

## 量子非马尔科夫特性的度量与调控

宋洪婷<sup>†</sup>

(中国空间技术研究院 钱学森空间技术实验室, 北京 100094)

**摘要:** 如何全面系统地认识和理解量子非马尔科夫特性是当前量子信息领域的一个热点问题, 已经取得了一些重要的理论与实验研究进展. 本文将主要介绍两种分别基于量子互信息与量子Fisher信息矩阵角度的非马尔科夫特性的刻画准则, 并通过两个具体例子, 讨论它们与已有度量之间的关系和层次结构. 除此之外, 本文利用量子控制方法, 实现了对量子特性的有效调控, 将无记忆的马尔科夫过程转化为有记忆的非马尔科夫过程.

**关键词:** 开放量子系统; 量子非马尔科夫特性; 量子信息; 量子调控

中图分类号: TP273 文献标识码: A

## Quantification and manipulation of quantum non-Markovianity

SONG Hong-ting<sup>†</sup>

(Qian Xuesen Laboratory of Space Technology, China Academy of Space Technology, Beijing 100094, China)

**Abstract:** The research of quantum non-Markovianity has rapidly developed and many important theoretical and experimental progresses have been made. In this work, we will mainly introduce two criteria to detect and quantify quantum non-Markovianity from the perspective of quantum mutual information and Fisher information matrix, respectively, and illustrate their basic features through two typical examples. The relationship between them and other approaches is elucidated, and a hierarchical aspect of quantum non-Markovianity is revealed. Furthermore, we adopt quantum control method to manipulate this quantum feather, and effectively modify the quantum Markovian dynamics to non-Markovian process.

**Key words:** open quantum systems; quantum non-Markovianity; quantum information; quantum control

### 1 引言(Introduction)

根据量子系统是否与外界环境发生相互作用, 可以将系统分为开放量子系统与封闭量子系统. 然而, 任何一个实际的物理系统, 都不可能完全封闭, 因此会不可避免地受到周围环境的影响. 此时, 系统的演化不再服从薛定谔方程. 并且通常来讲, 系统与环境之间的相互作用会导致量子相干与量子关联等特性的损失, 阻碍量子信息处理过程的实现. 如何描述开放量子系统的动力学演化过程, 是量子信息技术从理论走向实际应用的关键. 研究开放量子系统演化的一种常用手段是玻恩-马尔科夫(Born-Markov)近似<sup>[1]</sup>, 它假定量子系统与周围环境处于弱耦合状态, 环境系统很难受到相互作用的影响, 并且环境具有非常短的关联时间, 此时环境的记忆效应可以忽略不计. 在此近似条件下, 系统主方程呈现Lindblad形式<sup>[2-3]</sup>, 其动力学具有未来时刻的状态只依赖于当前状态的“无记忆”特点. 此过程也因此被称之为量子马尔科夫过程.

然而对于许多实际的物理系统而言, 例如: 强耦合的腔QED体系、自旋波色体系等, 玻恩-马尔科夫近似条件是不成立的. 系统与环境之间的强耦合作用、二者较大的初始关联、低温、或者有限大小的环境等特点, 使得环境的关联时间通常会远大于系统自身演化的关联时间, 此时记忆效应不能忽略. 研究具有记忆效应的非马尔科夫动力学演化过程具有重要的物理意义与实际应用价值. 而且近年来, 越来越多的研究成果表明: 量子非马尔科夫过程较马尔科夫过程在量子通信与信息处理任务中具有更多的优越性<sup>[4-8]</sup>, 包括: 制备稳定的量子纠缠态<sup>[4]</sup>、提高量子通信能力与保真度<sup>[5-6]</sup>等.

尽管在经典随机过程理论中, 借助联合概率分布的Kolmogorov层次结构, 可以给出经典马尔科夫过程与非马尔科夫过程的严格定义与刻画<sup>[9]</sup>. 但是由于量子理论是基于不对易代数的, 且测量通常会影响到量子系统所处的状态, 条件概率这一经典概念没有唯一的

收稿日期: 2017-09-06; 录用日期: 2017-11-23.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: songhongting@qxslab.cn; Tel.: +86 10-68111079.

本文责任编辑: 席在荣.

国家自然科学基金项目(11605284)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (11605284).

量子对应形式,因此严格的量子马尔科夫过程与非马尔科夫过程的数学定义以及量子非马尔科夫特性的本质物理解释,至今仍然是一个开放性问题.国内外科研人员基于可分性<sup>[10]</sup>、迹距离<sup>[11]</sup>、Fisher信息<sup>[12-13]</sup>、量子关联<sup>[14]</sup>、保真度<sup>[15]</sup>、可获取信息量<sup>[16]</sup>以及信道容量<sup>[17]</sup>等不同的角度,提出了许多量子非马尔科夫特性的刻画标准.这些度量彼此不同且互不等价<sup>[18-20]</sup>.

为了更加全面深入的认识量子非马尔科夫特性,本文将介绍基于量子互信息与量子Fisher信息矩阵的量子非马尔科夫度量,并通过两个具体的例子揭示它们与已有度量之间的关系.这两种度量都具有清晰的信息流动含义,且计算形式简便,易于实验实现.鉴于量子非马尔科夫特性在信息处理过程中逐渐显现的优越性,如何借助量子控制方法对此特性加以调控,实现无记忆的马尔科夫过程向有记忆的非马尔科夫过程的转化,也是本文关注的一个重要问题.所得结果将有助于指导量子非马尔科夫特性的进一步应用研究.

