

# 控制方向未知的全状态约束非线性系统的鲁棒自适应跟踪控制

王春晓<sup>1,2†</sup>, 武玉强<sup>2</sup>

(1. 山东建筑大学 理学院, 山东 济南 250101; 2. 曲阜师范大学 工学院, 山东 日照 276826)

**摘要:** 针对一类控制方向未知的含时变不确定参数和未知时变有界扰动的全状态约束非线性系统, 本文提出了一种基于障碍Lyapunov函数的反步自适应控制方法. 障碍Lyapunov函数保证了系统状态在运行过程中始终保持在约束区间内; Nussbaum型函数的引入解决了系统控制方向未知的问题; 光滑投影算法确保了不确定时变参数的有界性. 障碍Lyapunov函数、Nussbaum型函数及光滑投影算法与反步自适应方法的有效结合首次解决了控制方向未知的全状态约束非线性系统的跟踪控制问题. 所设计的自适应鲁棒控制器能在满足状态约束的前提下确保闭环系统的所有信号有界. 通过恰当地选取设计参数, 系统的跟踪误差将收敛于0的任意小的邻域内. 仿真结果表明了控制方案的可行性.

**关键词:** 障碍Lyapunov函数; Nussbaum增益控制; 未知控制方向; 全状态约束; 自适应控制

**引用格式:** 王春晓, 武玉强. 控制方向未知的全状态约束非线性系统的鲁棒自适应跟踪控制. 控制理论与应用, 2018, 35(2): 153 – 161

中图分类号: TP273 文献标识码: A

## Robust adaptive tracking control for full state-constrained nonlinear systems with unknown control direction

WANG Chun-xiao<sup>1,2†</sup>, WU Yu-qiang<sup>2</sup>

(1. School of Science, Shandong Jianzhu University, Ji'nan Shandong 250101, China;  
2. Institute of Automation, Qufu Normal University, Rizhao Shandong 276826, China)

**Abstract:** To consider a class of full state-constrained nonlinear systems with completely unknown control coefficients, uncertain time-varying parameters and disturbances, a Barrier Lyapunov function (BLF) based adaptive robust control design method is proposed. BLFs are to ensure that the full state constraints be not violated, the unknown control direction is resolved effectively by the Nussbaum gain function and the boundedness of uncertain time-varying parameters is guaranteed by using the continuous projection algorithm. It is the first time that the BLF, Nussbaum gain function and continuous projection algorithm effectively combine with backstepping adaptive control to solve the tracking control problem for full state-constrained nonlinear system with unknown control direction. As shown as the control result, all the closed loop signals are bounded and full state constraints are not violated. Moreover the system output tracking error will converge to a bounded compact set of zero through select proper parameters. At last, The effectiveness of the proposed control scheme is further verified with a numerical example.

**Key words:** barrier Lyapunov function; Nussbaum gain control; unknown control direction; full state constraints; adaptive control

**Citation:** WANG Chunxiao, WU Yuqiang. Robust adaptive tracking control for full state-constrained nonlinear systems with unknown control direction. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(2): 153 – 161

### 1 引言(Introduction)

实际系统由于需要考虑安全性或执行器的物理限制、机械制造等方面原因使得控制系统中的约束是广泛存在的, 常见的约束有状态约束、输出约束及执行

器饱和等<sup>[1-4]</sup>. 如出于对汽车发动机的保护及驾乘人员舒适性、安全性的考虑, 会对汽车的加速度和速度加以限制; 平面移动机器人的工作空间是受限的, 机器人不能超限运动. 如果在控制设计过程中不考虑这

收稿日期: 2017-06-8; 录用日期: 2017-11-08.

†通信作者. E-mail: xiao2166@126.com; Tel.: +86 15165181660.

本文责任编辑: 陈杰.

国家自然科学基金项目(61673243, 61273091, 61303198), 山东省泰山学者项目(TS20120529), 中国教育部博士后基金项目(20123705110002)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61673243, 61273091, 61303198), the Project of Taishan Scholar of Shandong Province (TS20120529) and the PhD Programs Foundation of Ministry of Education of China (20123705110002).

些约束条件,依然应用原来的基于无约束条件下的控制设计方法,将造成系统性能的恶化、闭环系统不稳定,甚至设备损坏影响财产及人身安全。

近年来,约束控制系统的分析与设计问题受到人们的广泛关注,并取得了一些卓有成效的成果<sup>[5-13]</sup>。处理受约束系统的主要方法包括模型预测控制<sup>[5]</sup>、基于不变集理论的控制器设计<sup>[6-7]</sup>、无模型映射学习控制<sup>[8-9]</sup>和基于极值搜索方法的控制<sup>[10]</sup>等。此外,受重构Lyapunov函数思想的启发,障碍李雅普诺夫函数(barrier Lyapunov function, BLF)与反步法的结合已逐渐应用于含有状态和输出约束的非线性系统的控制中<sup>[1, 12-20]</sup>。Ngo等针对含状态约束的Brunovsky标准型系统,以约束区间为定义域构造Lyapunov函数,完成反演设计<sup>[14]</sup>。借鉴Ngo等人的思想,文献[15]首次给出了BLF的定义,针对严格反馈非线性系统采用基于BLF的反演设计方法,保证系统输出有界。此外,文献[16-17]分别讨论了含有部分状态约束及全状态约束的严反馈非线性系统的控制问题。文献[1]针对全状态约束的机器人系统,基于BLF设计了自适应神经网络控制器,处理了系统的不确定性和扰动。

上述基于BLF的约束非线性系统的控制均要假定控制系数已知或者至少控制方向已知。控制变量前面的控制增益的符号决定着系统的运动方向,所以称之为控制方向,它在控制器设计中具有重要作用。Nussbaum于1983年首次提出的著名Nussbaum增益技术<sup>[21]</sup>成为解决未知控制方向问题的一种重要的工具,并在自适应控制领域得到了快速发展<sup>[22-26]</sup>。文献[22]考虑了一类含有未知控制相关系数的严反馈时变不确定非线性系统的自适应鲁棒控制问题。文献[23]利用基于动态面的神经网络控制技术解决了控制方向未知的含有输入饱和的严反馈非线性系统的跟踪控制。文献[24]采用部分限幅的鲁棒自适应方法研究了一类含有未知控制方向的非线性系统。这些研究推动了控制方向未知的非线性系统的发展,然而,这些文献均没有考虑系统状态受限的问题。当控制方向未知与状态受限、未知扰动同时发生时,这给控制器的设计提出了新的挑战。文献[25]在假定未知控制增益及不确定参数都是常数的前提下,讨论了控制方向未知的不确定全状态约束非线性系统的自适应控制设计。对于更有挑战性的时变未知增益、时变不确定参数以及时变未知扰动的情况并未涉及。

基于以上观察,本文采用自适应反演控制方法研究了一类含有未知控制方向及未知扰动的不确定非线性全状态约束系统,主要创新概括如下:

1) 传统的基于BLF的反演自适应方法不能解决控制方向未知和状态受限的双重问题,本文通过引入Nussbaum增益函数,采用新的反演技术设计出有效的控制律,使得在满足状态约束的前提下闭环系统的所有信号有界。

