

# 采用联盟型博弈考虑停电风险的多微电网合作条件研究

赵敏<sup>1,2</sup>, 沈沉<sup>2†</sup>, 李顺昕<sup>1</sup>, 肖东<sup>3</sup>, 岳云力<sup>1</sup>, 李博<sup>1</sup>

(1. 国网冀北电力有限公司经济技术研究院, 北京 100038;

2. 清华大学电机系电力系统及发电设备控制和仿真国家重点实验室, 北京 100084;

3. 中国科学院水声环境特性重点实验室, 北京 100190)

**摘要:** 多个临近的微电网之间在怎样的条件下会主动形成合作, 对微电网和配电网的演化发展均具有重要意义. 本文采用联盟型博弈方法对考虑停电风险的多微电网合作判据展开研究. 基于上级配电网停电时间概率分布和各停电时间下微电网联盟的停电损失, 提出了微电网联盟停电风险的计算方法. 搭建了考虑停电风险的多微电网系统联盟型博弈模型, 从合作产生额外收益和收益分配两个层面分析了有关性质, 提出了多微电网进行合作的判据. 通过对猫儿山多微电网系统等4个多微电网系统的仿真分析, 验证了微电网之间储能和负荷分布不均匀可促成多微电网形成合作以降低停电风险, 证明了所提合作判据的正确性.

**关键词:** 停电; 风险; 判据; 合作博弈; 联盟; 微电网; 储能

**引用格式:** 赵敏, 沈沉, 李顺昕, 等. 采用联盟型博弈考虑停电风险的多微电网合作条件研究. 控制理论与应用, 2018, 35(5): 688–698

中图分类号: TP273

文献标识码: A

## Coalitional game theoretic method to study multi-microgrids cooperation condition considering outage risk

ZHAO Min<sup>1,2</sup>, SHEN Chen<sup>2†</sup>, LI Shun-xin<sup>1</sup>, XIAO Dong<sup>3</sup>, YUE Yun-li<sup>1</sup>, LI Bo<sup>1</sup>

(1. Economic Research Institute, State Grid Jibei Electric Power Company Limited, Beijing 100038, China;

2. State Key Lab of Control and Simulation of Power Systems and Generation Equipments,

Department of Electrical Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

3. Key Laboratory of Underwater Acoustic Environment, Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

**Abstract:** Cooperation condition of multiple adjacent microgrids is important to evolution and development of microgrids and distribution systems. This paper focuses on multi-microgrids cooperation criterions considering outage risk using coalitional game approach. Evaluation method of microgrid coalition outage risk based on probability distribution of interruption duration and outage loss is proposed. Coalitional game model for multi-microgrids considering outage risk is set up, and its characters are analyzed through the aspects of extra profit brought by cooperation and payoff allocation. Criterion of microgrids cooperation is put forward. Case studies of Mao'er Hill multi-microgrids and other three multi-microgrids verify the correctness of the proposed cooperation criterion. The results reveal nonuniformity of multiple microgrids in storages and loads may encourage cooperation to reduce outage risk.

**Key words:** outage; risk; criterion; cooperative game; coalition; microgrid; storage

**Citation:** ZHAO Min, SHEN Chen, LI Shunxin, et al. Coalitional game theoretic method to study multi-microgrids cooperation condition considering outage risk. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(5): 688–698

## 1 引言(Introduction)

随着国家能源局印发《关于推进新能源微电网示范项目建设的指导意见》, 一系列微电网相关政策密集出台, 极大地促进了微电网在我国的推广应用. 微电网不但能够实现分布式电源和储能的有效利用

和灵活管控, 解决边远地区的供电难题, 而且能在配电网停电情况下保证内部及周边重要负荷的持续供电, 提升配电网应对极端自然灾害的能力<sup>[1-2]</sup>. 随着日益增多的微电网接入配电网, 在一个配电区域, 多个临近的微电网将构成多微电网系统. 这些临近的微电

收稿日期: 2017-09-15; 录用日期: 2018-02-07.

†通信作者. E-mail: shenchen@mail.tsinghua.edu.cn; Tel.: +86 10-62796516.

本文责任编辑: 陈皓勇.

国家重点研发计划项目(2016YFB0900500)资助.

Supported by the National Key Research and Development Program of China (2016YFB0900500).

网为了改善某些方面的性能,有可能相互合作进行功率交换以及信息交互,进而影响多微电网系统内的资源配置、运行控制以及所在配电网的规划管理.因此,多个微电网之间在怎样的条件下会主动形成合作,是急需研究的问题,对微电网和配电网的演化发展均具有重要意义.

文献[3-4]以减小网损为目标,采用联盟型博弈的方法,对临近的微电网形成联盟进行交易的行为展开研究,得出微电网之间进行交易能有效降低整个区域网损的结论.文献[5]采用非合作博弈方法,对多微电网系统中微电网之间产生交易的条件及其影响因素展开研究,得出交易条件与服务报价上限、配电网购电价格以及配电网售电价格有关.文献[6]采用前景理论,分析了微电网之间的能量交易情况,得出结论认为微电网用户的主观性并不影响微电网之间的能量交易.文献[7]从运行控制层面研究了独立微电网之间互联的技术可行性,指出如果互联后系统频率低于频率要求或储能单元不足以提供功率缺额时,微电网不宜互联.文献[8]研究了一个配电网区域接入多个分布式电源和储能时,如何合理划分微电网的管理范围,才能满足负荷供电需求.

整体来看,已有文献主要侧重对多微电网交易和运行控制行为的研究,较少涉及当上级配电网故障情况下对多微电网主动形成合作的驱动力及相应条件的研究.实际运行中,上级配电网可能由于故障等原因停电,此时多微电网系统失去上级配电网的电能支持,各微电网之间有可能主动形成合作,实现合作区域内储能等资源的统筹优化利用,以保障重要负荷供电.从合理规划和管理的层面,需要综合考虑到上级配电网发生不同时间停电的可能性以及相应的多微电网系统停电损失,即考虑停电风险,判断是否为多微电网系统设计合作运行模式.因此,上级配电网停电时,多微电网系统中各微电网集合的停电风险如何计算?从降低停电风险的角度,微电网之间形成合作的条件是什么?上述问题的答案对含多个微电网的配电网规划设计、运行管理以及演化发展都具有重要意义.而博弈论是研究多个理性的决策者之间冲突与合作的数学理论,适用于本文研究的对象和场景.

为了解答上述问题,本文提出了多微电网系统及其所包含的任意联盟的停电风险计算方法,搭建了考虑停电风险的多微电网联盟型博弈模型,从合作产生额外收益和收益分配两方面着手分析,提出了多个微电网以降低停电风险为目标形成合作的判据,并通过对4个多微电网系统的仿真验证了本文所采用方法的有效性以及所得结论的正确性.本文工作揭示了多个微电网储能与负荷分布不均匀与它们形成合作以降低停电风险之间的关系,可为多微电网系统及配电网考虑风险的规划和运行管理提供建议,增强多微电网

系统以及区域配电网应对电力系统灾变的能力.

## 2 系统模型(System model)

设多微电网系统中共有 $N$ 个地理位置邻近的微电网,从1至 $N$ 编号.多微电网系统一般情况下与上级配电网并网运行.当上级配电网由于故障等原因停电时,多微电网系统无法从上级配电网获得电能支持,可以离网运行.假设在这种情况下微电网之间仍然可以进行电能交换.等配电网恢复供电后,多微电网系统再次并网正常运行.

### 2.1 微电网模型(Microgrid model)

上级配电网停电时,考虑较为恶劣的情形,即微电网内部分布式电源出力为0,微电网中负荷依靠储能供电.记微电网 $i$ 中全部储能的可持续放电容量为 $E_i$ .对微电网 $i$ 的负荷,依据其重要程度分为 $M_i$ 级:最重要负荷功率 $P_{i1}$ ,其单位电量折合停电损失 $\gamma_{i1}$ ,次一级重要负荷功率 $P_{i2}$ ,其单位电量折合停电损失 $\gamma_{i2}, \dots$ ,最不重要负荷功率 $P_{iM_i}$ ,其单位电量折合停电损失 $\gamma_{iM_i}$ .易知, $P_{ij} > 0, \forall j \in \{1, 2, \dots, M_i\}; \gamma_{ik} > \gamma_{i(k+1)} > 0, \forall k \in \{1, 2, \dots, M_i - 1\}$ .设配电网单次停电的持续时间为 $T, T_{ij}$ 为这段时间内微电网 $i$ 中第 $j$ 级负荷得到的供电时间,则有 $0 \leq T_{ij} \leq T, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, M_i\}$ .如果上级配电网停电时,微电网内部有持续的、稳定的电源(例如柴油发电机),通常这部分电源不能满足微电网内全体负荷的供电需求,可认为该电源仅保障微电网中最为重要负荷的供电,对其余负荷按照上述方法进行分级.