## 2 量子非马尔科夫度量 (Quantifications of quantum non-Markovianity)

经典随机过程中的马氏性与非马氏性可以借助概率转移矩阵进行明确的定义与区分<sup>[9]</sup>.但是在量子情形中,由于不对易性等特殊性质,量子马尔科夫特性与非马尔科夫特性尚没有统一的刻画标准.

起初,绝大多数关于量子非马尔科夫特性的研究工作都是基于主方程的角度进行的.通过分析动态演化过程 $\Lambda = \{\Lambda_t, t \geq 0\}$ 是否具有半群性质、可分性质,演化过程被划分为量子马尔科夫过程与量子非马尔科夫过程<sup>[21-22]</sup>.这种判定标准类似于经典随机过程理论中的转移矩阵判定方法,具有比较清晰的物理含义.但是通常需要精确的模型信息,涉及复杂的动力学演化求解过程,而且不能有效的量化非马尔科夫程度.

随着量子信息理论的逐步发展,许多新型的基于信息理论框架的量子非马尔科夫特性的判定与度量标准被陆续提出.具体包括: 1) Breuer等人从信息流动的角度出发,认为非马尔科夫性意味着信息从环境向系统的回流,借助量子态之间的可区分性刻画量子非马尔科夫特性<sup>[11]</sup>; 2) Rivas等人基于量子系统与环境的纠缠演化,刻画非马尔科夫特性<sup>[10]</sup>; 3) Lu等人借助量子Fisher信息流动提出了一种非马尔科夫度量<sup>[12]</sup>; 4) Rajagopal等人借助动态演化状态与先前时刻的状态之间的保真度刻画量子非马尔科夫性<sup>[15]</sup>; 5) 针对连续变量量子系统, Vasile等人利用保真度刻画量子态的可区分性,分析信息回流情况,研究了高斯非马尔科夫特性<sup>[23]</sup>等.这些度量大多从具体信息量

的演化出发,关注系统与环境之间的信息交换情况,借助完全正定的保迹映射性质或量子数据处理不等式,刻画了量子非马尔科夫特性的不同侧面.如此定义的非马尔科夫度量不需要已知任何先验的系统模型信息,并且可以定量的描述量子非马尔科夫特性.

下面具体介绍一种目前比较常用的量子非马尔科夫度量: 基于迹距离的非马尔科夫度量<sup>[11]</sup>.此度量由Breuer, Laine和Piilo于2009年提出.他们认为一个动态演化 $\Lambda = \{\Lambda_t, t \geq 0\}$ 是马尔科夫(简称为BLP-马氏)的当且仅当对任意两个初始状态 $\rho$ 和 $\tau$ ,在任何时刻 $t \geq 0$ ,  $\frac{1}{2} \text{tr} |\Lambda_t(\rho - \tau)|$ 都是一个关于时间的单调减少函数.如果存在某一时刻 $t_0 > 0$ 和某一对初始状态 $\rho_0$ 和 $\tau_0$ ,使得迹距离增加,那么此过程为非马尔科夫的.相应的非马尔科夫度量定义为

$$\mathcal{N}_{\text{BLP}}(\Lambda) = \sup_{\rho, \tau} \frac{1}{2} \int_{\frac{d}{dt} \text{tr} |\Lambda_t(\rho - \tau)| > 0} \frac{d}{dt} \text{tr} |\Lambda_t(\rho - \tau)| dt,$$

其中:  $|A| = \sqrt{AA^\dagger}$ , sup是关于所有初始状态 $\rho$ 和 $\tau$ 取遍历.由于迹距离可以刻画两量子状态之间的可区分程度,即两个态之间的迹距离越大,这两个态越容易区分,演化过程中的迹距离的变化可以视为量子系统与环境的进行信息交换的过程.通过将态的可区分性的减少解释为系统向环境的信息耗散,将迹距离的增加理解为由环境向系统的信息回流,此度量具有了显著的信息流动含义.借助量子层析技术等先进的实验手段,此度量已经在光学装置中得以实现<sup>[24]</sup>.但是由于计算过程涉及复杂的优化求解,实验中需在不同时刻对不同初始状态进行层析测量,耗费的资源代价较大.

寻找方便计算和实际应用的度量具有非常重要的理论意义与应用价值,接下来将着重介绍基于量子互信息与量子Fisher信息矩阵角度的两种非马尔科夫度量<sup>[13-14]</sup>.

### 2.1 基于量子互信息的非马尔科夫度量(Quantum non-Markovianity via mutual information)

为了讨论量子系统 $H$ 上的动态演化过程 $\Lambda = \{\Lambda_t, t \geq 0\}$ 的马尔科夫特性,现引进一个辅助系统 $H^a$ ,考虑复合系统 $H \otimes H^a$ 上的两体量子态 $\rho^{\text{sa}}$ 的量子互信息 $I(\rho^{\text{sa}}) = S(\rho^{\text{s}}) + S(\rho^{\text{a}}) - S(\rho^{\text{sa}})$ 演化情况.