2) 所研究的系统含有时变不确定参数和完全未

知的非线性控制系数,我们将两者集结在一起构造新的向量,利用光滑投影算法设计统一的自适应律保证了不确定时变参数的有界性。

3) 对于时变扰动,只需要假设它有界,而在控制器的设计中无需用到该界限,就可达到扰动衰减。

## 2 问题描述及预备知识 (Problem description and preliminaries)

### 2.1 问题描述(Problem description)

考虑一类含有未知控制系数和不确定参数的严反馈非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_i = g_i(\bar{x}_i)x_{i+1} + \theta_i^T(t)\psi_i(\bar{x}_i) + d_i^T(t)\phi_i(\bar{x}_i), \\ \dot{x}_n = g_n(\bar{x}_n)u + \theta_n^T(t)\psi_n(\bar{x}_n) + d_n^T(t)\phi_n(\bar{x}_n), \\ y = x_1, i = 1, 2, \dots, n-1, \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\bar{x}_i = (x_1 \cdots x_i)^T \in \mathbb{R}^i$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$  分别为系统的状态向量、控制输入以及系统输出;  $g_i(\bar{x}_i) \neq 0$  为有界的不确定非线性分段光滑函数,代表了系统的未知控制方向; 不确定时变参数向量  $\theta_i(t) \in \Omega_i \subset \mathbb{R}^m$ , 其中:  $\Omega_i$  是以原点为圆心,  $r_{\Omega_i}$  为半径的闭球域;  $d_i(t) \in \mathbb{R}^m$  为未知时变有界扰动向量,  $\psi_i, \phi_i$  为已知的适当维度的非线性函数。

本文的控制目标为: 针对非线性系统(1), 设计自适应鲁棒控制律, 使得: a) 系统的输出跟踪误差收敛于一个以原点为中心的小邻域内; b) 闭环系统所有信号有界; c) 满足状态约束条件:  $|x_i| < k_{c_i}$ ,  $k_{c_i}$  为已知的正常数 ( $i = 1, \dots, n$ )。

为达到控制目标, 做如下假设:

**假设 1** 系统输出跟踪信号  $y_d(t)$  连续  $n$  阶可微, 满足  $|y_d^{(i)}(t)| \leq Y_i$ ,  $Y_i$  为正常数,  $i = 0, \dots, n$ 。

**假设 2** 假设控制系数  $g_i(\bar{x}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  是时变有界的,  $g_i(\bar{x}_i) \neq 0$  且控制系数符号未知。

**注 1**  $g_i(\bar{x}_i)$  代表了系统的控制方向, 在已有文献中大部分都假定控制相关系数  $g_i(\bar{x}_i)$  已知且符号固定<sup>[12, 15-17]</sup>, 或者  $g_i(\bar{x}_i)$  未知但至少控制方向已知<sup>[13, 19]</sup>。本文首次探讨了未知时变控制相关系数的状态约束控制问题, 当未知参数  $\theta_i(t)$  和未知控制相关系数  $g_i(\bar{x}_i)$  均为未知常数, 并且扰动消失, 即  $d_i(t) = 0$ , 则系统(1)即为文献[25]中所讨论的严格反馈系统。所以, 模型(1)更具一般性。

### 2.2 预备知识(Preliminaries)

Nussbaum函数增益方法可用于处理不确定系统的控制系数或虚拟控制系数符号未知的问题, 为此, 首先给出Nussbaum函数的定义及相关引理。

**定义 1**<sup>[21]</sup> 如果连续函数  $N(\zeta)$  满足

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r N(\zeta) d\zeta = +\infty, \quad (2)$$

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r N(\zeta) d\zeta = -\infty, \quad (3)$$

则称之为Nussbaum型函数.

常见的 Nussbaum 型函数有  $\exp(\zeta^2) \cos((\pi/2)\zeta)$ ,  $\zeta^2 \cos \zeta$  等, 本文中, 定义  $N(\zeta) = \zeta^2 \cos \zeta$ .

**引理 1**<sup>[22]</sup>  $V(\cdot)$  和  $\zeta(\cdot)$  为定义在  $[0, t_f]$  上的光滑函数, 且  $\forall t \in [0, t_f), V(t) \geq 0, N(\cdot)$  为 Nussbaum 型偶函数. 如果

$$V(t) \leq c_0 + e^{-c_1 t} \int_0^t (g(\cdot)N(\zeta)\dot{\zeta} + \dot{\zeta})e^{c_1 \tau} d\tau, \quad (4)$$

式中:  $c_1 > 0, c_0$  为适当的常数,  $g(\cdot)$  为有界的时变参数, 且  $g(\cdot) \neq 0$ , 则  $V(t), \zeta(t)$  以及  $\int_0^t g(\cdot)N(\zeta)\dot{\zeta} d\tau$  在  $[0, t_f]$  上有界.

**引理 2**<sup>[27]</sup> 对于任意的  $|S_1| < k_{b_1}$ , 有如下不等式成立:

$$\log\left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - S_1^2}\right) \leq \frac{S_1^2}{k_{b_1}^2 - S_1^2}. \quad (5)$$

**定义 2**<sup>[28]</sup> 令  $\theta \in \Omega$  是未知时变参数向量,  $\hat{\theta}$  是  $\theta$  的估计量,  $\Omega \subset \mathbb{R}^p$  是一个半径为  $r_\omega$  的已知闭球域. 定义投影算子如下:

$$\text{Proj}(y, \hat{\theta}) = \begin{cases} y, & \text{如果 } p(\hat{\theta}) \leq 0, \\ y, & \text{如果 } p(\hat{\theta}) \geq 0 \text{ 且 } \frac{\partial p}{\partial \hat{\theta}} y \leq 0, \\ y - \frac{p(\hat{\theta}) \frac{\partial p}{\partial \hat{\theta}} y}{\left\| \frac{\partial p}{\partial \hat{\theta}} \right\|^2} \frac{\partial p}{\partial \hat{\theta}}, & \text{其他,} \end{cases} \quad (6)$$

式中:  $p(\hat{\theta}) = (\hat{\theta}^T \hat{\theta} - r_\Omega^2)/(\epsilon^2 + 2\epsilon r_\Omega)$ ,  $\epsilon$  是一个任意的正实数. 从式(6)可看出, 如果  $\hat{\theta}(0) \in \Omega$ , 则有如下性质成立:

- 1)  $\|\hat{\theta}(t)\| \leq r_\Omega + \epsilon, \forall t \geq 0$ ;
- 2)  $\|\text{Proj}(y, \hat{\theta})\| \leq \|y\|$ ;
- 3)  $\hat{\theta}^T \text{Proj}(y, \hat{\theta}) \geq \hat{\theta}^T y$ , 其中  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ .

### 3 自适应鲁棒控制器设计 (Adaptive robust controller design)

为了方便表示, 在不引起歧义的前提下, 本文将省略时间  $t$ . 设计过程由  $n$  步组成, 为了完成鲁棒控制器的设计, 首先做如下坐标变换:

$$S_1 = x_1 - y_d, \quad (7)$$

$$S_i = x_i - \alpha_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n, \quad (8)$$

其中:  $y_d$  为系统的输出跟踪信号,  $S_1$  为系统跟踪误差,  $S_i (i = 2, \dots, n)$  称为虚拟状态跟踪误差,  $\alpha_{i-1}$  为虚拟控制函数. 所有的虚拟控制函数  $\alpha_{i-1}$  要求有界:  $|\alpha_{i-1}| \leq \bar{\alpha}_{i-1,0}, \bar{\alpha}_{i-1,0}$  为正常数并且要求满足  $k_{c_i} > \bar{\alpha}_{i-1,0}$ , 具体的设计过程将在第3节的第  $i$  步中给出详细的说明.