### 2.2 联盟型博弈模型(Coalitional game model)

实际运行中,上级配电网停电时间具有一定随机性.可将其看作一个连续型随机变量 $\tau$ ,其概率密度函数记作 $f(T)$ ,在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续,当 $T \leq 0$ 时, $f(T) = 0$ ;当 $T > 0$ 时, $f(T) > 0$ .为了综合考虑多微电网集合在各种停电时间可能性下的停电损失,需提出停电风险指标.风险的经典定义是各种危害场景发生的可能性与其严重程度的乘积的和<sup>[9-11]</sup>.本文采用停电损失刻画单次停电事件的严重程度.记多微电网系统中全体微电网的集合为 $G = \{1, 2, \dots, N\}$ .对 $G$ 的每一个非空子集 $S$ (又称联盟 $S$ ),当配电网停电时,联盟 $S$ 中的微电网可以进行合作,统筹优化配置储能给负荷充电的时间,使得联盟 $S$ 的停电损失最小.因此,配电网单次停电持续时间 $T$ 下,联盟 $S$ 的停电损失 $L(S; T)$ 可定义为

$$L(S; T) = \min_{\mathbf{T}_S \in \Psi_S} f_S(\mathbf{T}_S), \quad (1)$$

$$\min f_S(\mathbf{T}_S), \quad (2)$$

$$\text{s.t. } g_S(\mathbf{T}_S) \geq 0, \mathbf{h}_S(\mathbf{T}_S) \geq \mathbf{0},$$

其中: $\Psi_S$ 为优化问题(2)的可行域, $\mathbf{T}_S$ 为优化变量,由联盟 $S$ 内全体需供电负荷的充电时间 $T_{ij}(\forall i \in S,$

$\forall j \in \{1, 2, \dots, M_i\}$ ) 按顺序排列而成的列向量;  $f_S(\mathbf{T}_S)$ ,  $g_S(\mathbf{T}_S)$ ,  $\mathbf{h}_S(\mathbf{T}_S)$  分别为联盟  $S$  在充电方式  $\mathbf{T}_S$  下对应的停电损失、储能容量约束、各负荷充电时间范围约束.  $f_S(\mathbf{T}_S)$ ,  $g_S(\mathbf{T}_S)$ ,  $\mathbf{h}_S(\mathbf{T}_S) \geq \mathbf{0}$  的具体表达式如下:

$$f_S(\mathbf{T}_S) = \sum_{i \in S} \sum_{j=1}^{M_i} [\gamma_{ij} P_{ij} (T - T_{ij})], \quad (3)$$

$$g_S(\mathbf{T}_S) = \sum_{i \in S} E_i - \sum_{i \in S} \sum_{j=1}^{M_i} P_{ij} T_{ij}, \quad (4)$$

$$\begin{cases} T_{ij} \geq 0, \\ T - T_{ij} \geq 0, \end{cases} \quad \forall T_{ij} \in \mathbf{T}_S. \quad (5)$$

该优化问题为一个线性规划问题, 其可行域  $\Psi_S$  非空(验证  $\mathbf{0} \in \Psi_S$ ) 且为一个有界闭凸集, 因此其最优解存在. 定义  $L(\emptyset; T) = 0$ ,  $L(S; 0) = 0$ .

在此基础上, 可以定义考虑上级配电网停电时间不确定性的多微电网联盟  $S$  的停电风险指标  $R(S)$ :

$$R(S) = \int_0^{+\infty} f(T) L(S; T) dT, \quad (6)$$

并定义  $R(\emptyset) = 0$ .

对于联盟  $S$ , 定义其收益函数即特征函数  $V(S)$ :

$$V(S) = -R(S), \quad (7)$$

并定义  $V(\emptyset) = 0$ .

至此, 建立了多微电网系统以降低停电风险为目标的支付可转移联盟型博弈模型  $\langle G, V \rangle$ , 也称为特征函数型博弈模型.

### 3 多微电网合作条件(Microgrids cooperation conditio)

根据联盟型博弈理论, 参与者能否形成联盟, 即本文中的多微电网能否形成合作, 取决于两个方面: 一是合作能否产生额外的收益, 二是是否存在合理的收益分配方式. 本文所指的合作, 包括多微电网系统中部分微电网合作和全体微电网合作(即形成大联盟).

#### 3.1 合作产生额外收益的条件(Condition of extra profit brought by cooperation)

首先对合作能够产生额外收益的条件进行研究. 本文先给出如下定理:

**定理 1** 该联盟型博弈  $\langle G, V \rangle$  具有超可加性(证明见附录A).

定理1说明任意两个微电网联盟(包括单个微电网)形成合作后新联盟的总收益不劣于原有联盟的收益和. 也就是说, 形成合作要么产生额外收益, 要么与原有合作方式下收益和相同. 根据联盟型博弈理论以及定理1, 可以得出该联盟型博弈  $\langle G, V \rangle$  具有结合力. 也就是说, 从降低多微电网系统整体的停电风险角度, 形成大联盟不劣于其余任意一种合作方式. 但这些并

不能保证多微电网一定能形成大联盟, 甚至不能保证微电网一定能够形成合作. 实际多微电网系统发展的初始状态为各微电网之间不存在合作, 如果微电网形成合作的收益与微电网完全不合作对应的收益和相等, 那么, 各微电网显然没有足够的驱动力主动形成合作. 因此, 下面需要研究微电网合作能够产生额外收益的条件.

**定理 2** 对于多微电网系统中任意两个微电网  $i$  和  $j$ ,  $i \neq j$ ,  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ , 以下命题是等价的:

1) 微电网  $i$  和  $j$  的参数满足式(8):

$$\begin{cases} M_i = M_j, \\ \gamma_{ik} = \gamma_{jk}, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, M_i\}, \\ E_i/P_{ik} = E_j/P_{jk}, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, M_i\}; \end{cases} \quad (8)$$

2)  $\forall T \geq 0$ ,  $L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) = L(\{i, j\}; T)$ ;

3)  $V(\{i\}) + V(\{j\}) = V(\{i, j\})$ .

证明见附录A.

定理2给出了判断两个微电网合作不会产生额外收益的判据, 即式(8)所表示的负荷级数相同、各级负荷重要程度相同且储能可持续放电容量与各级负荷功率之比相同. 式(8)所刻画的其实是两个微电网之间储能资源与负荷需求分布的同构性或者说相似性. 定理2也可用于判断两个微电网联盟合作能否产生额外收益: 将这两个微电网联盟看作两个大微电网, 对集合内部的储能资源和负荷分级进行整合, 再套用定理2即可. 为了便于叙述, 称式(8)所表示的微电网  $i$  和  $j$  是“储能-负荷均匀的”. 称多微电网系统是“储能-负荷均匀的”, 当且仅当其中任意两个微电网是“储能-负荷均匀的”; 反之, 则称为“储能-负荷不均匀的”. 根据定理2易得, 对于该联盟型博弈  $\langle G, V \rangle$ , 多微电网系统合作能产生额外收益的充要条件是多微电网系统是“储能-负荷不均匀的”.

#### 3.2 收益分配(Payoff allocation)

根据联盟型博弈理论<sup>[12-13]</sup>, 对于一个支付可转移的联盟型博弈, 称一个满足个体理性与整体理性的支付向量为一个有效的分配. 其中: 支付向量为每位参与者所分得的收益构成的向量; 个体理性指每位参与者分得的收益都大于或者等于不合作时自身的收益; 整体理性指每位参与者分得的收益总和等于总联盟的收益.

**定理 3** 该联盟型博弈  $\langle G, V \rangle$  存在有效的分配(证明见附录A).

由于有效分配构成的集合一般是集值解, 不是一点解<sup>[14]</sup>; 为了便于实际操作, 本文采用一种广泛应用的、公认较为公平的一点解—Shapley值. Shapley值是满足效率公理(即整体理性)、对称公理、集成定律的唯一解; 对于满足超可加性的联盟型博弈还满足个

体理性<sup>[12]</sup>. 对该联盟型博弈 $\langle G, V \rangle$ 而言, Shapley值是一种有效的分配. Shapley值的计算公式为<sup>[13]</sup>

$$\varphi_i(V) = \sum_{S(i \in S)} \frac{(|S| - 1)!(N - |S|)!}{N!} (V(S) - V(S \setminus \{i\})), \quad (9)$$

其中:  $\varphi_i$ 为第*i*个微电网得到的分配,  $|S|$ 表示联盟*S*所含参与者的个数. Shapley值刻画了每个微电网对相应联盟收益的边际贡献.

### 3.3 微电网合作的判据 (Criterion of microgrids cooperation)

结合第3.1节和第3.2节的定理和分析可知, 在该联盟型博弈有效的分配下(例如Shapley值), 判断微电网能否形成合作等价于判断微电网合作能否产生额外收益. 因此, 可以得到如下推论:

**推论 1** 如果 $N(N \geq 2)$ 个微电网构成的多微电网系统是储能-负荷均匀的, 那么从降低停电风险的角度微电网之间不合作.

**推论 2** 如果 $N(N \geq 2)$ 个微电网构成的多微电网系统是储能-负荷不均匀的, 那么从降低停电风险的角度微电网之间会形成合作.

推论1和推论2即给出了从降低停电风险角度判断微电网是否形成合作的判据.

