

# 基于模糊区间值GM(1, 1)预测模型及几何布朗运动的 矿山投资决策

李守军<sup>1,2†</sup>, 马小平<sup>2</sup>, 杨春雨<sup>2</sup>

(1. 宿迁学院 机电工程学院, 江苏 宿迁 223800; 2. 中国矿业大学 信息与控制工程学院, 江苏 徐州 221166)

**摘要:** 提出一种新的投资决策方法并应用到矿山投资实践中去是本文的研究核心. 该方法以净现值为目标函数, 以价格预测及成本评估为中心, 综合应用了模糊区间数灰色预测方法和几何布朗运动随机过程理论. 首先, 给出了模糊数到区间灰数的转换方法, 然后, 采用对区间序列上、下限分别预测的思路建立了模糊区间数灰色预测模型, 并给出了模型精度的检验标准. 接着, 通过路径矩阵、组合实验、可视化比较及人工分析的方法得到了合理的布朗运动系数值完成了成本预测. 最后, 结合一个铜矿投资项目, 分别应用所提出的模糊区间灰色模型及几何布朗运动理论对价格和成本进行了预测和模拟, 成功地实现了金属矿山风险投资的评估并形成了可行性的决策参考.

**关键词:** 模糊区间; GM(1, 1); 几何布朗运动; 矿山投资; 评估决策

**引用格式:** 李守军, 马小平, 杨春雨. 基于模糊区间值GM(1, 1)预测模型及几何布朗运动的矿山投资决策. 控制理论与应用, 2019, 36(4): 636 – 650

中图分类号: N941.5 文献标识码: A

DOI: 10.7641/CTA.2018.70835

## Decision making of mine investment based on fuzzy interval-valued GM(1, 1) model and geometric Brown motion

LI Shou-jun<sup>1,2†</sup>, MA Xiao-ping<sup>2</sup>, YANG Chun-yu<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical and Electrical Engineering, Suqian College, Suqian Jiangsu 223800, China;

2. School of Information and Control Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou Jiangsu 221166, China)

**Abstract:** The core of this paper is to put forward a new method of investment decision-making and apply it to the practice of mine investment. Taking the net present value as the objective function and the prediction of price and cost as the center, the method has combined the fuzzy interval grey prediction method with the geometric Brown motion stochastic process together. The transformation method of fuzzy number to interval grey number is given firstly. Then, the grey interval prediction model is established based on the idea of forecasting the upper and lower limits of interval sequence respectively. To obtain operating cost, key Brownian motion coefficients are obtained by path matrix, combination experiment, visual comparison and manual analysis. Finally, through a copper investment project, the proposed method based on fuzzy interval GM(1, 1) prediction model and Brownian motion stochastic process theory is used to predict the metal price and operating costs successfully. As a result, risk assessment of metal mine is realized and feasible decision-making is formed.

**Key words:** fuzzy interval; GM(1, 1); geometric Brown motion; mine investment; evaluation decision making

**Citation:** LI Shoujun, MA Xiaoping, YANG Chunyu. Decision making of mine investment based on fuzzy interval-valued GM(1, 1) model and geometric Brown motion. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(4): 636 – 650

## 1 引言

矿业投资具有较高风险, 资金消耗巨大, 投资失效不可挽救, 若能够提出较为合理的风险评估与决策模型, 对于指导资源有效配置、降低矿业投资风险将具有重要意义. 在不确定的物理环境与经济环境下, 项

目决策与评估面临的主要挑战是如何处理资金投入的不确定性问题. 矿山投资的不确定性是投资风险的主要来源<sup>[1]</sup>, 主要表现为输入变量的不确定性, 包括价格、成本、品味、折现率以及其他扰动变量; 这些变量往往是互相耦合的、非线性的. 因此, 为做出正确有

收稿日期: 2017–11–16; 录用日期: 2018–05–25.

†通信作者. E-mail: lishoujunbox@126.com; Tel.: +86 13912014197.