利用量子互信息在局域操作下的单调性<sup>[25]</sup>,可知一个动态演化过程 $\Lambda$ 是可分的,即对于任意的 $r \leq t$ ,都存在量子操作 $\Lambda_{t,r}$ 满足 $\Lambda_t = \Lambda_{t,r} \Lambda_r$ ,必然

$$I(\rho_t^{\text{sa}}) = I((\Lambda_t \otimes \mathbf{1})\rho^{\text{sa}}) = I((\Lambda_{t,r} \Lambda_r \otimes \mathbf{1})\rho^{\text{sa}}) = I((\Lambda_{t,r} \otimes \mathbf{1})\rho_r^{\text{sa}}) \leq I(\rho_r^{\text{sa}}).$$

因此,可以定义一个演化过程是互信息意义下的马尔科夫的(简称为MI-马氏),如果其满足 $I(\rho_t^{\text{sa}})$ 是 $t$ 的单

调递减函数, 即对所有的  $t \geq 0$ , 均成立  $\frac{d}{dt} I(\rho_t^{\text{sa}}) \leq 0$ .

若存在某一时刻  $t_0 > 0$  使得  $\frac{d}{dt} I(\rho_t^{\text{sa}}) > 0$ , 则称此演化过程为非马尔科夫过程, 相应的非马尔科夫度量定义为

$$\mathcal{N}_{\text{MI}}(\Lambda) = \sup_{\rho^{\text{sa}}} \int_{\frac{d}{dt} I(\rho_t^{\text{sa}}) > 0} \frac{d}{dt} I(\rho_t^{\text{sa}}) dt,$$

其中  $\sup$  是对复合系统  $H \otimes H^a$  上所有的两体量子态  $\rho^{\text{sa}}$  取最大值.

由于量子互信息刻画了两体系统之间的全部关联, 因此从信息流动的角度来看, 此度量是非常根本的, 但是由于该量涉及对  $H \otimes H^a$  上所有的两体量子态  $\rho^{\text{sa}}$  取最优, 其计算过程十分困难. 在实际中, 为简便计算, 可以仅考虑系统与辅助系统之间任意的极大纠缠态  $\rho^{\text{sa}} = |\Phi\rangle\langle\Phi|$ , 相应的简化的非马尔科夫度量 (简称为  $\text{MI}_0$ -非马氏性) 为

$$\mathcal{N}_0(\Lambda) = \int_{\frac{d}{dt} I(\rho_t^{\text{sa}}) > 0} \frac{d}{dt} I(\rho_t^{\text{sa}}) dt,$$

其中  $\rho_t^{\text{sa}} = (\Lambda_t \otimes \mathbf{1})|\Phi\rangle\langle\Phi|$ .

此简化主要是基于以下两点考虑: 首先, 由 Jamiolkowski-Choi 同构理论可知<sup>[26-27]</sup>, 量子操作可与上述两体量子态之间建立对应关系, 进而可以通过研究两体量子态对量子操作进行刻画; 其次, 任意混合量子态都可视为更高维空间上纯态的边缘态, 因此对系统上所作操作的刻画, 可以通过更大空间上整体操作对纯态的作用来反映. 因此上述简化合理, 且简化后的非马尔科夫度量具有显著的计算优势.

### 2.2 基于量子 Fisher 信息矩阵的非马尔科夫度量 (Quantum non-Markovianity via Fisher information matrix)

考虑两维量子系统的动力学演化过程  $\Lambda = \{\Lambda_t, t \geq 0\}$ . 不失一般性, 假设系统的初始状态为  $\rho_0 = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ , 其中:

$$|\Psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle, \quad (1)$$

$\theta \in [0, \pi)$ ,  $\phi \in [0, 2\pi)$  分别编码了系统状态的幅值信息与相位信息. 为了刻画随时间演化, 量子系统状态  $\rho_t = \Lambda_t(\rho_0)$  所含的参数信息量的变化情况, 采用如下量子 Fisher 信息矩阵:

$$F(t) = \begin{pmatrix} F_\theta(t) & F_{\theta\phi}(t) \\ F_{\phi\theta}(t) & F_\phi(t) \end{pmatrix},$$

其中:

$$F_\theta(t) = \text{tr} \rho_t L_\theta^2, \quad F_\phi(t) = \text{tr} \rho_t L_\phi^2, \\ F_{\theta\phi}(t) = \frac{1}{2} \text{tr} \rho_t (L_\theta L_\phi + L_\phi L_\theta),$$

此处  $L_\theta$  与  $L_\phi$  为对称对数导数, 分别满足

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \rho_t = \frac{1}{2} (\rho_t L_\theta + L_\theta \rho_t), \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \rho_t = \frac{1}{2} (\rho_t L_\phi + L_\phi \rho_t).$$

由  $L_\theta^\dagger = L_\theta, L_\phi^\dagger = L_\phi$ , 可得出量子 Fisher 信息矩阵  $F(t)$  是厄米矩阵. 根据量子 Cramér-Rao 不等式, 此矩阵可以给出参数无偏估计的均方误差的下界<sup>[28-29]</sup>.

为了只关注动力学演化过程  $\Lambda = \{\Lambda_t, t \geq 0\}$ , 去除 Fisher 信息矩阵对初始态中参数的具体取值的依赖性, 关于  $\theta \in [0, \pi)$ ,  $\phi \in [0, 2\pi)$  取积分, 引入如下平均意义的 Fisher 信息矩阵

$$\bar{F}(t) = \begin{pmatrix} \bar{F}_\theta(t) & \bar{F}_{\theta\phi}(t) \\ \bar{F}_{\phi\theta}(t) & \bar{F}_\phi(t) \end{pmatrix},$$

其中:

$$\bar{F}_\theta(t) = \int F_\theta(t) d\Omega, \quad \bar{F}_\phi(t) = \int F_\phi(t) d\Omega, \\ \bar{F}_{\theta\phi}(t) = \bar{F}_{\phi\theta}(t) = \int F_{\theta\phi}(t) d\Omega,$$

$d\Omega = \frac{1}{4\pi} \sin \theta d\theta d\phi$ . 此矩阵  $\bar{F}(t)$  只依赖于时间  $t$  与动态演化  $\Lambda$ , 因此可用来表征动力学特性.