### 3.4 两类特殊的多微电网系统(Two specific types of multi-microgrids)

比“储能-负荷均匀的”稍微弱化的条件下, 根据两类特殊的多微电网系统关于停电损失和停电风险的性质, 可以去除合作无法降低停电损失对应的停电时间区间, 简化对微电网合作产生额外收益大小的计算过程.

1) 第1类多微电网系统: 与储能-负荷均匀的多微电网系统相比, 仅有某级负荷重要程度不同的多微电网系统. 即 $\exists q \in \{1, 2, \dots, M_i\}, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ , 有

$$\begin{cases} M_i = M_j, \\ \gamma_{ik} = \gamma_{jk}, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, M_i\}, k \neq q, \\ E_i/P_{ik} = E_j/P_{jk}, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, M_i\}, \end{cases}$$

且 $\exists x, y \in \{1, 2, \dots, N\}$ , 有 $\gamma_{xq} \neq \gamma_{yq}$ . 那么, 记  $a = E_x / \sum_{k=1}^q P_{xk}$ ,  $b = E_x / \sum_{k=1}^{q-1} P_{xk}$  ( $q > 1$ 时), 易证

$$V(G) - \sum_{i=1}^N V(\{i\}) = \sum_{i=1}^N R(\{i\}) - R(G) = \begin{cases} \int_a^{+\infty} f(T) (\sum_{i=1}^N L(\{i\}; T) - L(G; T)) dT, & q=1, \\ \int_a^b f(T) (\sum_{i=1}^N L(\{i\}; T) - L(G; T)) dT, & q>1. \end{cases} \quad (10)$$

2) 第2类多微电网系统: 与储能-负荷均匀的多微电网系统相比, 仅有某级负荷功率与储能可持续放电容量之比不同. 即 $\exists r \in \{1, 2, \dots, M_i\}, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ , 有

$$\begin{cases} M_i = M_j, \\ \gamma_{ik} = \gamma_{jk}, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, M_i\}, \\ E_i/P_{ik} = E_j/P_{jk}, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, M_i\}, k \neq r, \end{cases}$$

且 $\exists x, y \in \{1, 2, \dots, N\}$ , 有 $E_x/P_{xr} \neq E_y/P_{yr}$ . 那么, 记 $c = \min_{i \in G} \{E_i / \sum_{k=1}^{M_i} P_{ik}\}$ ,  $d = \max_{i \in G} \{E_i / \sum_{k=1}^r P_{ik}\}$ , 易证

$$V(G) - \sum_{i=1}^N V(\{i\}) = \sum_{i=1}^N R(\{i\}) - R(G) = \int_c^d f(T) (\sum_{i=1}^N L(\{i\}; T) - L(G; T)) dT. \quad (11)$$

需要说明的是, 对于任意参数的一个多微电网系统, 由于存在有效分配这一条件比较容易满足, 通用的方法是比较大联盟下收益与各个微电网收益之和, 即比较几个优化问题最优解对应的目标函数值的大小, 据此提出合作判据或者简化计算途径.

## 4 算例分析(Case study)

基于蒙特卡洛法, 仿真校验考虑停电风险的多微电网合作条件的主要步骤如图1所示.

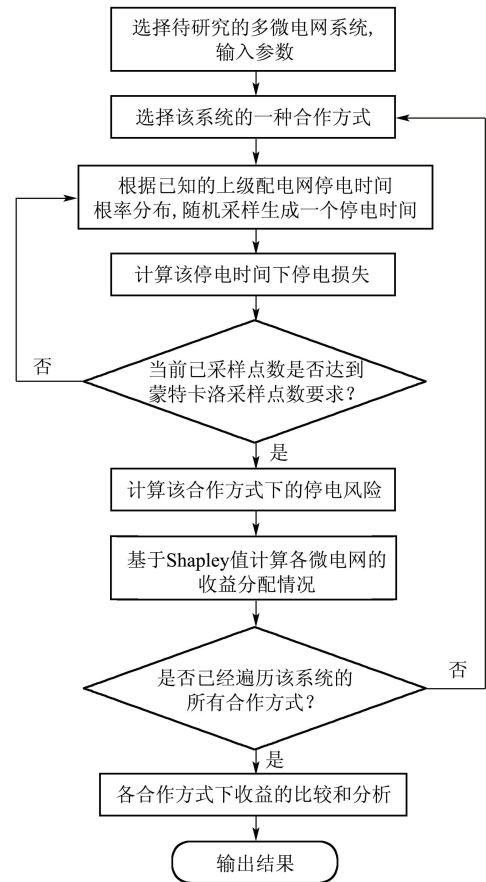


图1 算例仿真计算流程图  
Fig. 1 Simulation process of study cases

#### 4.1 猫儿山多微电网系统算例 (Case study of Mao'er Hill multi-microgrids)

采用广西猫儿山多微电网系统设计案例. 该系统接入配电网末端, 包含3个微电网( $N=3$ ), 依次编号为MG1, MG2, MG3, 如图2所示. 已知参数:

$$M_1=1, P_{11}=210 \text{ kW}, \gamma_{11}=0.8 \text{ 元}/(\text{kW} \cdot \text{h});$$

$$M_2=2, P_{21}=30 \text{ kW}, \gamma_{21}=2 \text{ 元}/(\text{kW} \cdot \text{h}),$$

$$P_{22}=40 \text{ kW}, \gamma_{22}=0.75 \text{ 元}/(\text{kW} \cdot \text{h});$$

$$M_3=2, P_{31}=220 \text{ kW}, \gamma_{31}=1.5 \text{ 元}/(\text{kW} \cdot \text{h}),$$

$$P_{32}=53 \text{ kW}, \gamma_{32}=0.7 \text{ 元}/(\text{kW} \cdot \text{h});$$

$$E_1=45 \text{ kW} \cdot \text{h}, E_2=91 \text{ kW} \cdot \text{h},$$

$$E_3=110 \text{ kW} \cdot \text{h};$$

已知上级配电网停电时间 $\tau$ (单位: h)服从 $\mu=-0.1768$ ,  $\sigma=0.9054$ 的对数正态分布 $\tau \sim LN(\mu, \sigma^2)$ . 蒙特卡洛采样点数取1000.

不同合作方式下, 多微电网系统的总收益和各微电网基于Shapley值分配的收益如表1所示. 收益为负数是因为本文定义联盟的收益为其停电风险的相反数. 从仿真结果可以看出, 由于任意两个微电网均是储能-负荷不均匀的, 任意两个微电网形成合作相对于微电网不合作, 均能有效降低停电风险. 并且, 所有合作方式中, 大联盟合作方式降低系统整体停电风险的效果最为明显: 相较于不合作方式, 停电风险降低了9.56%. 从收益分配的角度, 可以验证, 无论对于哪种合作方式, Shapley值方法均实现了对联盟内部各微

电网收益的有效分配; 特别是当形成合作能够产生额外收益时, 各微电网能够分得比较合理的份额, 使得它们愿意参与合作. 以大联盟合作方式为例, 相较于完全不合作, 3个微电网的收益分别提升了7.74%, 57.28%和6.02%; 以合作方式 $\{\{2,3\},\{1\}\}$ 为例, 相较于完全不合作, MG2和MG3的收益分别提升了48.1%和4.75%. 需要说明的是, Shapley值侧重于考虑每个微电网对其所形成的联盟停电风险降低的边际贡献, 并不是唯一的有效收益分配方式, 还可提出其他的有效收益分配方式, 并不影响本文对微电网之间是否形成合作的判断.

从另一个角度来看, 本文计算的停电风险可看作上级配电网单次停电所造成的停电损失的数学期望, 单位与停电损失的单位相同, 都是“元”. 考虑到微电网实际形成合作需要进行投资并产生花费, 也可根据表1, 从降低停电风险带来收益的角度, 大致估算微电网合作运行模式的投资是否合算. 例如, 统计已知上级配电网的平均停电频率是7.74次/年, 那么大联盟合作方式相对于不合作, 降低停电风险带来的收益为 $(561.97 - 508.24) \times 7.74 = 415.87$ 元/年. 据此可以大致估算: 如果形成大联盟的年平均投资大于415.87元/年, 则与降低停电风险带来的收益相比, 该投资是不经济的; 反之, 该投资是经济的. 例如, 如果形成大联盟的年平均投资为800元/年, 则与降低停电风险带来的收益相比, 该投资是不经济的; 如果形成大联盟的年平均投资为300元/年, 则与降低停电风险带来的收益相比, 该投资是经济的.

