [J]. *系统工程与电子技术*, 2016, 38(1): 116 – 122)
- [2] SUN Weimeng, LIU Xianghong, ZHENG Zhiqiang. Survey on the developments on the guidance law with impact angular constraints [J]. *Flight Dynamics*, 2010, 28(2): 1 – 5.
(孙未蒙, 刘湘洪, 郑志强. 多约束条件下的制导律研究综述 [J]. *飞行力学*, 2010, 28(2): 1 – 5.)

- [3] LI Qingchun, ZHANG Wensheng, HAN Gang. Re-view of terminal guidance law with terminal constraints [J]. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(1): 1 – 12.
(李庆春, 张文生, 韩刚. 终端约束条件下末端制导律研究综述 [J]. 控制理论与应用, 2016, 33(1): 1 – 12.)
- [4] GU Wenjin, LEI Junwei, PAN Changpeng. Design of the climbing trajectory using virtual target's proportional navigation method with the control of terminal azimuth of a missile [J]. *Flight Dynamics*, 2006, 24(2): 43 – 46.
(顾文锦, 雷军委, 潘长鹏. 带落角限制的虚拟目标比例导引律设计 [J]. 飞行力学, 2006, 24(2): 43 – 46.)
- [5] LEE C H, KIM T H, TAHK M J. Interception angle control guidance using proportional navigation with error feedback [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2013, 36(5): 1556 – 1561.
- [6] YAN Liang, ZHAO Jiguang, LI Yuan. Guidance law with angular constraints for head-pursuit or head-on engagement [J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2015, 41(5): 857 – 863.
(闫梁, 赵继广, 李辕. 带约束碰撞角的顺/逆轨制导律设计 [J]. 北京航空航天大学学报, 2015, 41(5): 857 – 863.)
- [7] SHIMA T. Intercept-angle guidance [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 2011, 34(2): 484 – 492.
- [8] XIONG Shaofeng, WANG Weihong, WANG Sen. Nonsingular fast terminal sliding-mode guidance with intercept angle constraint [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(3): 269 – 278.
(熊少锋, 王卫红, 王森. 带攻击角度约束的非奇异快速终端滑模制导律 [J]. 控制理论与应用, 2014, 31(3): 269 – 278.)
- [9] KUMAR S R, RAO S, GHOSE D. Nonsingular terminal sliding mode guidance with impact angle constraints [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 2014, 37(4): 1114 – 1130.
- [10] ZHOU Huibo, SONG Shenmin, LIU Haikun. Nonsingular terminal sliding mode guidance law with impact angle constraint [J]. *Journal of Chinese Inertial Technology* 2014, 22(5): 606 – 611, 618.
(周慧波, 宋申民, 刘海坤. 具有攻击角约束的非奇异终端滑模制导律设计 [J]. 中国惯性技术学报, 2014, 22(5): 606 – 611, 618.)
- [11] HOU Z, LIU L, WANG Y, et al. Terminal impact angle constraint guidance with dual sliding surface and model-free target acceleration estimator [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 2017, 25(1): 85 – 100.
- [12] ZHOU D, QU P, SUN S. A guidance law with terminal impact angle constraint accounting for missile autopilot [J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2013, 135(5): 051009.
- [13] HE S, WANG W, WANG J. Adaptive backstepping impact angle control with autopilot dynamics and acceleration saturation consideration [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017, 27(17): 3777 – 3793.
- [14] LI Shuang, JIANG Yong, LI Junlong, et al. Research on location parameters of virtual target for midcourse guidance [J]. *Modern Defense Technology*, 2013, 41(3): 48 – 52, 58.
(李爽, 江涌, 李君龙, 等. 中制导虚拟目标的定位参数研究 [J]. 现代防御技术, 2013, 41(3): 48 – 52, 58.)
- [15] ZHAO Tao, WANG Songyan, YANG Ming. Integrated multiple objectives optimal robust guidance with angular constraint [J]. *Journal of Solid Rocket Technology*, 2013, 36(1): 6 – 10.