鉴于量子马尔科夫过程总是“丢失”信息, 可以提出如下定义: 一个动力学过程  $\Lambda = \{\Lambda_t, t \geq 0\}$  是量子 Fisher 信息矩阵意义下的马尔科夫的 (简称为 FI-马氏), 如果随着时间演化, 系统状态  $\rho_t = \Lambda_t(\rho_0)$  所含的平均参数信息量, 即平均 Fisher 信息矩阵  $\bar{F}(t)$  一直单调减少, 也就是说对所有  $t \geq 0, \frac{d}{dt} \bar{F}(t) \leq 0$ . 换句话说, 如果导数矩阵  $\frac{d}{dt} \bar{F}(t)$  的本征值  $\lambda_1(t)$  和  $\lambda_2(t)$  一直是非正的, 此动力学演化呈现 FI-马氏性. 反之, 则称演化存在 FI-非马氏性, 相应的非马尔科夫度量为

$$\mathcal{N}_{\text{FI}}(\Lambda) = \int_{\lambda(t) > 0} \lambda(t) dt,$$

其中  $\lambda(t) = \max\{\lambda_1(t), \lambda_2(t)\}$ . 值得注意的是, 此度量并非唯一的, 可以用类似的思想定义其他可行的非马尔科夫度量.

### 2.3 例子 (Examples)

**例 1** 考虑与热库发生线性相互作用的二能级系统, 总的哈密顿量为

$$H = \omega_o \sigma_z + \sum_i \omega_i a_i^\dagger a_i + \sum_i \sigma_z (g_i a_i + g_i^* a_i^\dagger),$$

其中:  $\omega_o$  为量子比特系统的能级差,  $\omega_i$  为热库模  $i$  的频率,  $a_i$  与  $a_i^\dagger$  分别为湮灭与产生算子,  $g_i$  为耦合常数. 此时, 二能级系统的动力学演化可以用如下时间局域主方程描述

$$\frac{d}{dt} \rho_t = \gamma(t) (\sigma_z \rho_t \sigma_z - \rho_t),$$

$\gamma(t)$ 为含时的退相位因子, 满足  $\int_0^t \gamma(s)ds \geq 0$ .

对任意的系统初始状态  $\rho_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & d \end{pmatrix}$ ,  $a, d \in \mathbb{R}$ ,

$b \in \mathbb{C}$ , 且  $a + d = 1$ , 在  $t$ 时刻的演化状态为

$$\rho_t = A_t(\rho_0) = \begin{pmatrix} a & bf(t) \\ b^*f(t) & d \end{pmatrix},$$

其中  $f(t) = \exp[-2 \int_0^t \gamma(s)ds]$ . 考虑系统和辅助系统上的一个极大纠缠态  $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ , 可得

$$\rho_t^{sa} = (A_t \otimes \mathbf{1})|\Phi\rangle\langle\Phi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & f(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f(t) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

量子互信息为

$$I(\rho_t^{sa}) = 2 + \frac{1+f(t)}{2} \log_2 \frac{1+f(t)}{2} + \frac{1-f(t)}{2} \log_2 \frac{1-f(t)}{2},$$

相应的变化率为

$$\frac{d}{dt} I(\rho_t^{sa}) = -\gamma(t)f(t) \log_2 \frac{1+f(t)}{1-f(t)} \propto -\gamma(t).$$

因此, 根据第2.1节所示的方法可知, 此演化过程  $A = \{A_t, t \geq 0\}$  为  $\text{MI}_0$ -马氏的当且仅当对所有的  $t \geq 0$  均成立  $\gamma(t) \geq 0$ . 一但存在某个时刻  $t_0 > 0$ , 使得  $\gamma(t_0) < 0$ , 此过程呈现  $\text{MI}_0$ -非马氏性, 相应的非马尔科夫度量为

$$\mathcal{N}_0 = - \int_{\gamma(t) < 0} \gamma(t)f(t) \log_2 \frac{1+f(t)}{1-f(t)} dt.$$

对式(1)中量子系统状态  $\rho_0 = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ , 可以计算其随时间演化的态为

$$\rho_t = A_t(\rho_0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos\theta & e^{-i\phi}f(t)\sin\theta \\ e^{i\phi}f(t)\sin\theta & 1 - \cos\theta \end{pmatrix},$$

其中  $f(t) = e^{-2 \int_0^t \gamma(s)ds}$ , 量子Fisher信息矩阵为

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2(t)\sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

进一步可以推导出平均量子Fisher信息矩阵

$$\bar{F}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}f^2(t) \end{pmatrix}$$

与导数矩阵

$$\frac{d}{dt} \bar{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3}\gamma(t)f^2(t) \end{pmatrix}.$$

根据第2.2节所示的方法, 此演化过程  $A = \{A_t, t \geq 0\}$

为  $\text{FI}$ -马氏的, 当且仅当对所有的  $t \geq 0$  均成立  $\gamma(t) \geq 0$ . 所得结果与  $\text{BLP}$ -判据、 $\text{MI}_0$ -判据一致. 量子非马尔科夫度量为

$$\mathcal{N}_{FI}(A) = -\frac{8}{3} \int_{\gamma(t) \leq 0} \gamma(t)f^2(t)dt.$$

因此, 对此例而言,  $\text{FI}$ -马氏性等价于  $\text{BLP}$ -马氏性等价于  $\text{MI}_0$ -马氏性.