为了保证系统的状态约束, 定义如下对数形式的障碍 Lyapunov 函数:

$$V_i = \frac{1}{2} \log\left(\frac{k_{b_i}^2}{k_{b_i}^2 - S_i^2}\right), |S_i(0)| < k_{b_i}, \quad (9)$$

其中:  $S_i \in \Omega_s := \{S_i \in \mathbb{R}, |S_i| < k_{b_i}, \forall t \geq 0\}, k_{b_1} = k_{c_1} - Y_0 > 0, k_{b_i} = k_{c_i} - \bar{\alpha}_{i-1,0} > 0, i = 2, \dots, n$ .

为了方便讨论, 构造新的未知参量:

$$\theta_{a,1} = \theta_1, \theta_{a,i} = [g_{i-1} \ \theta_i^T]^T, \quad i = 2, \dots, n.$$

$\hat{\theta}_{a,1}$  是  $\theta_{a,1}$  的参数估计, 根据投影算子(6)的定义, 给出未知参量  $\theta_{a,i}$  的自适应律:

$$\dot{\hat{\theta}}_{a,i} = \gamma \text{Proj}\left(\frac{S_i \psi_{a,i}}{k_{b_i}^2 - S_i^2}, \hat{\theta}_{a,i}\right), \quad (10)$$

其中:  $\gamma > 0$  为设计参数,  $\psi_{a,i}$  为已知的向量函数. 定义

$$\tilde{\theta}_{a,i} = \theta_{a,i} - \hat{\theta}_{a,i}, d_{a,i} = [d_1^T \ \dots \ d_n^T]^T,$$

$$d_{b,i} = d_{a,i}^T d_{a,i} + \sum_{j=1}^i \tilde{\theta}_{a,j}^T \tilde{\theta}_{a,j},$$

$$i = 1, \dots, n.$$

**Step 1** 首先考虑系统(1)的第 1 个子系统, 依式(7)–(8), 对  $S_1$  求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{y}_d = \\ &g_1(x_1)(S_2 + \alpha_1) + \theta_1^T \psi_1(x_1) + d_1^T \phi_1(x_1) - \dot{y}_d. \end{aligned} \quad (11)$$

引入障碍 Lyapunov 函数  $V_1 = \frac{1}{2} \log\left(\frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - S_1^2}\right)$  并求导数:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{S_1}{k_{b_1}^2 - S_1^2} (g_1(S_2 + \alpha_1) + \theta_1^T \psi_1(x_1) + \\ &d_1^T \phi_1(x_1) - \dot{y}_d). \end{aligned} \quad (12)$$

因为控制方向未知, 引入 Nussbaum 型函数构造虚拟控制  $\alpha_1$ :

$$\alpha_1 = N(\zeta_1) \eta_1, \quad (13)$$

$$\eta_1 = \frac{K_1 S_1}{2} + \hat{\theta}_{a,1}^T \psi_{a,1} - \dot{y}_d + \frac{S_1}{2(k_{b_1}^2 - S_1^2)} + \varpi_1,$$

$$\varpi_1 = \frac{k S_1}{4(k_{b_1}^2 - S_1^2)} (\psi_{a,1}^T \psi_{a,1} + \phi_{a,1}^T \phi_{a,1}),$$

$$\dot{\zeta}_1 = \frac{S_1 \eta_1}{k_{b_1}^2 - S_1^2}, \quad (14)$$

其中:  $\psi_{a,1} = \psi_1, \phi_{a,1} = \phi_1$ . 将式(13)代入式(12), 并在式(12)的右边分别加、减  $\dot{\zeta}_1$ , 整理得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \\ &\frac{g_1 S_1 S_2}{k_{b_1}^2 - S_1^2} + g_1 N(\zeta_1) \dot{\zeta}_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 + \frac{S_1}{k_{b_1}^2 - S_1^2} \tilde{\theta}_{a,1}^T \psi_{a,1} + \frac{S_1}{k_{b_1}^2 - S_1^2} d_{a,1}^T \phi_{a,1} - \\ \frac{K_1 S_1^2}{2(k_{b_1}^2 - S_1^2)} - \frac{S_1^2}{2(k_{b_1}^2 - S_1^2)^2} - \\ \frac{k S_1^2}{4(k_{b_1}^2 - S_1^2)^2} (\psi_{a,1}^T \psi_{a,1} + \phi_{a,1}^T \phi_{a,1}). \end{aligned} \quad (15)$$

利用Young's不等式,有如下不等式成立:

$$\frac{g_1 S_1 S_2}{k_{b_1}^2 - S_1^2} \leq \frac{S_1^2}{2(k_{b_1}^2 - S_1^2)^2} + \frac{g_1^2 S_2^2}{2}, \quad (16)$$

$$\frac{S_1}{k_{b_1}^2 - S_1^2} \tilde{\theta}_{a,1}^T \psi_{a,1} - \frac{k S_1^2}{4(k_{b_1}^2 - S_1^2)^2} \psi_{a,1}^T \psi_{a,1} \leq \frac{\tilde{\theta}_{a,1}^T \tilde{\theta}_{a,1}}{k}, \quad (17)$$

$$\frac{S_1}{k_{b_1}^2 - S_1^2} d_{a,1}^T \phi_{a,1} - \frac{k S_1^2}{4(k_{b_1}^2 - S_1^2)^2} \phi_{a,1}^T \phi_{a,1} \leq \frac{d_{a,1}^T d_{a,1}}{k}. \quad (18)$$

将不等式(16)–(18)代入到式(15)中,由引理2可得如下结果:

$$\dot{V}_1 \leq -K_1 V_1 + (g_1 N(\zeta_1) + 1) \dot{\zeta}_1 + \frac{g_1^2 S_2^2}{2} + \frac{d_{b,1}}{k}. \quad (19)$$

对式(19)两端同乘以 $e^{K_1 t}$ ,在 $[0, t]$ 上积分,得

$$\begin{aligned} V_1(t) \leq \\ e^{-K_1 t} V_1(0) + e^{-K_1 t} \int_0^t (g_1 N(\zeta_1) + 1) \dot{\zeta}_1 e^{K_1 \tau} d\tau + \\ \int_0^t \frac{d_{b,1}}{k} e^{-K_1(t-\tau)} d\tau + \int_0^t \frac{g_1^2 S_2^2}{2} e^{-K_1(t-\tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (20)$$

由于在自适应律(10)中使用了投影算法,保证了参数估计量 $\hat{\theta}_{a,1}(t)$ 有界,因此 $\tilde{\theta}_{a,1}(t)$ 有界;另一方面,扰动项 $d_{a,1}$ 也是有界的,从而 $d_{b,1}$ 有界.所以积分项 $\int_0^t \frac{d_{b,1}}{k} e^{-K_1(t-\tau)} d\tau$ 有界.于是,只要式(20)最后一项 $\int_0^t \frac{g_1^2 S_2^2}{2} e^{-K_1(t-\tau)} d\tau$ 有界,由引理1即可得出 $V_1(t)$ ,  $\zeta_1(t)$ 以及 $\int_0^t g_1(\cdot) N(\zeta_1) \dot{\zeta}_1 d\tau$ 在 $[0, t]$ 上均有界,从而 $S_1(t)$ 有界.所以问题归结为需保证 $S_2$ 有界,而 $S_2$ 的有界性将在Step 2中讨论.