本文责任编辑: 李少远.

国家自然科学基金项目(61374043, 61603392), 江苏高校品牌专业建设工程项目(PPZY2015C252)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61374043, 61603392) and the University Brand Major Construction Project of Jiangsu Province (PPZY2015C252).

效的投资决策, 需要深入分析和评估各种不确定因素, 识别和量化那些最可能导致风险的因素, 建立切实有效的风险评估与决策模型, 才能更好的指导矿山投资决策。

决策理论及研究方法, 比较成熟和应用较为广泛的有现金流量方法<sup>[2-3]</sup>、决策树<sup>[4-5]</sup>、蒙特卡洛模拟<sup>[6-7]</sup>和实物期权<sup>[8-9]</sup>方法。这些理论或方法已经广泛应用到了矿山的投资决策中。譬如, Dimitrakopoulos R使用蒙特卡罗技术去量化矿石品味与吨位等地质属性不确定的参数<sup>[10]</sup>。李松青等给出了基于延迟实物期权的矿业投资决策模型<sup>[11]</sup>。也有文献采用随机方法解决参数不确定性的问题的, 如均值回归过程<sup>[12]</sup>。关于此类方法的研究与实现, 见诸于不少文献, 不再列举。它们一个共同的特点是离不开大量历史数据或统计理论的支撑, 数据量的多少, 统计方法是否恰当对于决策成败起着关键作用, 比如线性回归方法, 为确定回归过程参数, 需要大量的历史数据并进行复杂的回归分析, 对于小数据贫信息无能为力。

大数据技术的发展促进了基于大样本的统计决策理论的发展, 但是当决策参数个数较多, 耦合关系较为复杂时, 分析难度与计算复杂度也随之增大。对于某些决策参数, 可以获得的数据量并不能达到统计学30个以上的要求, 譬如5年内的劳动力成本数据。劳动力成本变化主要体现在工资的调整上, 虽有调整但频率不高, 可资统计分析的数据量并不是很大。如果数据量达不到统计学要求的30个以上, 很难让人信服决策结论是有效的。故而, 基于统计理论的决策方法有时显得极为无奈。

转而思考小样本为基础的决策方法。与小样本有关的科学而系统的研究理论, 比较成熟的是我国邓聚龙教授提出的灰色预测理论<sup>[13]</sup>, 它仅需要少量几个数据便可完成精确的预测, 已经在工业、农业、能源、军事、交通上获得了广泛的应用。该理论的基础是灰数及基于灰数的计算, 需要将所有决策数据进行灰化处理。实际上许多决策参数均具有灰色特点, 往往表现为一个区间形式, 灰色理论称其为区间灰数。遗憾的是关于区间灰数序列预测的研究成果并不多见。主要有Zeng B等提出的基于中心点的三角加权白化权函数预测法<sup>[14]</sup>, 曾祥艳提出的基于累积法的振荡序列模糊区间预测法<sup>[15]</sup>, 但均未考虑实际模糊数向区间灰数的转换方法, 实用性值得商榷。文献<sup>[16-17]</sup>分别给出了区间灰数的表征与算法改进, 区间灰数建模的包络带思想, 但均未给出区间灰数预测的具体步骤, 更未提出模糊数向区间灰数的转换思路。Gligoric等<sup>[18]</sup>采用灰色GM(1, 1)模型和模糊区间理论相结合的方法对锌矿投资决策进行了研究, 但其于最小二乘法的模型参数获取方法值得商榷, 在对数据预处理时进行了简单的均值和方差计算, 值得借鉴。

在本文中, 笔者将区间灰数理论与模糊理论相结合, 并基于GM(1, 1)预测模型, 力求探索出一种采矿投资预测与决策的新思路。其次, 笔者采用经典可靠的净现值(net present value, NPV)方法设计评价决策的目标函数, 因为NPV是项目盈利能力的首选标准, 反映了对所有者权益的净贡献。其次, 在采矿项目启动之前, 也经常通过计算NPV来对其评估<sup>[19]</sup>。研究内容组织如下:

1) 首先, 给出一种模糊数的区间灰值表示方法, 提出三角模糊数向区间灰值变换的转换公式并给以理论证明。

2) 然后, 对预测方法的影响因素进行分类研究。一类以产品价格为代表的影响因素, 可以采用灰色理论进行预测, 将区间预测转变为对其上、下限的分别预测; 另一类以成本为代表的影响因素, 可以采用布朗运动进行模拟, 而正确给定布朗运动的参数是模拟成败的关键。本文在理论模型的基础上, 通过组合仿真实验方法给出了漂移系数与浮动系数的合理值。

3) 最后, 结合一个铜矿风险投资项目, 分别应用模糊区间GM(1, 1)预测模型和几何布朗运动随机过程理论对金属价格和运营成本进行了预测和模拟, 并将预测或模拟结论应用到决策目标函数中去, 实现了金属矿山的风险投资评估。

## 2 理论体系

包括模糊区间的形成过程, 区间值的运算法则, 模糊区间值GM(1, 1)预测模型, 通过组合参数及轨迹可视化确定几何布朗运动关键系数的方法。

### 2.1 模糊区间的形成

给出模糊区间的形成过程与运算法则。

**定理 1** 模糊数可以表示为区间值形式。

文献<sup>[20-21]</sup>给出了定理的证明, 并且指出具有 $\lambda$ 水平 $\tilde{A}^\lambda = [a^\lambda, b^\lambda]$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ 的模糊数 $\tilde{A}$ 概率均值的区间值为 $E(\tilde{A}) = [\int_0^1 a^\lambda \lambda, \int_0^1 b^\lambda \lambda]$ , 如图1所示。这就是模糊数可以采用区间值表示的思想。

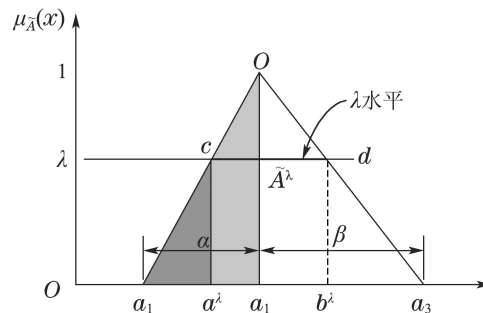


图1  $\lambda$ 水平截集与模糊数

Fig. 1 Cut set with  $\lambda$  level and fuzzy number

模糊数可以表示成区间值形式, 如定理2.

**定理 2**<sup>[22]</sup> 模糊数可以表示为可能性均值的区间值形式.

Carlsson和Fuller指出模糊数 $\tilde{A}$ 可能性均值的区间值形式为 $E(\tilde{A}) = [E_*(\tilde{A}), E^*(\tilde{A})]$ , 即

$$[E_*(\tilde{A}), E^*(\tilde{A})] = [2 \int_0^1 \lambda a^\lambda d\lambda, 2 \int_0^1 \lambda b^\lambda d\lambda]. \quad (1)$$

基于定理2, 进一步提出三角模糊数向模糊区间转换的公式并给出证明.

**定理 3** 设 $\hat{A} = (a_2, \alpha, \beta)$ 为三角模糊数, 中心为 $a_2$ , 左宽 $\alpha > 0$ , 右宽 $\beta > 0$ , 如图1所示, 则模糊区间数可能性低值为 $a_2 - \alpha/3$ , 可能性高值为 $a_2 + \beta/3$ .