**例2** 考虑随机酉信道中的量子比特系统

$$\frac{d}{dt} \rho_t = \sum_{i=1}^3 \gamma_i(t)(\sigma_i \rho_t \sigma_i - \rho_t), \quad t \geq 0,$$

其中  $\gamma_i(t) (i=1, 2, 3)$  为实函数. 此主方程演化等价于

$$A_t(\rho_0) = \sum_{i=0}^3 p_i(t) \sigma_i \rho_0 \sigma_i, \quad \text{其中:}$$

$$p_0 = (1 + \sum_{j=1}^3 \Gamma_j(t))/4,$$

$$p_i = \Gamma_i(t)/2 + (1 - \sum_{j=1}^3 \Gamma_j(t))/4,$$

$$\Gamma_i(t) = \exp[2 \int_0^t (\gamma_i(s) - \sum_{j=1}^3 \gamma_j(s))ds].$$

若假定  $p_i(t) = \alpha_i [1 - p_0(t)]$ , 且  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \in [0, 1/2]$ , 那么  $\alpha_3 = 1 - 2\alpha \in [0, 1]$ . 记  $H(\alpha) = -2\alpha \ln \alpha - (1 - 2\alpha) \ln(1 - 2\alpha)$  和  $q(t) = 1 - p_0(t)$ . 经计算可得:

1) 动力学演化  $A = \{A_t, t \geq 0\}$  是  $\text{BLP}$ -马氏的当且仅当  $\dot{q}(t) \geq 0$  且

$$q(t) \leq \text{BLP}(\alpha) := \min\left\{\frac{1}{2(1-\alpha)}, \frac{1}{4\alpha}\right\};$$

2) 动力学演化  $A = \{A_t, t \geq 0\}$  是  $\text{MI}_0$ -马氏的当且仅当  $\dot{q}(t) \geq 0$  且

$$q(t) \leq \text{MI}(\alpha) := \frac{1}{1 + e^{-H(\alpha)}};$$

3) 动力学演化  $A = \{A_t, t \geq 0\}$  是  $\text{FI}$ -马氏的当且仅当  $\dot{q}(t) \geq 0$  且

$$q(t) \leq \text{FI}(\alpha) := \min\left\{\frac{1}{2(1-\alpha)}, h(\alpha)\right\},$$

其中  $h(\alpha)$  的表达式较为复杂, 此处予以省略, 详细推导请见参考文献[13].

为了清楚的刻画三者之间的包含关系, 将  $\text{BLP}(\alpha)$ ,  $\text{MI}_0(\alpha)$  与  $\text{FI}(\alpha)$  分别用图1中的红色点线、蓝色虚线和黑色实线描述. 从图中可以看出: 当  $\alpha \in [0, 1/3]$  时,  $\text{BLP}$ -马氏等价于  $\text{FI}$ -马氏, 二者包含  $\text{MI}_0$ -马氏; 当  $\alpha \in (1/3, 1/2]$  时, 这3种判定彼此不同, 且  $\text{BLP}(\alpha) < \text{FI}(\alpha) < \text{MI}_0(\alpha)$ , 也就是说  $\text{BLP}$ -马氏性意味着  $\text{FI}$ -马氏性, 进而蕴含着  $\text{MI}_0$ -马氏性.

因此, 在此例中,  $\text{BLP}$ -马氏性是最强的,  $\text{FI}$ -马氏性次之,  $\text{MI}_0$ -马氏性最弱. 注意此层次结构并不一定对其他例子适用, 需要具体情况具体分析.

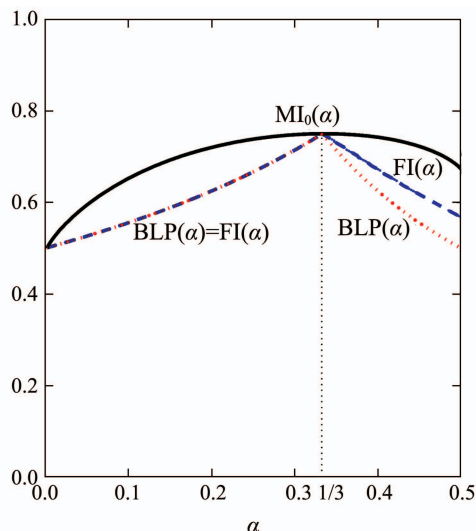


图 1 几种量子马尔科夫判定标准的比较图  
Fig. 1 Comparison of different criteria on quantum Markovianity

### 3 量子非马尔科夫特性的调控(Manipulation of quantum non-Markovianity)

量子控制已由最初的封闭系统的控制, 发展为复杂的开放量子系统的控制, 诸如: 动态解耦<sup>[30-34]</sup>、最优控制<sup>[35-38]</sup>、反馈控制<sup>[39-43]</sup>等方法被逐渐发展起来. 研究表明利用量子控制方法, 可以实现抑制量子退相干、保护量子关联、驱动量子系统在给定时间内到达目标量子态等多种目标, 有助于量子技术的实现与性能的提高<sup>[44-49]</sup>. 由于量子马尔科夫特性已经被证实可以作为一种潜在的量子资源, 用于提高量子度量精度和加速量子演化等<sup>[7-8]</sup>. 本文尝试从控制的角度, 寻求有效的量子调控方法实现对量子信道记忆特性的改变, 进而开发利用此量子资源<sup>[50]</sup>.