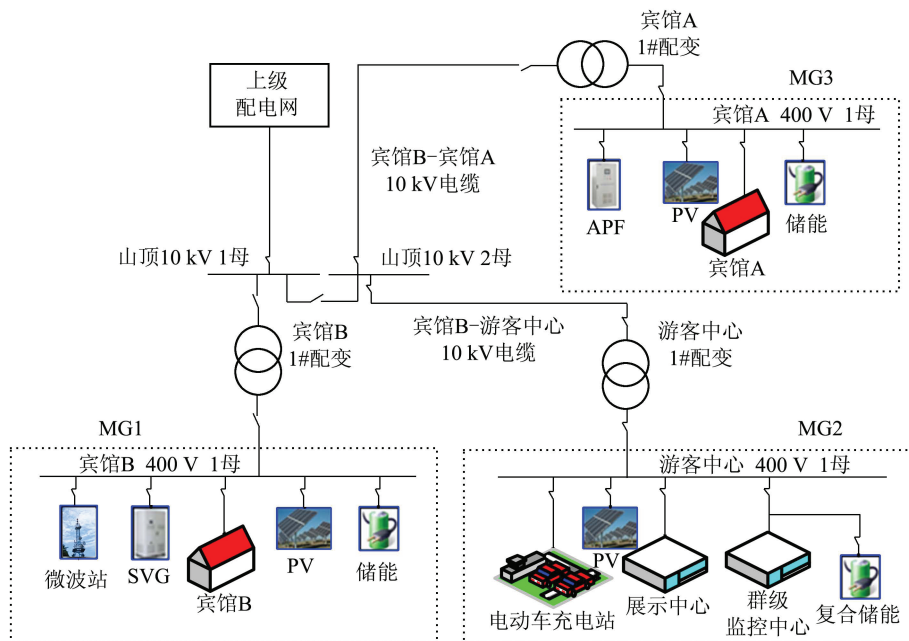


图2 猫儿山多微电网系统示意图

Fig. 2 Schematic diagram of Mao'er Hill multi-microgrids



表 1 各种合作方式下系统和各微电网收益

Table 1 Payoffs of the multi-microgrids system and each microgrid under each cooperation approach

合作方式	系统收益/元	系统收益 相较于不合作 提升百分比/%	按Shapley值各MG收益分配/元			按MG收益相较于不合作提升 百分比/%		
			MG1	MG2	MG3	MG1	MG2	MG3
{1,2,3}	-508.24	9.56	-174.92	-14.31	-319.01	7.47	57.28	6.02
{1,2},{3}	-542.36	3.49	-179.23	-23.69	-339.44	5.19	29.28	0
{2,3},{1}	-529.75	5.73	-189.04	-17.38	-323.33	0	48.10	4.75
{1,3},{2}	-539.88	3.93	-177.99	-33.50	-328.39	5.84	0	3.25
{1},{2},{3}	-561.97	0	-189.04	-33.50	-339.43	0	0	0

下面研究上级配电网不同停电时间分布参数下多微电网形成合作对降低停电风险的影响,以便为不同地区的多微电网运行模式设计提供依据.图3所示为上级配电网停电时间 $\tau$ 服从 $\sigma = 0.9054$ 的对数正态分布 $\tau \sim LN(\mu, \sigma^2)$ ,当参数 $\mu$ 变化时,上级配电网停电时间的概率密度图.可以看出,随着参数 $\mu$ 的增大,上级配电网停电时间的概率密度分布右移,发生短时间停电的概率降低,发生长时间停电的概率增加.

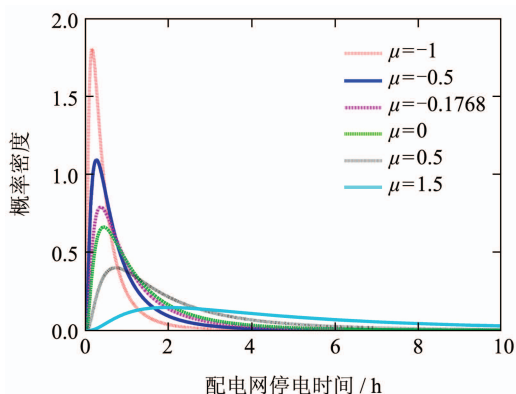


图 3  $\sigma = 0.9054$ , 不同 $\mu$ 下配电网停电时间的概率密度图  
Fig. 3 Probability density plots of distribution system interruption duration under  $\sigma = 0.9054$  and different  $\mu$

表2所示为上级配电网不同停电时间分布参数下,大联盟合作方式降低系统整体停电风险的情况.可以看出,随着参数 $\mu$ 的增大,大联盟合作方式相较于不合作的系统停电风险降低量逐步增大.对其他3种合作方式  $\{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{\{2, 3\}, \{1\}\}$  以及  $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$  进行仿真计算,可以得到类似的结论.也就是说,对猫儿山多微电网系统,随着上级配电网停电时间参数 $\mu$ 的增大,任意一种微电网合作方式相较于不合作的系统停电风险降低量都逐步增大.对照图3和表2可以得出,对于发生大停电事故概率相对较高的地区(例如容易受台风等自然灾害威胁的地区)的多微电网系统,在进行储能-负荷不均匀多微电网系统的运行模式设计时,应考虑微电网之间形成合作的运行方式,可以有效降低多微电网系统的停电风险,同时提高区域配

网应对大灾害的能力,提升配电网韧性.

表 2  $\sigma = 0.9054$ , 不同 $\mu$ 下大联盟相较于不合作降低停电风险的情况

Table 2 Outage loss reduction of grand coalition compared with no cooperation under  $\sigma = 0.9054$  and different  $\mu$

$\mu$	大联盟停电风险/元	不合作停电风险/元	大联盟相较于不合作降低停电风险/元
-1	111.77	142.04	30.27
-0.5	282.13	328.40	46.27
-0.1768	508.24	561.97	53.73
0	613.50	668.51	55.01
0.5	1144.21	1203.63	59.42
1.5	3731.55	3803.79	72.24

#### 4.2 其他多微电网系统算例 (Case study of other multi-microgrids)

下面对另外3个参数不同的多微电网系统算例进行研究,进一步验证微电网能否形成合作的条件.已知上级配电网停电时间 $\tau$ (单位: h)服从 $\mu = -0.1768$ ,  $\sigma = 0.9054$ 的对数正态分布 $\tau \sim LN(\mu, \sigma^2)$ .蒙特卡罗采样点数取1000.

多微电网系统II(以下简称系统II)参数:

$$\begin{aligned}
 M_1 = M_2 = M_3 = 2, & P_{11} = 60 \text{ kW}, P_{12} = 80 \text{ kW}, \\
 P_{21} = 30 \text{ kW}, & P_{22} = 40 \text{ kW}, P_{31} = 45 \text{ kW}, \\
 P_{32} = 60 \text{ kW}, & \gamma_{11} = \gamma_{21} = 2 \text{ 元}/(\text{kW} \cdot \text{h}), \\
 \gamma_{31} = 1 \text{ 元}/ & (\text{kW} \cdot \text{h}), \\
 \gamma_{12} = \gamma_{22} = & \gamma_{32} = 0.75 \text{ 元}/(\text{kW} \cdot \text{h}), \\
 E_1 = 182 \text{ kW} \cdot & \text{h}, E_2 = 91 \text{ kW} \cdot \text{h}, \\
 E_3 = 136.5 \text{ kW} \cdot & \text{h}.
 \end{aligned}$$

可以验证: MG1和MG2是储能-负荷均匀的,但系统II是储能-负荷不均匀的;与储能-负荷均匀的多微电网系统相比, MG3最重要负荷的重要程度与其他两个微

电网不同,属于第3.4节提出的第1类特殊多微电网系统.

不同合作方式下,系统II的收益如表3所示.可以看出,并不是任意一种微电网之间形成合作的合作方式均能降低系统的停电风险.由于MG1和MG2储能-负荷均匀,当合作方式为 $\{\{1,2\},\{3\}\}$ 时,与微电网不合作相比,系统的停电风险没有任何改善.由于MG1与MG3, MG2与MG3都是储能-负荷不均匀的,因此大联盟和 $\{\{2,3\},\{1\}\}, \{\{1,3\},\{2\}\}$ 两种部分合作方式相较于不合作,均能有效降低系统停电风险.仿真可以验证,当停电时间 $T \leq 3.0333$  s时,合作无法降低停电损失;当 $T > 3.0333$  s,合作能够降低停电损失.因此,当计算大联盟合作方式与不合作的风险之差时,积分下限不用取0,取 $E_x / \sum_{k=1}^q P_{xk} = 3.0333$  s( $q = 1$ )即可,可简化计算.