**Step i** ( $2 \leq i \leq n-1$ ) 考虑第*i*个子系统:

$$\begin{aligned} \dot{S}_i = \dot{x}_i - \dot{\alpha}_{i-1} = \\ g_i(S_{i+1} + \alpha_i) + \theta_i^T \psi_i + d_i^T \phi_i - \dot{\alpha}_{i-1}, \end{aligned} \quad (21)$$

其中:

$$\dot{\alpha}_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} (g_j x_{j+1} + \theta_j^T \psi_j + d_j^T \phi_j) - \beta_{i-1}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \beta_{i-1} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}_{a,j}} \dot{\hat{\theta}}_{a,j} - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y_d^{(j)}} y_d^{(j+1)} - \\ \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \zeta_{i-1}} \dot{\zeta}_{i-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

引入障碍Lyapunov函数 $V_i$ 并求导数,则

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = \\ \frac{S_i}{k_{b_i}^2 - S_i^2} [g_i(S_{i+1} + \alpha_i) + \theta_i^T \psi_i + d_i^T \phi_i - \\ \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} (g_j x_{j+1} + \theta_j^T \psi_j + d_j^T \phi_j) + \beta_{i-1}]. \end{aligned} \quad (24)$$

为了更方便的估计未知参量,定义如下新的向量( $i = 2, \dots, n$ ):

$$\begin{aligned} \phi_{a,i} &= [-\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_1} \phi_1^T \quad \dots \quad -\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_{i-1}} \phi_{i-1}^T \quad \phi_i^T]^T, \\ \psi_{a,i} &= [-\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_{i-1}} x_i \quad \psi_i^T]^T, \\ \psi_{j,i} &= [-\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_{j-1}} x_j \quad -\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} \psi_j^T]^T, \quad 2 \leq j \leq i-1, \\ \psi_{1,i} &= -\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_1} \psi_1. \end{aligned}$$

借助于这些新的向量,式(24)可表示为

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = \frac{g_i S_i S_{i+1}}{k_{b_i}^2 - S_i^2} + \frac{g_i S_i \alpha_i}{k_{b_i}^2 - S_i^2} + \frac{S_i d_{a,i}^T \phi_{a,i}}{k_{b_i}^2 - S_i^2} + \\ \frac{S_i \theta_{a,i}^T \psi_{a,i}}{k_{b_i}^2 - S_i^2} + \frac{S_i}{k_{b_i}^2 - S_i^2} \sum_{j=1}^{i-1} \theta_{a,j}^T \psi_{j,i} + \\ \frac{S_i \beta_{i-1}}{k_{b_i}^2 - S_i^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

于是,可以定义虚拟控制律如下:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= N(\zeta_i) \eta_i, \\ \eta_i &= \frac{K_i S_i}{2} + \hat{\theta}_{a,i}^T \psi_{a,i} + \sum_{j=1}^{i-1} \hat{\theta}_{a,j}^T \psi_{j,i} + \beta_{i-1} + \\ &\quad \frac{S_i}{2(k_{b_i}^2 - S_i^2)} + \varpi_i, \\ \varpi_i &= \frac{k S_i}{4(k_{b_i}^2 - S_i^2)} (\psi_{a,i}^T \psi_{a,i} + \phi_{a,i}^T \phi_{a,i} + \sum_{j=1}^{i-1} \psi_{j,i}^T \psi_{j,i}), \\ \dot{\zeta}_i &= \frac{S_i \eta_i}{k_{b_i}^2 - S_i^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

将虚拟控制律 $\alpha_i$ 代入式(25)中,并在等式(25)右边分别加、减 $\dot{\zeta}_i$ ,得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = \\ \frac{g_i S_i S_{i+1}}{k_{b_i}^2 - S_i^2} + g_i N(\zeta_i) \dot{\zeta}_i + \dot{\zeta}_i - \frac{K_i S_i^2}{2(k_{b_i}^2 - S_i^2)} + \\ \frac{S_i}{k_{b_i}^2 - S_i^2} (\tilde{\theta}_{a,i}^T \psi_{a,i} + \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{\theta}_{a,j}^T \psi_{j,i} + d_{a,i}^T \phi_{a,i}) - \\ \frac{k S_i^2}{4(k_{b_i}^2 - S_i^2)^2} (\psi_{a,i}^T \psi_{a,i} + \sum_{j=1}^{i-1} \psi_{j,i}^T \psi_{j,i} + \end{aligned}$$

$$\phi_{a,i}^T \phi_{a,i} - \frac{S_i^2}{2(k_{b_i}^2 - S_i^2)^2}. \quad (28)$$

和Step 1一样, 利用Young's不等式, 式(28)可转化为

$$\dot{V}_i \leq \frac{g_i S_{i+1}^2}{2} + g_i N(\zeta_i) \dot{\zeta}_i + \dot{\zeta}_i - \frac{K_i S_i^2}{2(k_{b_i}^2 - S_i^2)} + \frac{d_{b,i}}{k}. \quad (29)$$

由引理2, 上述不等式可进一步表示为

$$\dot{V}_i \leq -K_i V_i + g_i N(\zeta_i) \dot{\zeta}_i + \dot{\zeta}_i + \frac{g_i S_{i+1}^2}{2} + \frac{d_{b,i}}{k}. \quad (30)$$

可以看出, 式(30)和式(19)有相同的结构, 所以, 采用和式(19)相同的处理方法, 问题转化为只要 $S_{i+1}$ 有界就可以保证 $V_i(t)$ ,  $\zeta_i(t)$ 以及 $\int_0^t g_i(\cdot)N(\zeta_i)\dot{\zeta}_i d\tau$ 在 $[0, t)$ 上均有界, 从而 $S_i(t)$ 有界.

**Step n** 考虑变换后的第 $n$ 个子系统:

$$\begin{aligned} \dot{S}_n &= \dot{x}_n - \dot{\alpha}_{n-1} = \\ g_n u + \theta_n^T \psi_n + d_n^T \phi_n - \dot{\alpha}_{n-1}, \end{aligned} \quad (31)$$

其中:

$$\dot{\alpha}_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} (g_j x_{j+1} + \theta_j^T \psi_j + d_j^T \phi_j) - \beta_{n-1}, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \beta_{n-1} &= - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\theta}_{a,j}} \dot{\hat{\theta}}_{a,j} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y_d^{(j)}} y_d^{(j+1)} - \\ &\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \zeta_{n-1}} \dot{\zeta}_{n-1}. \end{aligned} \quad (33)$$

引入障碍Lyapunov函数 $V_n$ , 并求导数, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \\ &\frac{S_n}{k_{b_n}^2 - S_n^2} [g_n u + \theta_n^T \psi_n + d_n^T \phi_n + \beta_{n-1} - \\ &\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} (g_j x_{j+1} + \theta_j^T \psi_j + d_j^T \phi_j)]. \end{aligned} \quad (34)$$

利用新的向量 $d_{a,n}$ ,  $\phi_{a,n}$ ,  $\theta_{a,n}$ ,  $\psi_{a,n}$ 以及 $\psi_{j,n}$ , 式(34)可进一步表示为