(晁涛, 王松艳, 杨明. 带终端角度约束的多目标最优鲁棒制导方法 [J]. 固体火箭技术, 2013, 36(1): 6 – 10)
- [16] TIAN B L, ZONG Q. Optimal guidance for reentry vehicles based on indirect Legendre pseudospectral method [J]. *Acta Astronautica*, 2011, 68(78): 1176 – 1184.
- [17] ZHANG You'an, HUANG Jie, SUN Yangping. Generalized weighted optimal guidance laws with impact angle constraints [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2014, 35(3): 848 – 856.
(张友安, 黄洁, 孙阳平. 带落角约束的一般加权最优制导律 [J]. 航空学报, 2014, 35(3): 848 – 856.)
- [18] CHEN Qi, WANG Zhongyuan, CHANG Sijiang. Optimal guidance law with impact angle constraint based on indirect gauss pseudospectral method [J]. *Acta Armamentarii*, 2015, 36(7): 1203 – 1212.
(陈琦, 王中原, 常思江. 带有落角约束的间接 Gauss 伪谱最优制导律 [J]. 2015, 36(7): 1203 – 1212.)
- [19] LI Shuang, JIANG Yong, ZHANG Yiqun, et al. Research on mid-course guidance law for interceptor based on virtual target [J]. *Aerospace Control*, 2013, 31(3): 40 – 44.
(李爽, 江涌, 张奕群, 等. 基于虚拟目标的大气层内拦截弹中制导律研究 [J]. 航天控制, 2013, 31(3): 40 – 44.)
- [20] XU Xingyuan, GUO Chenxian, PAN Xiaodong, et al. An optimal guidance law with velocity rendezvous angle constraint [J]. *Electronic Optics and Control*, 2015, 22(8): 8 – 11.
(徐兴元, 郭晨鲜, 潘晓东, 等. 一种具有速度交汇角约束的最优导引律 [J]. 光电与控制, 2015, 22(8): 8 – 11.)
- [21] TAUB I, SHIMA T. Intercept angle missile guidance under time varying acceleration bounds [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2013, 36(3): 686 – 699.
- [22] PARK B G, KIM T H, TAHK M J. Range-to-go weighted optimal guidance with impact angle constraint and seeker's look angle limits [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2016, 52(3): 1241 – 1256.
- [23] WANG Xiaofang, ZHENG Yiyu, LIN Hai. Sliding mode guidance law with impact angle constraint based on disturbance observer [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2014, 36(1): 111 – 116.
(王晓芳, 郑艺裕, 林海. 基于扰动观测器的终端角约束滑模制导律 [J]. 系统工程与电子技术, 2014, 36(1): 111 – 116.)
- [24] CHO H J, RYOO C K. Closed-form optimal guidance law for missiles of time-varying velocity [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1996, 19(5): 1017 – 1022.
- [25] BENSON D A. *A Gauss pseudospectral transcription for optimal control* [D]. Cambridge: MIT, 2005.
- [26] SONG E J, TAHK M J. Real-time midcourse guidance with intercept point prediction [J]. *Control Engineering Practice*, 1998, 6(8): 957 – 967.
- [27] KIM B S, LEE J G, HAN H S. Biased PNG Law for impact with angular constraint [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1998, 34(1): 277 – 288.
- [28] HE Ying, YANG Xinmin, YI Wenjun, et al. Design of optimal guidance law for satellite guidance shell with compensation of gravity [J]. *Journal of Ballistics*, 2013, 25(2): 12 – 16.
(何颖, 杨新民, 易文俊, 等. 计及重力补偿的卫星制导炮弹最优制导律设计 [J]. 弹道学报, 2013, 25(2): 12 – 16.)

作者简介:

熊少锋 (1985–), 男, 博士, 主要从事最优制导律和制导控制一体化设计技术研究, E-mail: shepinxiong@163.com;

魏明英 (1966–), 研究员, 中国航天科工集团公司技术带头人, 中国航天科工二院首席专家, 国家“万人计划”创新领军人才, 目前担任多个重点型号的副总设计师, 获得过政府特殊津贴、航天基金奖等, E-mail: F31702@126.com;

赵明元 (1982–), 男, 高级工程师, 研究方向为飞行器制导与控制, E-mail: zhaomingyuan_0930@163.com;

熊华 (1987–), 男, 高级工程师, 主要从事智能控制及其在导航、制导中的应用技术研究, E-mail: xiong_hua_@126.com.