表3 各种合作方式下系统II收益

Table 3 Payoffs of the multi-microgrids system II

合作方式	系统收益/元	相较于不合作提升百分比/%
$\{\{1,2,3\}\}$	-133.94	5.22
$\{\{1,2\},\{3\}\}$	-141.32	0
$\{\{2,3\},\{1\}\}$	-136.72	3.25
$\{\{1,3\},\{2\}\}$	-134.96	4.50
$\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$	-141.32	0

多微电网系统III(以下简称系统III)参数:

$$\begin{aligned} M_1 = M_2 = M_3 = 2, P_{11} = P_{12} = 60 \text{ kW}, \\ P_{21} = 30 \text{ kW}, P_{22} = 40 \text{ kW}, \\ P_{31} = 45 \text{ kW}, P_{32} = 80 \text{ kW}, \\ \gamma_{11} = \gamma_{21} = \gamma_{31} = 2 \text{ 元}/(\text{kW} \cdot \text{h}), \\ \gamma_{12} = \gamma_{22} = \gamma_{32} = 0.75 \text{ 元}/(\text{kW} \cdot \text{h}), \\ E_1 = 182 \text{ kW} \cdot \text{h}, E_2 = 91 \text{ kW} \cdot \text{h}, \\ E_3 = 136.5 \text{ kW} \cdot \text{h}. \end{aligned}$$

可以验证:系统III是储能-负荷不均匀的,且任意两个微电网均是储能-负荷不均匀的;与储能-负荷均匀的多微电网系统相比,3个微电网的第2级负荷功率与储能可持续放电容量之比不同,属于第3.4节提出的第2类特殊多微电网系统.

不同合作方式下,系统III的收益情况如表4所示.可以看出,由于任意两个微电网均是储能-负荷不均匀的,因此,任意两个微电网形成合作相对于微电网不合作,均能有效降低停电风险.所有合作方式中,大联盟合作方式以及部分合作方式 $\{\{1,3\},\{2\}\}$ 降低系统整体停电风险的效果最为明显:相较于不合作方式,停电风险降低了0.89%.这是因为,如果将MG1和

MG3组成的联盟 $\{1,3\}$ 看作一个新的大微电网,它与MG2是储能-负荷均匀的,因此两者之间再合作不会产生额外的收益.仿真可以验证,当停电时间 $T \leq 1.092$  s或 $T \geq 1.5167$  s时,合作无法降低停电损失.因此,当计算大联盟合作方式与不合作的风险之差时,积分上限、积分下限分别取

$$\begin{aligned} \max_{i \in G} \{E_i / \sum_{k=1}^r P_{ik}\} = 1.5167 \text{ s}, \\ \min_{i \in G} \{E_i / \sum_{k=1}^{M_i} P_{ik}\} = 1.092 \text{ s} \end{aligned}$$

即可,可简化计算.

表4 各种合作方式下系统III收益

Table 4 Payoffs of the multi-microgrids system III

合作方式	系统收益/元	相较于不合作提升百分比/%
$\{\{1,2,3\}\}, \{\{1,3\},\{2\}\}$	-150.74	0.89
$\{\{1,2\},\{3\}\}$	-151.86	0.15
$\{\{2,3\},\{1\}\}$	-151.84	0.16
$\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$	-152.10	0

多微电网系统IV(以下简称系统IV)参数:

$$\begin{aligned} M_1 = M_2 = M_3 = 2, P_{11} = 60 \text{ kW}, P_{12} = 80 \text{ kW}, \\ P_{21} = 30 \text{ kW}, P_{22} = 40 \text{ kW}, P_{31} = 45 \text{ kW}, \\ P_{32} = 60 \text{ kW}, \gamma_{11} = \gamma_{21} = \gamma_{31} = 2 \text{ 元}/(\text{kW} \cdot \text{h}), \\ \gamma_{12} = \gamma_{22} = \gamma_{32} = 0.75 \text{ 元}/(\text{kW} \cdot \text{h}), \\ E_1 = 182 \text{ kW} \cdot \text{h}, E_2 = 91 \text{ kW} \cdot \text{h}, \\ E_3 = 136.5 \text{ kW} \cdot \text{h}. \end{aligned}$$

可以验证,其中任意两个微电网均是储能-负荷均匀的.

不同合作方式下,系统IV的停电风险如表5所示.由于整个多微电网系统是储能-负荷均匀的,因此各种合作方式下,系统的停电风险完全相同.仿真可以校验,无论上级配电网停电时间有多长,微电网之间形成合作与不合作的系统停电损失是相同的,因此停电风险也是相同的.对于系统IV,微电网之间形成合作并不能降低停电损失和停电风险,因此微电网不会形成合作.

表5 各种合作方式下系统IV收益

Table 5 Payoffs of the multi-microgrids system IV

合作方式	系统收益/元	相较于不合作提升百分比/%
$\{\{1,2,3\}\}, \{\{1,2\},\{3\}\}, \{\{2,3\},\{1\}\}, \{\{1,3\},\{2\}\}$	-150.74	0
$\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$	-150.74	0

综合本节对4个多微电网系统的算例分析, 可以得出, 从降低系统停电风险角度, 微电网之间储能资源与负荷供电需求的不均匀分布, 是促使微电网之间形成合作的驱动因素。

## 5 总结(Conclusions)

本文基于联盟型博弈理论和方法, 研究了从降低停电风险角度, 多微电网系统中微电网形成合作的条件。首先, 考虑微电网中负荷的重要程度和上级配电网停电时间概率分布, 提出了微电网联盟停电风险的计算方法, 建立了多微电网系统以降低停电风险为目标的联盟型博弈模型。接着, 从合作产生额外收益的角度, 提出了多微电网储能-负荷均匀的数学表达式, 证明了多微电网合作能够产生额外收益的条件。然后, 从收益分配的角度, 证明了该联盟型博弈的有关性质, 提出了采用Shapley值进行微电网收益分配的方法, 进而提出了从降低停电风险角度判断多微电网是否形成合作的判据, 以及两类特殊多微电网系统的简化计算方法。最后, 通过对4个多微电网系统的仿真分析以及对上级配电网不同停电时间分布下多微电网系统停电风险降低情况的研究, 校验了相关定理和推论, 揭示了微电网的异构性可以通过降低停电风险促进微电网之间形成合作的机理, 为含微电网的配电网形态演化和发展, 特别是微电网群的形成机理等有关研究奠定了理论基础。

## 参考文献(References):

- [1] MONTROY M, SHERICK R, HARALSON P, et al. Islands in the storm: integrating microgrids into the larger grid [J]. *IEEE Power and Energy Magazine*, 2013, 11(4): 33 – 39.
- [2] GAO Haixiang, CHEN Ying, HUANG Shaowei, et al. Distribution system resilience: an overview of research progress [J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2015, 39(23): 1 – 8.  
(高海翔, 陈颖, 黄少伟, 等. 配电网韧性及其相关研究进展 [J]. 电力系统自动化, 2015, 39(23): 1 – 8.)
- [3] SAAD W, ZHU H, POOR H V. Coalitional game theory for cooperative micro-grid distribution networks [C] // *IEEE International Conference on Communications Workshops*. Kyoto: IEEE, 2011: 1 – 5.
- [4] CHAO W, FADLULLAH Z M, KATO N, et al. GT-CFS: a game theoretic coalition formulation strategy for reducing power loss in micro grids [J]. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 2014, 25(9): 2307 – 2317.
- [5] ZHAO Min, SHEN Chen, LIU Feng, et al. A game-theoretic approach to analyzing power trading possibilities in multi-microgrids [J]. *Proceedings of the CSEE*, 2015, 35(4): 848 – 857.  
(赵敏, 沈沉, 刘锋, 等. 基于博弈论的多微电网系统交易模式研究 [J]. 中国电机工程学报, 2015, 35(4): 848 – 857.)
- [6] XIAO L, MANDAYAM N B, POOR H V. Prospect theoretic analysis of energy exchange among microgrids [J]. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2015, 6(1): 63 – 72.
- [7] YU Lei, CHEN Qifang, DUAN Liming, et al. Analysis on interconnectivity of multi-microgrids under fault condition of distribution network [J]. *Power System Technology*, 2015, 39(3): 682 – 689.  
(于雷, 陈奇芳, 段力铭, 等. 配电网故障情况下多微电网互联能力分析 [J]. 电网技术, 2015, 39(3): 682 – 689.)

- [8] AREFIFAR S A, MOHAMED Y A, EL-FOULY T H M. Supply-adequacy-based optimal construction of microgrids in smart distribution systems [J]. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2012, 3(3): 1491 – 1502.
- [9] NI M, MCCALLEY J D, VITTAL V, et al. Software implementation of online risk-based security assessment [J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2003, 18(3): 1165 – 1172.
- [10] LI Bijun, FANG Yongjie, XU Taishan. Review on online operational security risk assessment of power systems [J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2012, 36(18): 171 – 177.  
(李碧君, 方勇杰, 徐泰山. 关于电网运行安全风险在线评估的评述 [J]. 电力系统自动化, 2012, 36(18): 171 – 177.)
- [11] LI Rui, CHEN Ying, MEI Shengwei, et al. An early warning method for emergency response based on power failure risk analysis of distribution systems [J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2010, 34(16): 19 – 23.  
(李锐, 陈颖, 梅生伟, 等. 基于停电风险评估的城市配电网应急预案方法 [J]. 电力系统自动化, 2010, 34(16): 19 – 23.)
- [12] YANG Rongji, PETROSYAN L A, LI Songzhi. *Dynamic Cooperation: A Paradigm on the Cutting-edge of Game Theory* [M]. Beijing: China Market Press, 2007: 48 – 49, 61 – 62.  
(杨荣基, 彼得罗相, 李颂志. 动态合作——尖端博弈论 [M]. 北京: 中国市场出版社, 2007: 48 – 49, 61 – 62.)
- [13] HUANG Tao. *A Course of Game Theory and Its Applications* [M]. Beijing: Capital University of Economics and Business Press, 2004: 101.  
(黄涛. 博弈论教程——理论·应用 [M]. 北京: 首都经济贸易大学出版社, 2004: 101.)
- [14] SHI Xiquan. *Introduction to Cooperative Game Theory* [M]. Beijing: Peking University Press, 2012: 77 – 97.  
(施锡铨. 合作博弈引论 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2012: 77 – 97.)