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \\ &\frac{g_n S_n u}{k_{b_n}^2 - S_n^2} + \frac{S_n d_{a,n}^T \phi_{a,n}}{k_{b_n}^2 - S_n^2} + \frac{S_n \theta_{a,n}^T \psi_{a,n}}{k_{b_n}^2 - S_n^2} + \\ &\frac{S_n}{k_{b_n}^2 - S_n^2} \sum_{j=1}^{n-1} \theta_{a,j}^T \psi_{j,n} + \frac{S_n \beta_{n-1}}{k_{b_n}^2 - S_n^2}. \end{aligned} \quad (35)$$

采用和前面 $n-1$ 步类似的方法, 可以设计如下形式的鲁棒控制律:

$$u = N(\zeta_n) \eta_n, \quad (36)$$

$$\eta_n = \frac{K_n S_n}{2} + \hat{\theta}_{a,n}^T \psi_{a,n} + \sum_{j=1}^{n-1} \hat{\theta}_{a,j}^T \psi_{j,n} + \beta_{n-1} + \varpi_n,$$

$$\varpi_n = \frac{k S_n}{4(k_{b,n}^2 - S_n^2)} (\psi_{a,n}^T \psi_{a,n} + \phi_{a,n}^T \phi_{a,n} +$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \psi_{j,n}^T \psi_{j,n}),$$

$$\dot{\zeta}_n = \frac{S_n \eta_n}{k_{b,n}^2 - S_n^2}. \quad (37)$$

将控制律 $u$ 代入式(35), 在等式(35)右边分别加减 $\dot{\zeta}_n$ , 再次利用Young's不等式及引理2, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq \frac{K_n S_n^2}{2(k_{b,n}^2 - S_n^2)} + g_n N(\zeta_n) \dot{\zeta}_n + \dot{\zeta}_n + \frac{d_{b,n}}{k} \leq \\ &- K_n V_n + g_n N(\zeta_n) \dot{\zeta}_n + \dot{\zeta}_n + \frac{d_{b,n}}{k}. \end{aligned} \quad (38)$$

式(38)两端同乘以 $e^{K_n t}$ , 并在 $[0, t]$ 上求积分, 则

$$\begin{aligned} V_n(t) &\leq \\ &e^{-K_n t} V_n(0) + \int_0^t \frac{d_{b,n}}{k} e^{-K_n(t-\tau)} d\tau + \\ &\int_0^t (g_n N(\zeta_n) + 1) \dot{\zeta}_n e^{-K_n(t-\tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (39)$$

自适应律中的投影算法保证了参数估计向量 $\hat{\theta}_{a,i}(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ )有界, 因此 $\tilde{\theta}_{a,i}(t)$ 有界; 另外, 扰动项 $d_{a,i}$ 也是有界的, 从而 $d_{b,n}$ 有界, 所以可得出积分项 $\int_0^t \frac{d_{b,n}}{k} e^{-K_n(t-\tau)} d\tau$ 有界. 根据引理1可知,  $V_n(t)$ ,  $\zeta_n(t)$ 以及 $\int_0^t g_n(\tau)N(\zeta_n)\dot{\zeta}_n d\tau$ 在 $[0, t)$ 上均有界, 从而 $S_n(t)$ 有界, 且 $|S_n| < k_{b,n}$ .

因为 $S_n$ 有界, 所以 $\int_0^t g_{n-1}^2 S_n^2 e^{-K_{n-1}(t-\tau)} d\tau$ 有界,

由引理1,  $V_{n-1}(t)$ ,  $\int_0^t g_{n-1}(\tau)N(\zeta_{n-1})\dot{\zeta}_{n-1} d\tau$ 及 $\zeta_{n-1}(t)$ 在 $[0, t)$ 上均有界, 从而 $S_{n-1}$ 有界. 以此类推, 重复利用引理1  $n-1$ 次, 可得 $V_i(t)$ ,  $\zeta_i(t)$ 以及 $\int_0^t g_i(\cdot)N(\zeta_i)\dot{\zeta}_i d\tau$ 在 $[0, t)$ 上对于 $i = 1, \dots, n$ 均有界, 从而 $S_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )有界, 且 $|S_i| < k_{b_i}$ . 由式(13) (26)和(36), 可以得到虚拟控制律 $\alpha_i$ 以及实际控制律 $u$ 均有界.

基于上述设计过程, 可得如下定理.

**定理 1** 对于带有完全未知有界控制系数 $g_i(\cdot)$ , 时变不确定参数 $\theta_i(t) \in \Omega_i$ 和未知有界扰动 $d_i(t)$ 的严反馈非线性系统(1), 如果满足假设条件1-2, 并且满足初值条件 $\theta_i(0) \in \Omega_i$ ,  $|x_i(0)| < k_{c_i}$ . 应用上述设计过程, 通过选取恰当的参数 $\gamma > 0$ ,  $K_i > 0$ ,  $k > 0$ , 则由系统(1)、未知参数自适应律(10)、虚拟控制律(13) (26)以及实际控制律(36)构成的闭环系统具有如下性能:

- 1) 闭环系统的所有信号有界;
- 2) 状态始终满足约束条件:  $|x_i(t)| < k_{c_i}, \forall t \geq 0$ ;
- 3) 系统输出跟踪误差收敛于0的邻域内:  $|S_1| \leq k_{b_1} \sqrt{1 - e^{-2C_1}}$ .

**证** 1) 在Steps 1- $n$ 的设计过程中已经证明了闭环系统的所有信号均有界;

2) 由  $S_1 = x_1 - y_d, |y_d| \leq Y_0$ , 知

$$|x_1| \leq |S_1| + |y_d| < k_{b_1} + Y_0.$$

所以, 只要令  $k_{b_1} = k_{c,1} - Y_0$  就有  $|x_1| < k_{c,1}$  成立. 由式(13)知,  $\alpha_1$  是关于  $S_1, x_1, \dot{y}_d$  和  $\hat{\theta}_{a,1}$  的函数. 而  $|S_1| < k_{b_1}, |x_1| < k_{c,1}, |\dot{y}_d| \leq Y_1, |\hat{\theta}_{a,1}| \leq r_{\Omega_1}$ , 所以  $\alpha_1$  有界. 即存在常数  $\bar{\alpha}_{1,0} > 0$ , 使得  $|\alpha_1| \leq \bar{\alpha}_{1,0}$ . 选取适当的参数  $\gamma > 0, K_1 > 0, k > 0$  使得  $\bar{\alpha}_{1,0} + k_{b_2} < k_{c_2}$ . 于是,

$$|x_2| \leq |S_2| + |\alpha_1| < k_{b_2} + \bar{\alpha}_{1,0} < k_{c_2}$$

成立. 类似地, 可以证明  $|x_i| < k_{c_i}, i = 1, \dots, n$  成立. 即所有的状态均满足约束条件.