对一般的量子系统演化过程 $\rho^S(t) = \Lambda_t(\rho^S(0))$ , 总可以通过引入辅助系统 $E$ 及初始状态 $\rho^E(0)$ , 得到扩充系统上的么正演化, 记为 $U$ , 并使其满足 $\text{tr}_E(U_t \rho^S(0) \otimes \rho^E(0) U_t^\dagger) = \Lambda_t(\rho^S(0)) = \rho^S(t)$ . 现考虑在扩充系统演化的某一时刻 $0 < s \leq t$ , 施加局部控制 $V$ , 然后分析该操作对系统记忆特性的影响. 此过程可具体描述为: 在 $s$ 时刻之前, 系统状态为

$$\tilde{\rho}^S(t) = \text{tr}_E(U_t \rho^S(0) \otimes \rho^E(0) U_t^\dagger) = \rho^S(t);$$

在 $s$ 时刻之后, 系统状态为

$$\tilde{\rho}^S(t) = \text{tr}_E(U_{t,s} V \otimes \mathbf{1} U_s \rho^S(0) \otimes \rho^E(0) U_s^\dagger V^\dagger \otimes \mathbf{1} U_{t,s}^\dagger).$$

此处用符号 $\tilde{\rho}^S(t)$ 来与未经控制的系统演化 $\rho^S(t)$ 进行区分.

下面针对一个具体的例子, 分析量子控制对马尔科夫特性调控的有效性. 针对例1中的动态演化过程, 其Kraus算子描述可以表示为

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(t) \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-f^2(t)} \end{pmatrix}.$$

利用文献[25]中的方法, 可以将此演化进行扩充, 得出系统与环境系统之间的共同演化 $U$ , 使其满足 $E_k = \langle e_k | U | e_1 \rangle$ ,  $k = 1, 2$ , 其中 $|e_k\rangle$ 为环境系统的标准正交基. 具体而言, 取 $|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $|e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 环境系统的初始状态为 $\rho^E(0) = |e_1\rangle\langle e_1|$ , 那么可得扩充系统的整体演化为

$$U_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(t) & -\sqrt{1-f^2(t)} \\ 0 & 0 & \sqrt{1-f^2(t)} & f(t) \end{pmatrix},$$

进而

$$U_{t,s} = U_t U_s^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h(s,t) & g(s,t) \\ 0 & 0 & g(s,t) & h(s,t) \end{pmatrix},$$

其中:

$$h(s,t) = \sqrt{1-f^2(s)}\sqrt{1-f^2(t)} + f(s)f(t),$$

$$g(s,t) = f(t)\sqrt{1-f^2(s)} - f(s)\sqrt{1-f^2(t)}.$$

假定在 $s$ 时刻, 对系统施加的控制为酉操作, 即 $V = \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix}$ , 其中 $a$ 和 $b$ 为满足 $|a|^2 + |b|^2 = 1$ 的复数. 经计算可得,  $s$ 时刻之后, 受控系统的状态演化方程为

$$\tilde{\rho}^S(t) = \tilde{\Lambda}_t(\rho^S(0)) = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{11}^S(t) & \tilde{\rho}_{12}^S(t) \\ \tilde{\rho}_{12}^{S*}(t) & \tilde{\rho}_{22}^S(t) \end{pmatrix},$$

其中:

$$\tilde{\rho}_{11}^S(t) = |a|^2\alpha - (a^*b^*\beta^* + ab\beta)f(s) + |b|^2(1-\alpha),$$

$$\tilde{\rho}_{12}^S(t) = h(s,t)(ab^*(2\alpha-1) - 2b^{*2}\beta^*f(s) + f(t)(a^2\beta + b^{*2}\beta^*)),$$

$$\tilde{\rho}_{22}^S(t) = |b|^2\alpha + (a^*b^*\beta^* + ab\beta)f(s) + |a|^2(1-\alpha).$$

为了清晰的反映控制操作对量子信道 $\Lambda = \{\Lambda_t, t \geq 0\}$ 的记忆效应的影响, 选择操作 $V = \sigma_x$ , 此时系统动力学演化为

$$\tilde{\rho}^S(t) = \tilde{\Lambda}_t(\rho^S(0)) = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta^*m(s,t) \\ \beta m(s,t) & \alpha \end{pmatrix},$$

且 $m(s,t) = 2f(s)h(s,t) - f(t)$ . 任意初态 $\rho_1^S(0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_1^* & 1-\alpha_1 \end{pmatrix}$ 和 $\rho_2^S(0) = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_2^* & 1-\alpha_2 \end{pmatrix}$ , 其中:  $\alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \beta_1 \in \mathbb{C}, \beta_2 \in \mathbb{C}$ , 两态之间的迹距离随时间演化为

$$\tilde{D}(\tilde{\rho}_1^S(t), \tilde{\rho}_2^S(t)) = \frac{\text{tr}|\tilde{\rho}_1^S(t) - \tilde{\rho}_2^S(t)|}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + |\beta_1 - \beta_2|^2 f^2(t) m^2(s, t)}}$$