## 附录A 定理证明(Appendix A Theorem proof)

本附录给出文中定理的证明要点:

### 定理 1

证 先证明  $\forall T \geq 0, \forall S, D \subseteq G, S \cap D = \emptyset$ , 式(A1)均成立:

$$L(S \cup D; T) \leq L(S; T) + L(D; T). \quad (\text{A1})$$

分1)和2)两种情形.

1) 当  $T = 0$  或  $S = \emptyset$  或  $D = \emptyset$  时, 式(A1)等号成立.

2) 当  $T > 0$  且  $S \neq \emptyset$  且  $D \neq \emptyset$  时,  $S \cap D = \emptyset$ , 记联盟  $S \cup D$  的优化问题的优化变量(列向量)  $\mathbf{T}_{S \cup D} = [\mathbf{T}_S^T \ \mathbf{T}_D^T]^T$ , 其中上角标T表示转置. 联盟  $S \cup D$  的优化问题(2)等价于:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_S(\mathbf{T}_S) + f_D(\mathbf{T}_D), \\ \text{s.t.} \quad & g_S(\mathbf{T}_S) + g_D(\mathbf{T}_D) \geq 0, \\ & \mathbf{h}_S(\mathbf{T}_S) \geq \mathbf{0}, \mathbf{h}_D(\mathbf{T}_D) \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

联盟  $S, D, S \cup D$  的优化问题均存在最优解, 记  $\mathbf{T}_S^*, \mathbf{T}_D^*, \mathbf{T}_{S \cup D}^*$  分别为对应优化问题的一个最优解, 对应的最优函数值分别为  $L(S; T), L(D; T), L(S \cup D; T)$ . 可验证  $\mathbf{T}_{S \cup D}^* = [\mathbf{T}_S^{*T} \ \mathbf{T}_D^{*T}]^T$  是  $S \cup D$  的优化问题(2)的一个可行解. 根据可行解和最优解的关系, 有

$$f_S(\mathbf{T}_S^*) + f_D(\mathbf{T}_D^*) = f_{S \cup D}(\mathbf{T}_{S \cup D}^*) \geq f_{S \cup D}(\mathbf{T}_{S \cup D}^*), \quad (\text{A3})$$

进而, 可得式(A1)成立.



综合1)和2)可得,  $\forall T \geq 0, \forall S, D \subseteq G, S \cap D = \emptyset$ , 式(A1)均成立. 那么,  $\forall S, D \subseteq G, S \cap D = \emptyset$ , 由于  $f(T) \geq 0$ , 有

$$V(S \cup D) - V(S) - V(D) = R(S) + R(D) - R(S \cup D) = \int_0^{+\infty} f(T)(L(S; T) + L(D; T) - L(S \cup D; T))dT \geq 0, \quad (\text{A4})$$

即该联盟型博弈  $(G, V)$  具有超可加性. 证毕.

### 定理 2

证 1) 证明命题2)  $\Rightarrow$  命题1).

记  $M = \min\{M_i, M_j\}$ . 分a)和b)两步证明.

a) 证明在命题2)的条件下,  $\gamma_{in} = \gamma_{jn}, E_i/P_{in} = E_j/P_{jn}, \forall n \in \{1, 2, \dots, M\}$ .

采用第二数学归纳法证明.

① 当  $n = 1$  时, 证明  $\gamma_{i1} = \gamma_{j1}, E_i/P_{i1} = E_j/P_{j1}$ .

先采用反证法证明  $\gamma_{i1} = \gamma_{j1}$ . 假设  $\gamma_{i1} \neq \gamma_{j1}$ . 当  $T > \max\{E_i/P_{i1}, E_j/P_{j1}\}$  时, 有  $L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) > L(\{i, j\}; T)$ , 与已知  $L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) = L(\{i, j\}; T)$  矛盾; 故假设不成立, 有:  $\gamma_{i1} = \gamma_{j1}$ .

再采用反证法证明  $E_i/P_{i1} = E_j/P_{j1}$ . 假设  $E_i/P_{i1} \neq E_j/P_{j1}$ , 不妨设  $E_i/P_{i1} > E_j/P_{j1}$ . 当  $\max\{E_i/(P_{i1}+P_{i2}), E_j/P_{j1}\} < T < E_i/P_{i1}$  时, 微电网  $i$  的优化问题(2)最优解为  $T_{i1} = T, T_{i2} = (E_i - P_{i1}T)/P_{i2}, T_{ik} = 0, \forall k \in \{3, 4, \dots, M_i\}$ , 最优目标函数值为  $L(\{i\}; T)$ . 微电网  $j$  的优化问题(2)最优解为  $T_{j1} = E_j/P_{j1}, T_{jl} = 0, \forall l \in \{2, 3, \dots, M_j\}$ , 最优目标函数值为  $L(\{j\}; T)$ .

令  $\delta_1 = \min\{E_i - P_{i1}T, P_{j1}T - E_j\}/2$ , 则  $\delta_1 > 0$ , 并且可以验证:  $T_{i1} = T, T_{i2} = (E_i - P_{i1}T)/P_{i2} - \delta_1/P_{i2}, T_{ik} = 0, \forall k \in \{3, 4, \dots, M_i\}, T_{j1} = E_j/P_{j1} + \delta_1/P_{j1}, T_{jl} = 0, \forall l \in \{2, 3, \dots, M_j\}$  为联盟  $\{i, j\}$  的优化问题(2)的一个可行解, 对应的目标函数值记为  $f_{\delta_1}(\{i, j\}; T)$ .

由  $\gamma_{i1} > \gamma_{j1}$  以及  $\delta_1 > 0$ , 可得

$$L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) - f_{\delta_1}(\{i, j\}; T) = (\gamma_{j1} - \gamma_{i1})\delta_1 = (\gamma_{i1} - \gamma_{j1})\delta_1 > 0. \quad (\text{A5})$$

由于  $L(\{i, j\}; T)$  为联盟  $\{i, j\}$  的优化问题(2)的最优目标函数值, 则可得  $L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) > L(\{i, j\}; T)$ , 与已知  $L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) = L(\{i, j\}; T)$  矛盾; 故假设不成立, 有  $E_i/P_{i1} = E_j/P_{j1}$ .

② 假设当  $n < m (2 \leq m \leq M, m$  为正整数) 时,  $\gamma_{in} = \gamma_{jn}, E_i/P_{in} = E_j/P_{jn}$  成立, 需证明当  $n = m$  时,  $\gamma_{im} = \gamma_{jm}, E_i/P_{im} = E_j/P_{jm}$  成立.

先采用反证法证明  $\gamma_{im} = \gamma_{jm}$ . 假设  $\gamma_{im} \neq \gamma_{jm}$ , 不妨设  $\gamma_{im} > \gamma_{jm}$ . 当  $\max\{E_i/\sum_{k=1}^m P_{ik}, E_j/\sum_{l=1}^m P_{jl}\} < T < E_i/\sum_{k=1}^{m-1} P_{ik}$  时, 微电网  $i$  的优化问题(2)最优解为

$$\begin{aligned} T_{i1} &= T_{i2} = \dots = T_{i(m-1)} = T, \\ T_{im} &= (E_i - \sum_{k=1}^{m-1} P_{ik}T)/P_{im}, \\ T_{i(m+1)} &= T_{i(m+2)} = \dots = T_{iM_i} = 0, \end{aligned}$$

最优目标函数值为  $L(\{i\}; T)$ . 由于  $E_i/P_{in} = E_j/P_{jn}$  对  $\forall n \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  成立, 则有  $E_i/\sum_{k=1}^{m-1} P_{ik} = E_j/\sum_{l=1}^{m-1} P_{jl}$ , 那

么有  $E_j/\sum_{l=1}^m P_{jl} < T < E_j/\sum_{l=1}^{m-1} P_{jl}$ , 微电网  $j$  的优化问题(2)最优解为

$$\begin{aligned} T_{j1} &= T_{j2} = \dots = T_{j(m-1)} = T, \\ T_{jm} &= (E_j - \sum_{l=1}^{m-1} P_{jl}T)/P_{jm}, \\ T_{j(m+1)} &= T_{j(m+2)} = \dots = T_{jM_j} = 0, \end{aligned}$$

最优目标函数值为  $L(\{j\}; T)$ .