3) 由式(20),

$$V_1(t) \leq e^{-K_1 t} V_1(0) + e^{-K_1 t} \int_0^t (g_1 N(\zeta_1) + 1) \dot{\zeta}_1 e^{K_1 \tau} d\tau + \int_0^t \frac{d_{b,1}}{k} e^{-K_1(t-\tau)} d\tau + \int_0^t \frac{g_1^2 S_2^2}{2} e^{-K_1(t-\tau)} d\tau.$$

而由前面的讨论知, 上式中的积分项均有界. 不妨设

$$e^{-K_1 t} \int_0^t (g_1 N(\zeta_1) + 1) \dot{\zeta}_1 e^{K_1 \tau} d\tau + \int_0^t \frac{d_{b,1}}{k} e^{-K_1(t-\tau)} d\tau + \int_0^t \frac{g_1^2 S_2^2}{2} e^{-K_1(t-\tau)} d\tau \leq C_1,$$

则有

$$V_1(t) \leq e^{-K_1 t} V_1(0) + C_1, \tag{40}$$

进而

$$\log \frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - S_1^2} \leq 2e^{-K_1 t} V_1(0) + 2C_1. \tag{41}$$

所以,

$$|S_1| \leq k_{b_1} \sqrt{1 - e^{-2V_1(0)e^{-K_1 t} - 2C_1}}. \tag{42}$$

当  $t \rightarrow \infty$  时, 有  $|S_1| \leq k_{b_1} \sqrt{1 - e^{-2C_1}}$ , 显然, 通过选取适当的参数, 系统输出跟踪误差  $S_1$  可以任意小.

证毕.

### 4 算例与仿真(Example and simulation)

本节利用两个例子来验证本文所提出的自适应鲁棒控制算法的有效性.

**例 1** 考虑如下二阶非线性系统<sup>[23]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g_1(x_1)x_2 + \theta_1^T(t)x_1 + d_1(t), \\ \dot{x}_2 = g_2(\bar{x}_2)u + \theta_2^T(t)x_1x_2 + d_2(t), \\ y = x_1, \end{cases} \tag{43}$$

其中:  $g_1(x_1) = 1 + 0.1x_1^2, g_2(\bar{x}_2) = 0.5 + \cos(x_1x_2^2); \theta_1(t), \theta_2(t)$  为不确定参数;  $d_1(t) = 0.05 \sin t, d_2(t) = 0.1 \sin t$  代表了时变的扰动向量. 显然, 系统(43)中,  $\phi_1 = \phi_2 = 1, \psi_1 = x_1, \psi_2 = x_1x_2^2$ . 本例的控制目标为设计鲁棒自适应控制律, 使得: 1) 闭环系统的所有信号有界; 2) 系统状态满足约束条件:  $|x_1| < k_{c,1}$

$= 1.5, |x_2| < k_{c_2} = 3$ ; 3) 系统输出跟踪误差收敛于 0 的小邻域内, 其中跟踪目标函数  $y_d(t) = 0.5 \sin t - 0.5 \cos(2t)$ .

根据第 3 节所给出的设计过程, 引入障碍 Lyapunov 函数  $V_1 = \frac{1}{2} \log \frac{k_{b_1}^2}{k_{b_1}^2 - S_1^2}$ , 其中

$$k_{b_1} = k_{c,1} - Y_0 = 0.5.$$

设计虚拟控制律:

$$\alpha_1 = N(\zeta_1)\eta_1, \tag{44}$$

$$\eta_1 = \frac{K_1 S_1}{2} + \hat{\theta}_1^T \psi_1 - \dot{y}_d + \frac{S_1}{2(k_{b_1}^2 - S_1^2)} + \varpi_1,$$

$$\varpi_1 = \frac{k S_1}{4(k_{b_1}^2 - S_1^2)} (\psi_1^2 + \phi_1^2),$$

$$\dot{\zeta}_1 = \frac{S_1 \eta_1}{k_{b_1}^2 - S_1^2}, \tag{45}$$

其中  $\hat{\theta}_1$  是未知参数  $\theta_1$  的估计量, 并利用投影算子设计其自适应律:

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma \text{Proj} \left( \frac{S_1 \psi_{a,1}}{k_{b_1}^2 - S_1^2}, \hat{\theta}_1 \right). \tag{46}$$

为了仿真需要, 设初值  $x_1(0) = -0.1, x_2(0) = -0.5, \theta_1(0) = 0.5, \theta_2(0) = 1$ ; 选取适当的参数  $K_1 = K_2 = 10, k = 0.1, \gamma = 0.5, \epsilon = 0.01, r_{\Omega_1} = r_{\Omega_2} = 2$ . 利用 MATLAB 可得到  $\bar{\alpha}_{1,0} = 2.277$ , 从而  $k_{b_2} = 0.723$ . 定义障碍 Lyapunov 函数,

$$V_2 = \frac{1}{2} \log \frac{k_{b_2}^2}{k_{b_2}^2 - S_2^2},$$

设计自适应鲁棒控制律如下:

$$u = N(\zeta_2)\eta_2, \tag{47}$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 S_2}{2} + \hat{\theta}_{a,2}^T \psi_{a,2} + \hat{\theta}_1^T \psi_{1,2} + \beta_1 + \varpi_2,$$

$$\beta_1 = -\frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}_1} \dot{\hat{\theta}}_1 - \sum_{j=0}^1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_d^{(j)}} y_d^{(j+1)} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \zeta_1} \dot{\zeta}_1,$$

$$\varpi_2 = \frac{k S_2}{4(k_{b_2}^2 - S_2^2)} (\psi_{a,2}^T \psi_{a,2} + \phi_{a,2}^T \phi_{a,2} + \psi_{1,2}^T \psi_{1,2}),$$

$$\dot{\zeta}_2 = \frac{S_2 \eta_2}{k_{b_2}^2 - S_2^2}, \tag{48}$$

其中:  $\phi_{a,2} = [-\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1 \ \phi_2]^T, \psi_{a,2} = [-\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 \ \psi_2]^T,$

$\theta_{a,2} = [g_1 \ \theta_2]^T, \psi_{1,2} = -\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \psi_1$ .  $\hat{\theta}_{a,2}$  是  $\theta_{a,2}$  的估计量; 同样利用投影算子设计其自适应律来保证未知参量的有界性,

$$\dot{\hat{\theta}}_{a,2} = \gamma \text{Proj} \left( \frac{S_2 \psi_{a,2}}{k_{b_2}^2 - S_2^2}, \hat{\theta}_{a,2} \right). \tag{49}$$

至此, 原系统(43)、虚拟控制律和实际控制律(44)(47)以及参数自适应律(46)(49)共同构成了闭环系统, 仿真结果如图1-6所示.