相应的变化率为

$$\frac{d}{dt} \tilde{D}(\tilde{\rho}_1^S(t), \tilde{\rho}_2^S(t)) \propto (2f^2(s) - 1 - 2f(s)f(t) \frac{\sqrt{1-f^2(s)}}{\sqrt{1-f^2(t)}}) m(s, t) \frac{df(t)}{dt}.$$

取  $t = s$ , 可以得出此时迹距离的变化率正比于  $-f(s) \frac{df(s)}{dt}$ , 此量在  $\gamma(t) \leq 0$  时非负. 由于变化率  $\frac{d}{dt} \tilde{D}(\tilde{\rho}_1^S(t), \tilde{\rho}_2^S(t))$  是关于时间  $t$  的连续函数, 因此在一定的时间区间内, 两态之间的迹距离为单调增加的, 从而显示出 BLP-非马尔氏性. 这也就说明, 通过施加局部控制, 本文将没有记忆特性的马尔科夫过程调控为有记忆特性的非马尔科夫过程.

值得一提的是, 文献[24]设计了一种实验可行的方案, 实现了开放系统与环境之间信息流动的控制, 在量子非马尔科夫动力学与马尔科夫动力学演化之间进行了切换, 这就对未来量子技术开发利用记忆效应提供了一种潜在的方法.

#### 4 总结(Conclusions)

本文主要开展了量子非马尔科夫特性的度量与调控研究, 着重介绍了基于量子互信息与量子 Fisher 信息矩阵角度的两种量子非马尔科夫特性的判定准则, 并针对两个具体的例子, 揭示了这两种度量与现有度量之间的包含关系. 值得注意的是, 所得包含关系需要具体例子具体分析, 通常情况下的层次结构尚不清楚. 除此之外, 借助量子控制方法, 实现了无记忆的马尔科夫过程向有记忆的非马尔科夫过程的转化, 此结果与已有的实验结果吻合.

鉴于量子非马尔科夫特性有助于提高度量精度和加速量子计算等, 如何全面系统的认识和利用此量子特性, 开发这一潜在的量子信息处理资源值得我们进一步思考与研究.

#### 参考文献(References):

- [1] BREUER H P, PETRUCCIONE F. *The Theory of Open Quantum Systems* [M]. Oxford: Oxford University Press, 2002.
- [2] LINDBLAD G. On the generators of quantum dynamical semigroups [J]. *Communications in Mathematical Physics*, 1976, 48(2): 119 – 130.
- [3] GORINI V, KOSSAKOWSKI A. Completely positive dynamical semigroups of N-level systems [J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1976, 17(5): 821 – 825.
- [4] HUELGA S F, RIVAS Á, PLENIO M B. Non-Markovianity-assisted steady state entanglement [J]. *Physical Review Letters*, 2012, 108(16): 160402.
- [5] VASILE R, OLIVARES S, PARIS M G A, et al. Continuous-variable quantum key distribution in non-Markovian channels [J]. *Physical Review A*, 2011, 83(4): 042321.
- [6] LAINE E M, BREUER H P, PILO J. Nonlocal memory effects allow perfect teleportation with mixed states [J]. *Scientific Reports*, 2014, 4: 4620.
- [7] CHIN A W, HUELGA S F, PLENIO M B. Quantum metrology in non-Markovian environments [J]. *Physical Review Letters*, 2012, 109(23): 233601.
- [8] DEFFNER S, LUTZ E. Quantum speed limit for non-Markovian dynamics [J]. *Physical Review Letters*, 2013, 111(1): 010402.
- [9] FELLER W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* [M]. London: John Wiley & Sons, 2008.
- [10] RIVAS Á, HUELGA S F, PLENIO M B. Entanglement and non-Markovianity of quantum evolutions [J]. *Physical Review Letters*, 2010, 105(5): 050403.
- [11] BREUER H P, LAINE E M, PILO J. Measure for the degree of non-Markovian behavior of quantum processes in open systems [J]. *Physical Review Letters*, 2009, 103(21): 210401.
- [12] LU X M, WANG X, SUN C P. Quantum Fisher information flow and non-Markovian processes of open systems [J]. *Physical Review A*, 2010, 82(4): 042103.
- [13] SONG H, LUO S, HONG Y. Quantum non-Markovianity based on the Fisher-information matrix [J]. *Physical Review A*, 2015, 91(4): 042110.
- [14] LUO S, FU S, SONG H. Quantifying non-Markovianity via correlations [J]. *Physical Review A*, 2012, 86(4): 044101.
- [15] RAJAGOPAL A K, USHA DEVI A R, RENDELL R W. Kraus representation of quantum evolution and fidelity as manifestations of Markovian and non-Markovian forms [J]. *Physical Review A*, 2010, 82(4): 042107.
- [16] FANCHINI F F, KARPAT G, ÇAKMAK B, et al. Non-Markovianity through accessible information [J]. *Physical Review Letters*, 2014, 112(21): 210402.
- [17] BYLICKA B, CHRUSCIŃSKI D, MANISCALCO S. Non-Markovianity and reservoir memory of quantum channels: a quantum information theory perspective [J]. *Scientific Reports*, 2014, 4: 5720.
- [18] ZENG H S, TANG N, ZHENG Y P, et al. Equivalence of the measures of non-Markovianity for open two-level systems [J]. *Physical Review A*, 2011, 84(3): 032118.
- [19] JIANG M, LUO S. Comparing quantum Markovianities: distinguishability versus correlations [J]. *Physical Review A*, 2013, 88(3): 034101.
- [20] ADDIS C, BYLICKA B, CHRUSCIŃSKI D, et al. Comparative study of non-Markovianity measures in exactly solvable one- and two-qubit models [J]. *Physical Review A*, 2014, 90(5): 052103.
- [21] WOLF M M, EISERT J, CUBITT T S, et al. Assessing non-Markovian quantum dynamics [J]. *Physical Review Letters*, 2008, 101(15): 150402.
- [22] HOU S C, YI X X, YU S X, et al. Alternative non-Markovianity measure by divisibility of dynamical maps [J]. *Physical Review A*, 2011, 83(6): 062115.
- [23] VASILE R, MANISCALCO S, PARIS M G A, et al. Quantifying non-Markovianity of continuous-variable Gaussian dynamical maps [J]. *Physical Review A*, 2011, 84(5): 052118.
- [24] LIU B H, LI L, HUANG Y F, et al. Experimental control of the transition from Markovian to non-Markovian dynamics of open quantum systems [J]. *Nature Physics*, 2011, 7(12): 931 – 934.
- [25] NIELSEN M A, CHUANG I L. *Quantum Computation and Quantum Information* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [26] JAMIOLKOWSKI A. Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators [J]. *Reports on Mathematical Physics*, 1972, 3(4): 275 – 278.
- [27] CHOI M D. Completely positive linear maps on complex matrices [J]. *Linear Algebra and its Applications*, 1975, 10(3): 285 – 290.