令  $\varepsilon_m = \min\{\sum_{k=1}^m P_{ik}T - E_i, E_j - \sum_{l=1}^{m-1} P_{jl}T\}/2$ , 则  $\varepsilon_m > 0$ , 并且可以验证

$$\begin{aligned} T_{i1} &= T_{i2} = \dots = T_{i(m-1)} = T, \\ T_{im} &= (E_i - \sum_{k=1}^{m-1} P_{ik}T)/P_{im} + \varepsilon_m/P_{im}, \\ T_{i(m+1)} &= T_{i(m+2)} = \dots = T_{iM_i} = 0, \\ T_{j1} &= T_{j2} = \dots = T_{j(m-1)} = T, \\ T_{jm} &= (E_j - \sum_{l=1}^{m-1} P_{jl}T)/P_{jm} - \varepsilon_m/P_{jm}, \\ T_{j(m+1)} &= T_{j(m+2)} = \dots = T_{jM_j} = 0 \end{aligned}$$

是联盟  $\{i, j\}$  的优化问题(2)的一个可行解, 对应的目标函数值记为  $f_{\varepsilon_m}(\{i, j\}; T)$ .

由  $\gamma_{im} > \gamma_{jm}$  和  $\varepsilon_m > 0$ , 有

$$\begin{aligned} L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) - f_{\varepsilon_m}(\{i, j\}; T) = \\ (\gamma_{im} - \gamma_{jm})\varepsilon_m > 0. \quad (\text{A6}) \end{aligned}$$

由于  $L(\{i, j\}; T)$  为联盟  $\{i, j\}$  的优化问题(2)的最优目标函数值, 则可得  $L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) > L(\{i, j\}; T)$ , 与已知  $L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) = L(\{i, j\}; T)$  矛盾; 故假设不成立, 有  $\gamma_{im} = \gamma_{jm}$ .

再采用反证法证明  $E_i/P_{im} = E_j/P_{jm}$ . 假设  $E_i/P_{im} \neq E_j/P_{jm}$ , 不妨设  $E_i/P_{im} > E_j/P_{jm}$ . 已知  $\gamma_{in} = \gamma_{jn}, E_i/P_{in} = E_j/P_{jn}$ , 对  $\forall n \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  成立. 已知  $2 \leq m \leq M, M = \min\{M_i, M_j\}, m$  为正整数. 下面分i)和ii)两种情形.

i) 当  $m < M_i$  时. 此时微电网  $i$  的第  $(m+1)$  级负荷存在.

当  $\max\{E_i/\sum_{k=1}^{m+1} P_{ik}, E_j/\sum_{l=1}^m P_{jl}\} < T < E_i/\sum_{k=1}^m P_{ik}$  时, 微电网  $i$  的优化问题(2)最优解为  $T_{i1} = T_{i2} = \dots = T_{im} = T, T_{i(m+1)} = (E_i - \sum_{k=1}^m P_{ik}T)/P_{i(m+1)}, T_{i(m+2)} = T_{i(m+3)} = \dots = T_{iM_i} = 0$ , 最优目标函数值为  $L(\{i\}; T)$ . 由于

$$E_j/\sum_{l=1}^m P_{jl} < T < E_j/\sum_{l=1}^{m-1} P_{jl},$$

微电网  $j$  的优化问题(2)最优解为

$$\begin{aligned} T_{j1} &= T_{j2} = \dots = T_{j(m-1)} = T, \\ T_{jm} &= (E_j - \sum_{l=1}^{m-1} P_{jl}T)/P_{jm}, \\ T_{j(m+1)} &= T_{j(m+2)} = \dots = T_{jM_j} = 0, \end{aligned}$$

最优目标函数值为  $L(\{j\}; T)$ .

令  $\delta_m = \min\{E_i - \sum_{k=1}^m P_{ik}T, \sum_{l=1}^m P_{jl}T - E_j\}/2$ , 则  $\delta_m > 0$ , 并且可以验证

$$\begin{aligned} T_{i1} &= T_{i2} = \dots = T_{im} = T, \\ T_{i(m+1)} &= (E_i - \sum_{k=1}^m P_{ik}T)/P_{i(m+1)} - \delta_m/P_{i(m+1)}, \\ T_{i(m+2)} &= T_{i(m+3)} = \dots = T_{iM_i} = 0, \\ T_{j1} &= T_{j2} = \dots = T_{j(m-1)} = T, \\ T_{jm} &= (E_j - \sum_{l=1}^{m-1} P_{jl}T)/P_{jm} + \delta_m/P_{jm}, \\ T_{j(m+1)} &= T_{j(m+2)} = \dots = T_{jM_j} = 0 \end{aligned}$$

为联盟  $\{i, j\}$  的优化问题(2)的一个可行解, 对应的目标函数值记为  $f_{\delta_m}(\{i, j\}; T)$ .

由  $\gamma_{im} > \gamma_{i(m+1)}$  和  $\delta_m > 0$ , 可得

$$\begin{aligned} L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) - f_{\delta_m}(\{i, j\}; T) &= \\ (\gamma_{jm} - \gamma_{i(m+1)})\delta_m &> 0. \end{aligned} \tag{A7}$$

由于  $L(\{i, j\}; T)$  为联盟  $\{i, j\}$  的优化问题(2)的最优目标函数值, 则可得  $L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) > L(\{i, j\}; T)$ , 与已知  $L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) = L(\{i, j\}; T)$  矛盾; 故当  $m < M_i$  时, 假设不成立, 有:  $E_i/P_{im} = E_j/P_{jm}$ .

ii) 当  $m = M_i$  时. 此时微电网  $i$  的第  $(m+1)$  级负荷不存在.

当  $E_j/\sum_{l=1}^m P_{jl} < T < E_i/\sum_{k=1}^m P_{ik}$  时, 微电网  $i$  的优化问题(2) 最优解为  $T_{i1} = T_{i2} = \dots = T_{im} = T$ , 最优目标函数值  $L(\{i\}; T) = 0$ . 由于  $E_j/\sum_{l=1}^m P_{jl} < T < E_i/\sum_{l=1}^{m-1} P_{jl}$ , 微电网  $j$  的优化问题(2) 最优解为

$$\begin{aligned} T_{j1} &= T_{j2} = \dots = T_{j(m-1)} = T, \\ T_{jm} &= (E_j - \sum_{l=1}^{m-1} P_{jl}T)/P_{jm}, \\ T_{j(m+1)} &= T_{j(m+2)} = \dots = T_{jM_j} = 0, \end{aligned}$$

最优目标函数值为  $L(\{j\}; T) = 0$ .

令  $\delta'_m = \min\{E_i - \sum_{k=1}^m P_{ik}T, \sum_{l=1}^m P_{jl}T - E_j\}/2$ , 则  $\delta'_m > 0$ , 并且可以验证:  $T_{i1} = T_{i2} = \dots = T_{im} = T$ ,  $T_{j1} = T_{j2} = \dots = T_{j(m-1)} = T$ ,  $T_{jm} = (E_j - \sum_{l=1}^{m-1} P_{jl}T)/P_{jm} + \delta'_m/P_{jm}$ ,  $T_{j(m+1)} = T_{j(m+2)} = \dots = T_{jM_j} = 0$  为联盟  $\{i, j\}$  的优化问题(2)的一个可行解, 对应的目标函数值记为  $f_{\delta'_m}(\{i, j\}; T)$ , 有

$$f_{\delta'_m}(\{i, j\}; T) < L(\{j\}; T) = L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T). \tag{A8}$$

由于  $L(\{i, j\}; T)$  为联盟  $\{i, j\}$  的优化问题(2)的最优目标函数值, 则可得  $L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) > L(\{i, j\}; T)$ , 与已知  $L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) = L(\{i, j\}; T)$  矛盾; 故当  $m = M_i$  时, 假设不成立, 有  $E_i/P_{im} = E_j/P_{jm}$ .

综合 i) 和 ii) 的两种情形, 可得:  $E_i/P_{im} = E_j/P_{jm}$ .

综合 ① 和 ②, 采用第二数学归纳法证明了  $\gamma_{in} = \gamma_{jn}$ ,  $E_i/P_{in} = E_j/P_{jn}$ ,  $\forall n \in \{1, 2, \dots, M\}$ .

b) 证明  $M_i = M_j$ .

采用反证法证明. 假设  $M_i \neq M_j$ , 不妨设  $M_i > M_j$ , 那么  $M = \min\{M_i, M_j\} = M_j$ ; 微电网  $i$  存在第  $(M+1)$  级负荷, 微电网  $j$  不存在第  $(M+1)$  级负荷, 只有  $M$  级负荷. 已知  $\gamma_{in} = \gamma_{jn}$ ,  $E_i/P_{in} = E_j/P_{jn}$ ,  $\forall n \in \{1, 2, \dots, M\}$  (已证明), 那么  $E_i/\sum_{k=1}^M P_{ik} = E_j/\sum_{l=1}^M P_{jl}$ .