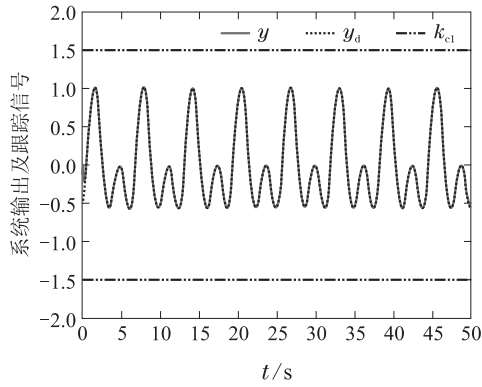


图 1 系统的实际输出  $y$  及跟踪目标  $y_d$

Fig. 1 System actual output  $y$  and tracking objective  $y_d$

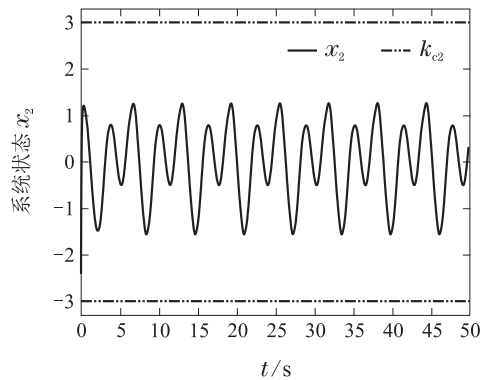


图 2 系统的状态轨迹  $x_2$

Fig. 2 The trajectory of state  $x_2$

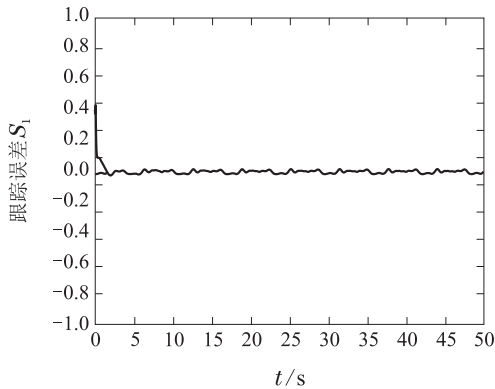


图 3 系统的输出跟踪误差  $S_1$

Fig. 3 The trajectory of output tracking error  $S_1$

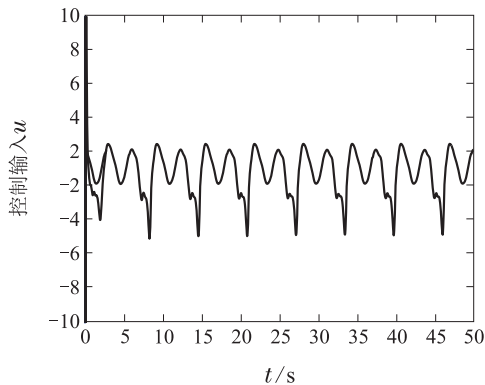


图 4 系统的控制输入轨迹  $u$

Fig. 4 The trajectory of control input  $u$

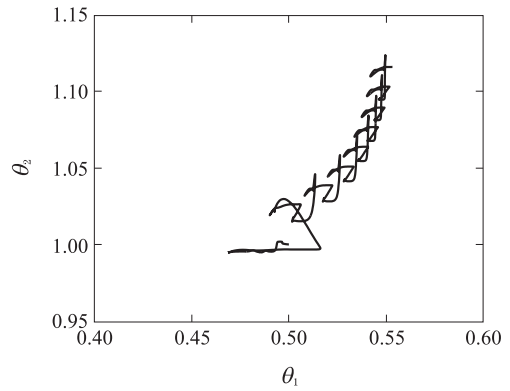


图 5 自适应参数  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  的相位图

Fig. 5 Phase portrait of  $\hat{\theta}_1$  and  $\hat{\theta}_2$

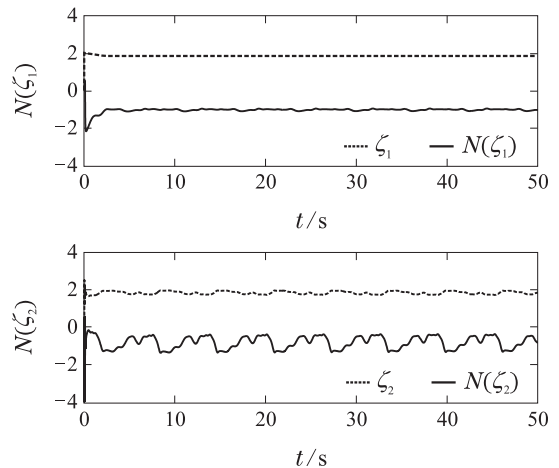


图 6 Nussbaum 增益  $N(\zeta)$  及其变量  $\zeta(t)$

Fig. 6 Nussbaum gain  $N(\zeta)$  and it's argument  $\zeta(t)$

图示仿真结果表明: 所设计的自适应鲁棒控制器能够在保证不破坏状态约束的前提下实现系统的鲁棒跟踪控制, 且闭环系统中的所有信号都是有界的。

**例 2** 本例通过对倒立摆的控制来验证本文的控制方案. 倒立摆系统的状态方程如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{g \sin x_1 - \frac{amlx_2^2 \sin(2x_1)}{2} - a \cos x_1 u}{\frac{4l}{3} - aml \cos^2 x_1}, \\ y = x_1, \end{cases} \quad (50)$$

其中:  $x_1, x_2$  为状态向量, 分别表示倒立摆与垂直方向的夹角及角速度;  $u$  是控制输入, 代表对小车的作力,  $m$  是倒立摆的质量,  $M$  是小车的质量,  $2l$  是倒立摆的长度,  $a = \frac{l}{m + M}$ .

本例的控制目标为设计控制律使得倒立摆与垂直方向的夹角稳定在  $\pi/4$  附近, 即跟踪目标  $y_d = \pi/4$ . 同时在运行过程中始终满足状态约束条件:  $|x_1| < \pi/2, |x_2| < \pi/2$ .

在仿真中取  $g = 9.8 \text{ m/s}^2, m = 0.21 \text{ kg}, M =$

0.45 kg,  $2l = 0.65$  m,  $K_1 = K_2 = 10$ , 仿真结果见图7-9.

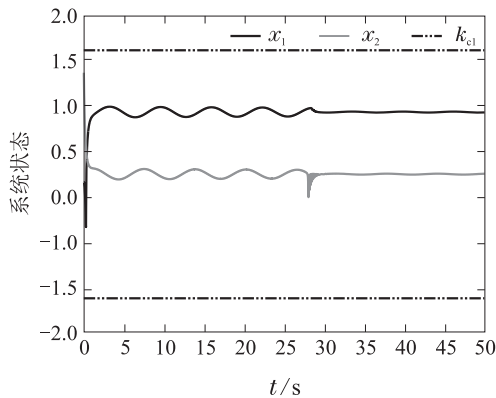


图7 系统的状态轨迹 $x_1, x_2$

Fig. 7 The trajectory of states  $x_1$  and  $x_2$

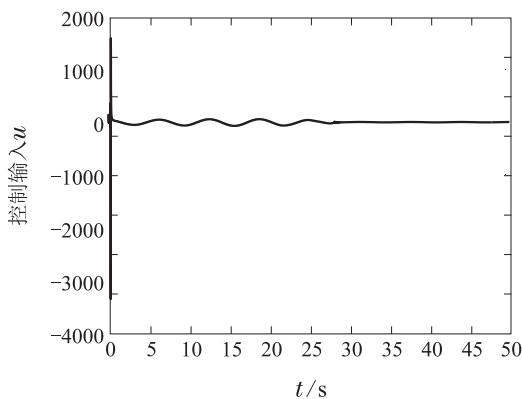


图8 系统的控制输入轨迹 $u$

Fig. 8 The trajectory of control input  $u$

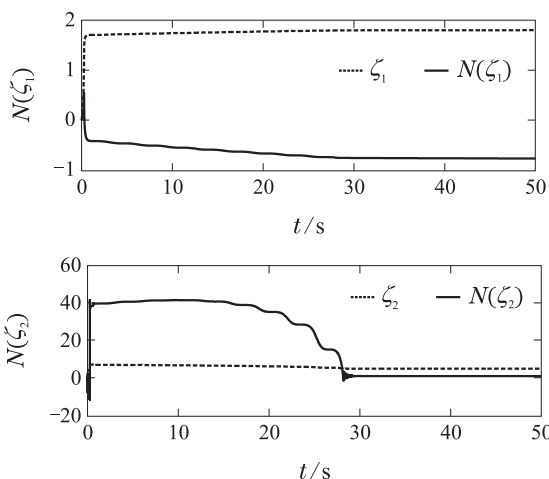


图9 Nussbaum增益 $N(\zeta)$ 及其变量 $\zeta(t)$

Fig. 9 Nussbaum gain  $N(\zeta)$  and its argument  $\zeta(t)$

从仿真结果可以看出, 倒立摆角度最终稳定在 $\pi/4$ 附近, 并且在运行过程中满足状态约束条件:  $|x_1| < \pi/2$ ,  $|x_2| < \pi/2$ , 即倒立摆角度及角加速度均小于 $\pi/2$ .