- [28] HELSTROM C W. *Quantum Detection and Estimation Theory* [M]. New York: Academic Press, 1976.
- [29] HOLEVO A S. *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory* [M]. Amsterdam: North-Holland, 1982.
- [30] VIOLA L, KNILL E, LLOYD S. Dynamical decoupling of open quantum systems [J]. *Physical Review Letters*, 1999, 82(12): 2417.
- [31] KHODJASTEH K, LIDAR D A. Fault-tolerant quantum dynamical decoupling [J]. *Physical Review Letters*, 2005, 95(18): 180501.
- [32] BIERCUK M J, UYS H, VANDEVENDER A P, et al. Optimized dynamical decoupling in a model quantum memory [J]. *Nature*, 2009, 458(7241): 996 – 1000.
- [33] DU J, RONG X, ZHAO N, et al. Preserving electron spin coherence in solids by optimal dynamical decoupling [J]. *Nature*, 2009, 461(7268): 1265 – 1268.
- [34] PAN Y, XI Z R, CUI W. Optimal dynamical decoupling sequence for the Ohmic spectrum [J]. *Physical Review A*, 2010, 81(2): 022309.
- [35] PEIRCE A P, DAHLEH M A, RABITZ H. Optimal control of quantum-mechanical systems: Existence, numerical approximation, and applications [J]. *Physical Review A*, 1988, 37(12): 4950.
- [36] WERSCHNIK J, GROSS E K U. Quantum optimal control theory [J]. *Journal of Physics B*, 2007, 40: 18.
- [37] CUI W, XI Z R, PAN Y. Optimal decoherence control in non-Markovian open dissipative quantum systems [J]. *Physical Review A*, 2008, 77(3): 032117.
- [38] DORIA P, CALARCO T, MONTANGERO S. Optimal control technique for many-body quantum dynamics [J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106(19): 190501.
- [39] WISEMAN H M, MILBURN G J. Quantum theory of optical feedback via homodyne detection [J]. *Physical Review Letters*, 1993, 70(5): 548.
- [40] LLOYD S. Coherent quantum feedback [J]. *Physical Review A*, 2000, 62(2): 022108.
- [41] MABUCHI H. Coherent-feedback quantum control with a dynamic compensator [J]. *Physical Review A*, 2008, 78(3): 032323.
- [42] QI B, GUO L. Is measurement-based feedback still better for quantum control systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2010, 59(6): 333 – 339.
- [43] ZHANG G, JAMES M R. Quantum feedback networks and control: a brief survey [J]. *Chinese Science Bulletin*, 2012, 57(18): 2200 – 2214.
- [44] PALAO J P, KOSLOFF R. Quantum computing by an optimal control algorithm for unitary transformations [J]. *Physical Review Letters*, 2002, 89(18): 188301.
- [45] WU J W, LI C W, TARN T J, et al. Optimal bang-bang control for SU(1, 1) coherent states [J]. *Physical Review A*, 2007, 76(5): 053403.
- [46] GORDON G, EREZ N, KURIZKI G. Universal dynamical decoherence control of noisy single- and multi-qubit systems [J]. *Journal of Physics B*, 2007, 40(9): 75 – 93.
- [47] PLASTINA F, APOLLARO T J G. Local control of entanglement in a spin chain [J]. *Physical Review Letters*, 2007, 99(17): 177210.
- [48] MARUYAMA K, IITAKA T, NORI F. Enhancement of entanglement transfer in a spin chain by phase-shift control [J]. *Physical Review A*, 2007, 75(1): 012325.
- [49] CREFFIELD C E. Quantum control and entanglement using periodic driving fields [J]. *Physical Review Letters*, 2007, 99(11): 110501.
- [50] SONG H, FU S, XI Z. Two examples on quantum control [J]. *International Journal of Software and Informatics*, 2014, 8: 327 – 337.

#### 作者简介:

宋洪婷 (1987–), 女, 博士, 2014 年博士毕业于中国科学院数学与系统科学研究院, 现任职于中国空间技术研究院钱学森空间技术实验室, 研究方向为量子信息与量子控制、量子精密测量等, E-mail: songhongting@qxslab.cn.