当  $E_i/\sum_{k=1}^{M+1} P_{ik} < T < E_i/\sum_{k=1}^M P_{ik}$  时, 微电网  $i$  的优化问题(2) 最优解为  $T_{i1} = T_{i2} = \dots = T_{iM} = T$ ,  $T_{i(M+1)} = (E_i - \sum_{k=1}^M P_{ik}T)/P_{i(M+1)}$ ,  $T_{i(M+2)} = T_{i(M+3)} = \dots = T_{iM_i} = 0$ , 最优目标函数值为  $L(\{i\}; T)$ . 由于

$$T < E_i/\sum_{k=1}^M P_{ik} = E_j/\sum_{l=1}^M P_{jl},$$

微电网  $j$  的优化问题(2) 最优解为  $T_{j1} = T_{j2} = \dots = T_{jM} = T$ , 最优目标函数值  $L(\{j\}; T) = 0$ .

令  $\xi = \min\{\sum_{k=1}^{M+1} P_{ik}T - E_i, E_j - \sum_{l=1}^M P_{jl}T\}/2$ , 则  $\xi > 0$ ,

并且可以验证

$$\begin{aligned} T_{i1} &= T_{i2} = \dots = T_{iM} = T, \\ T_{i(M+1)} &= (E_i - \sum_{k=1}^M P_{ik}T)/P_{i(M+1)} + \xi/P_{i(M+1)}, \\ T_{i(M+2)} &= T_{i(M+3)} = \dots = T_{iM_i} = 0, \\ T_{j1} &= T_{j2} = \dots = T_{jM} = T \end{aligned}$$

为联盟  $\{i, j\}$  的优化问题(2)的一个可行解, 对应的目标函数值记为  $f_{\xi}(\{i, j\}; T)$ , 有

$$f_{\xi}(\{i, j\}; T) < L(\{i\}; T) = L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T). \tag{A9}$$

由于  $L(\{i, j\}; T)$  为联盟  $\{i, j\}$  的优化问题(2)的最优目标函数值, 则可得  $L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) > L(\{i, j\}; T)$ , 与已知  $L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) = L(\{i, j\}; T)$  矛盾; 故假设不成立, 有  $M_i = M_j$ .

综合 a) 和 b), 由命题 2) 成立可推出微电网  $i$  和  $j$  满足式 (8), 命题 1) 成立.

2) 证明命题 3)  $\Rightarrow$  命题 2).

已知  $V(\{i\}) + V(\{j\}) - V(\{i, j\}) = 0$ , 即

$$\int_0^{+\infty} f(T)(L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) - L(\{i, j\}; T))dT = 0. \tag{A10}$$

易证,  $L(\{i\}; T)$ ,  $L(\{j\}; T)$  和  $L(\{i, j\}; T)$  均是  $T \in [0, +\infty)$  上的连续函数. 根据已证明的式(A1),

$$L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) - L(\{i, j\}; T) \geq 0.$$

由于  $f(T) \geq 0$  且  $f(T)$  是  $T \in [0, +\infty)$  上的连续函数, 则有  $f(T)(L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) - L(\{i, j\}; T))$  是  $T \in [0, +\infty)$  上的连续函数且

$$f(T)(L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) - L(\{i, j\}; T)) \geq 0.$$

根据连续函数的局部保号性以及积分的性质, 易证对  $\forall T \in [0, +\infty)$ :

$$f(T)(L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) - L(\{i, j\}; T)) = 0. \tag{A11}$$

$T > 0$ 时 $f(T) > 0$ , 由式(A11)有 $L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) - L(\{i, j\}; T) = 0$ ;  $T = 0$ 时,  $L(\{i\}; T) = L(\{j\}; T) = L(\{i, j\}; T) = 0$ , 因此也有

$$L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) - L(\{i, j\}; T) = 0.$$

综上,  $\forall T \geq 0$ ,  $L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) = L(\{i, j\}; T)$  恒成立, 即命题2)得证.

3) 证明命题1)  $\Rightarrow$  命题3).

记 $E_j/E_i = r > 0$ , 那么对 $\forall k \in \{1, 2, \dots, M_i\}$ , 有 $P_{jk}/P_{ik} = r$ . 记

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\{i\}} &= [T_{i1} \ T_{i2} \ \dots \ T_{iM_i}]^T, \\ \mathbf{T}_{\{j\}} &= [T_{j1} \ T_{j2} \ \dots \ T_{jM_j}]^T, \\ \mathbf{T}_{\{i,j\}} &= [\mathbf{T}_{\{i\}}^T \ \mathbf{T}_{\{j\}}^T]^T \end{aligned}$$

分别为微电网 $i, j$ 和联盟 $\{i, j\}$ 的优化问题(2)的优化变量, 其中 $\mathbf{T}_{\{i\}}$ 与 $\mathbf{T}_{\{j\}}$ 维度相同. 微电网 $i$ , 微电网 $j$ , 联盟 $\{i, j\}$ 的优化问题(2)可以分别表示为

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{T}_{\{i\}}), \\ \text{s.t.} \quad & g(\mathbf{T}_{\{i\}}) \geq 0, \mathbf{0} \leq \mathbf{T}_{\{i\}} \leq \mathbf{T}, \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

$$\begin{aligned} \min \quad & rf(\mathbf{T}_{\{j\}}), \\ \text{s.t.} \quad & rg(\mathbf{T}_{\{j\}}) \geq 0, \mathbf{0} \leq \mathbf{T}_{\{j\}} \leq \mathbf{T}, \end{aligned} \quad (\text{A13})$$

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{T}_{\{i\}}) + rf(\mathbf{T}_{\{j\}}), \\ \text{s.t.} \quad & g(\mathbf{T}_{\{i\}}) + rg(\mathbf{T}_{\{j\}}) \geq 0, \\ & \mathbf{0} \leq \mathbf{T}_{\{i\}} \leq \mathbf{T}, \mathbf{0} \leq r\mathbf{T}_{\{j\}} \leq r\mathbf{T}, \end{aligned} \quad (\text{A14})$$

其中:  $\mathbf{T}$ 为一个 $M_i$ 维的列向量, 每个元素均为 $T$ ;  $\mathbf{0} \leq \mathbf{T}_{\{i\}} \leq \mathbf{T}$ 表示优化变量 $\mathbf{T}_{\{i\}}$ 的每个元素均介于 $0$ 和 $T$ 之间.

由于线性规划问题(A12)的可行域非空且为闭凸集, 其最优解存在, 记为 $\mathbf{T}^*$ . 易验证 $\mathbf{T}^*$ 也是线性规划问题(A13)最优解. 线性规划问题(A12)在 $\mathbf{T}^*$ 处满足K-T必要条件. 可以验证,  $[\mathbf{T}^{*\text{T}} \ \mathbf{T}^{*\text{T}}]^T$ 为线性规划问题(A14)的一个可行解, 且线性规划问题(A14)在 $[\mathbf{T}^{*\text{T}} \ \mathbf{T}^{*\text{T}}]^T$ 处满足K-T必要条件. 根据凸规划的性质,  $[\mathbf{T}^{*\text{T}} \ \mathbf{T}^{*\text{T}}]^T$ 为线性规划问题(A14)的最优解. 因此, 有

$$L(\{i, j\}; T) = (1+r)f(\mathbf{T}^*). \quad (\text{A15})$$

可得 $\forall T \geq 0$ ,  $L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) = L(\{i, j\}; T)$ 恒成立, 则有

$$\begin{aligned} V(\{i\}) + V(\{j\}) - V(\{i, j\}) &= \\ \int_0^{+\infty} f(T)(L(\{i\}; T) + L(\{j\}; T) - L(\{i, j\}; T))dT &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A16})$$

即命题3)得证.

综合1)–3), 命题1)–3)是等价的. 证毕.

### 定理 3

证 根据文献[14]第77页的推导, 可得: 支付可转移联盟型博弈的有效分配不存在的充要条件是 $\sum_{i=1}^N V(\{i\}) > V(G)$ . 那么, 其逆否命题—支付可转移联盟型博弈的有效分配存在的充要条件是 $\sum_{i=1}^N V(\{i\}) \leq V(G)$ , 也成立. 根据定理1, 该联盟型博弈 $(G, V)$ 具有结合力, 有 $\sum_{i=1}^N V(\{i\}) \leq V(G)$ . 因此, 该联盟型博弈 $(G, V)$ 存在有效的分配. 证毕.

### 作者简介:

赵敏 (1988–), 女, 博士, 主要研究方向为博弈论、微电网、配电网规划, E-mail: zhaomin429@163.com;

沈沉 (1970–), 男, 博士, 主要研究方向为电力系统分析与控制、新能源发电、智能电网, E-mail: shenchen@mail.tsinghua.edu.cn;

李顺昕 (1978–), 男, 硕士, 主要研究方向为电网规划、保护控制、能源战略分析, E-mail: sumcy@126.com;

肖东 (1984–), 男, 博士, 主要研究方向为信号处理、网络分析、博弈论, E-mail: xiaodong@mail.ioa.ac.cn;

岳云力 (1987–), 男, 硕士, 主要研究方向为配电网规划、能源政策研究, E-mail: yueyunli999@163.com;

李博 (1982–), 男, 博士, 主要研究方向为配电网规划、配电网运行管理, E-mail: jbjylibo@163.com.