## 5 结论(Conclusions)

针对带有完全未知的时变控制系数和扰动的一类不确定全状态约束非线性系统(1), 本文设计了一种新的基于BLF, Nussbaum增益技术以及投影算法的反演自适应鲁棒非线性控制方案. 通过构造BLF保证了系统在运行过程中状态始终满足约束条件; 光滑投影算法确保时变参数的自适应估计有界; Nussbaum增益技术解决了控制方向未知的问题. 应用Lyapunov函数和相关的引理, 在理论上证明了所提出的自适应鲁棒控制律通过恰当地选取设计参数, 可在满足状态约束条件的前提下使系统的输出跟踪误差收敛于0的任意小的邻域内, 同时保证最终的闭环系统所有信号有界. 最后, 仿真结果说明了所提出的自适应鲁棒控制方案的有效性.

## 参考文献(References):

- [1] HE W, CHEN Y, YIN Z. Adaptive neural network control of an uncertain robot with full-state constraints [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2015, 46(3): 620 – 629.
- [2] YAN F, WANG J. Fuel-assisted in-cylinder oxygen fraction transient trajectory shaping control for diesel engine combustion mode switching [C] // *American Control Conference*. San Francisco: IEEE, 2011: 1573 – 1578.
- [3] ZHANG Z C, WU Y Q, HUANG J M. Differential-flatness-based finite-time anti-swing control of underactuated crane systems [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 87(3): 1749 – 1761.
- [4] WU Yuqiang, ZHU Chenglong. Energy control for parallel-type double inverted pendulums with restricted cart rail length [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(9): 1254 – 1260. (武玉强, 朱成龙. 车轨长度受限的并行双摆能量控制 [J]. *控制理论与应用*, 2015, 32(9): 1254 – 1260.)
- [5] MAYNE D Q, RAWLINGS J B, RAO C V. Constrained model predictive control: Stability and optimality [J]. *Automatica*, 2000, 36(6): 789 – 814.
- [6] LIU D, MICHEL A N. *Dynamical Systems with Saturation Nonlinearities* [M]. London: Springer, 1993.
- [7] HU T, LIN Z. *Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design* [M]. Boston: Birkhäuser, 2001.
- [8] BEMPORAD A. Reference governor for constrained nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(3): 415 – 419.
- [9] KOGISO K, HIRATA K. Reference governor for constrained systems with time-varying references [J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2009, 57(3): 289 – 295.
- [10] DEHAAN D, GUAY M. Extremum-seeking control of state-constrained nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2005, 41(9): 1567 – 1574.
- [11] GAO F Z, WU Y Q. Finite-time output feedback stabilization of chained-form systems with inputs saturation [J]. *International Journal of Control*, 2017, 90(7): 1466 – 1477.
- [12] NIU B, ZHAO J. Barrier Lyapunov functions for the output tracking control of constrained nonlinear switched systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2013, 62(10): 963 – 971.
- [13] LIU Y J, TONG S C. Barrier Lyapunov functions-based adaptive control for a class of nonlinear pure-feedback systems with full state constraints [J]. *Automatica*, 2016, 64(C): 70 – 75.



- [14] NGO K B, MAHONY R, JIANG Z P. Integrator backstepping using barrier functions for systems with multiple state constraints [C] // *Proceedings of the 44th Conference Decision on Control*. Seville: IEEE, 2005, 12: 8306 – 8312.
- [15] TEE K P, GE S S, TAY E H. Barrier Lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2009, 45(4): 918 – 927.
- [16] TEE K P, GE S S. Control of nonlinear systems with partial state constraints using a barrier Lyapunov function [J]. *International Journal of Control*, 2011, 84(12): 2008 – 2023.
- [17] TEE K P, GE S S. Control of nonlinear systems with full state constraint using a barrier Lyapunov function [C] // *Proceeding of the 48th Conference Decision and Control*. Shanghai: IEEE, 2009: 8618 – 8623.
- [18] ZHAO X L, ZHANG Y K, PAN H P, et al. Backstepping control of output-constrained nonlinear systems with hysteresis [J]. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(5): 608 – 612.  
(赵新龙, 章亿凯, 潘海鹏, 等. 输出受限迟滞非线性系统的反步控制器设计 [J]. 控制理论与应用, 2016, 33(5): 608 – 612.)
- [19] WANG C X, WU Y Q, YU J B. Barrier Lyapunov functions-based dynamic surface control for pure-feedback systems with full state constraints [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2017, 11(4): 524 – 530.
- [20] WANG C X, WU Y Q, YU J B. Barrier Lyapunov functions-based adaptive control for nonlinear pure-feedback systems with time-varying full state constraints [J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2017, 15(6): 2714 – 2722.
- [21] NUSSBAUM R D. Some remarks on a conjecture in parameter adaptive control [J]. *Systems & Control Letters*, 1983, 3(5): 243 – 246.
- [22] GE S S, WANG J. Robust adaptive tracking for time-varying uncertain nonlinear systems with unknown control coefficients [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(8): 1463 – 1469.
- [23] MA J J, ZHENG Z Q, LI P. Adaptive dynamic surface control of a class of nonlinear systems with unknown direction control gains and input saturation [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2015, 45(4): 728 – 741.
- [24] YU M, YE X D, QI D L. Robust adaptive repetitive learning control for a class of time varying nonlinear systems with unknown control direction [J]. *Journal of Control Theory & Applications*, 2013, 11(3): 336 – 342.
- [25] LIU Y J, TONG S C. Barrier Lyapunov functions for Nussbaum gain adaptive control of full state constrained nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2017, 76(2): 143 – 152.
- [26] YE X, JIANG J. Adaptive nonlinear design without a prior knowledge of control directions [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(11): 1617 – 1621.
- [27] REN B, GE S S, TEE K P, et al. Adaptive neural control for output feedback nonlinear systems using a barrier Lyapunov function [J]. *IEEE Transactions on Neural Network*, 2010, 21(8): 1339 – 1345.
- [28] POMET J B, PRALY L. Adaptive nonlinear regulation: estimation from the Lyapunov equation [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(4): 729 – 740.

#### 作者简介:

**王春晓** (1979–), 女, 博士研究生, 副教授, 目前研究方向为非线性系统控制、约束控制等, E-mail: xiao2166@126.com;

**武玉强** (1962–), 男, 博士生导师, 教授, 目前研究方向为非线性系统控制、变结构控制等, E-mail: yu-qiang\_wu@126.com.