**证** 由图1易知

$$\Delta oa_1a_2 \sim \Delta ca_1a^\lambda, \quad \Delta oa_2a_3 \sim \Delta db^\lambda a_3,$$

故存在关系

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\alpha}{a^\lambda - (a_2 - \alpha)}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\beta}{(a_2 + \beta) - b^\lambda}. \quad (3)$$

式(2) $\rightarrow a^\lambda = a_2 - (1 - \lambda)\alpha$ , 式(3) $\rightarrow b^\lambda = a_2 + (1 - \lambda)\beta$ , 则模糊集的 $\lambda(\lambda \in [0, 1])$ 水平可计算如下:

$$\tilde{A}^\lambda = [a^\lambda, b^\lambda] = [a_2 - (1 - \lambda)\alpha, a_2 + (1 - \lambda)\beta], \quad (4)$$

则

$$E_*(\tilde{A}) = 2 \int_0^1 \lambda a^\lambda d\lambda = a_2 - \frac{\alpha}{3}, \quad (5)$$

$$E^*(\tilde{A}) = 2 \int_0^1 \lambda b^\lambda d\lambda = a_2 + \frac{\beta}{3}, \quad (6)$$

因此

$$\begin{aligned} E(\tilde{A}) &= [E_*(\tilde{A}), E^*(\tilde{A})] \\ &= [a_2 - \frac{\alpha}{3}, a_2 + \frac{\beta}{3}]. \end{aligned} \quad (7)$$

证毕.

### 2.2 区间值运算法则

包括加、减、乘、除<sup>[23-24]</sup>和微分运算<sup>[25-26]</sup>.

**法则 1(数乘)** 对于区间值 $A = [\underline{a}, \bar{a}]$ ,  $\underline{a}, \bar{a} \in \mathbb{R}$ ,  $\forall k > 0$ , 有

$$k \cdot [\underline{a}, \bar{a}] = [k \cdot \underline{a}, k \cdot \bar{a}], \quad (8)$$

且 $\forall k < 0$ , 有

$$-k \cdot [\bar{a}, \underline{a}] = [-k \cdot \bar{a}, -k \cdot \underline{a}]. \quad (9)$$

**法则 2(加减)** 任给 $[\underline{a}, \bar{a}]$ 和 $[\underline{b}, \bar{b}]$ ,  $\underline{a}, \bar{a}, \underline{b}, \bar{b} \in \mathbb{R}$ , 有

$$\begin{aligned} [\underline{a}, \bar{a}] + [\underline{b}, \bar{b}] &= [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}], \\ [\underline{a}, \bar{a}] - [\underline{b}, \bar{b}] &= [\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}]. \end{aligned} \quad (10)$$

**法则 3(乘除)** 任给 $[\underline{a}, \bar{a}]$ 和 $[\underline{b}, \bar{b}]$ ,  $\underline{a}, \bar{a}, \underline{b}, \bar{b} \in \mathbb{R}$ , 有

$$[\underline{a}, \bar{a}] \times [\underline{b}, \bar{b}] = [\min(\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}), \max(\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b})], \quad (11)$$

$$[\underline{a}, \bar{a}] \div [\underline{b}, \bar{b}] = [\min(\frac{\underline{a}}{\underline{b}}, \frac{\underline{a}}{\bar{b}}, \frac{\bar{a}}{\underline{b}}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}}), \max(\frac{\underline{a}}{\underline{b}}, \frac{\underline{a}}{\bar{b}}, \frac{\bar{a}}{\underline{b}}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}})]. \quad (12)$$

**法则 4(微分)** 给定Hukuhara可微函数 $f: [a, b] \times U \rightarrow U$ 满足 $f'(t_0) = [f'_l(t_0), f'_u(t_0)]$ ,  $t_0 \in [a, b]$ . 对于区间值微分方程 $y' = f(t, y(t))$ ,  $y(t_0) = y_0$ , 有

$$\begin{cases} y'_l(t) = f_l(t, y(t)) \\ y'_u(t) = f_u(t, y(t)) \\ y_l(t_0) = y_{l0} \\ y_u(t_0) = y_{u0}. \end{cases} \quad (13)$$

式(13)中:  $y(t) \in U$ ,  $y(t) = [y_l(t), y_u(t)]$ ,  $y_0 = [y_{l0}, y_{u0}]$ .

### 2.3 模糊区间值GM(1, 1)预测模型

区间灰数矩阵的求逆运算理论仍没有突破, 致使区间灰数研究步履维艰, 成果不多. 虽然区间上、下限间接预测法受到诟病, 因为可能会出现预测区间上限小于下限的情况, 造成预测区间的动态翻转. 然而, 纠结于上、下限的动态翻转没有任何意义. 因为笔者所关心的并非上、下限的变化趋势而是整个区间范围(长短)的动态变化, 况且区间序列预测和实数序列预测并不是一个概念. 笔者的思路是采用灰色区间上、下限预测法, 同时得到两个预测时间响应序列, 即区间上限预测序列和区间下限预测序列, 如图2所示, 并以这两个序列为基础构建预测序列. 实线为原始区间序列的一阶累加生成序列(1st order accumulating generation operator, 1-AGO)序列, 虚线为预测区间序列的1-AGO序列. 区间预测模型的预测程序包含7个步骤, 如第2.3.1节所示.

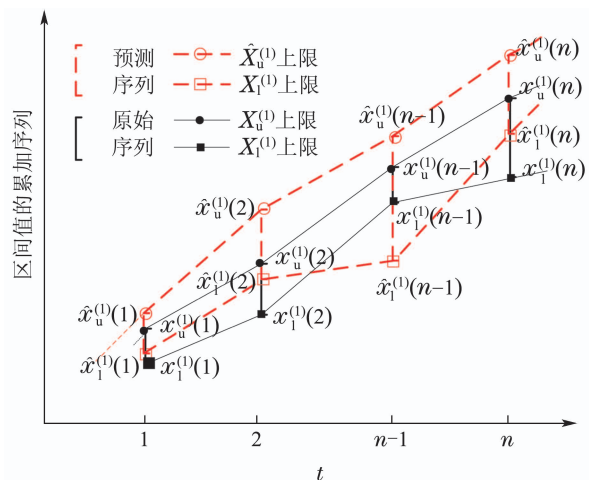


图2 区间值的上、下限预测序列  
Fig. 2 Prediction sequences of upper interval limit and lower interval limit

### 2.3.1 预测程序

步骤1 建立模糊区间数原始数据序列

$$X^{(0)} = \{[x_1^{(0)}(i), x_u^{(0)}(i)] | i = 1, 2, \dots, n\}. \quad (14)$$

步骤2 生成1-AGO序列

$$X^{(1)} = \{[x_1^{(1)}(i), x_u^{(1)}(i)] | i = 1, 2, \dots, n\}, \quad (15)$$

其中:

$$x_1^{(1)}(i) = \sum_{j=1}^i x_1^{(0)}(j), \quad x_u^{(1)}(i) = \sum_{j=1}^i x_u^{(0)}(j).$$

步骤3 将对X的预测转变为对其上、下限 $x_u(t)$ ,  $x_l(t)$ 的分别预测. 转变为对白化微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1^{(1)}(t)}{dt} + a_1 x_1^{(1)}(t) = b_1, \\ \frac{dx_u^{(1)}(t)}{dt} + a_u x_u^{(1)}(t) = b_u \end{cases} \quad (16)$$

的求解. 首先, 通过最小二乘法求取 $[a_1, b_1]$ 和 $[a_u, b_u]$ :

$$\otimes \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} = \otimes ([B^T B]^{-1} B^T Y), \quad (17)$$

其中:  $\otimes$ 表示区间灰数,  $i = l, u$ 且

$$\otimes B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(x_i^{(1)}(1) + x_i^{(1)}(2)) & 1 \\ -\frac{1}{2}(x_i^{(1)}(2) + x_i^{(1)}(3)) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}(x_i^{(1)}(n-1) + x_i^{(1)}(n)) & 1 \end{bmatrix},$$

$$\otimes Y = [x_i^{(0)}(2) \quad x_i^{(0)}(3) \quad \dots \quad x_i^{(0)}(n)]^T,$$

则区间灰数的发展系数为 $a = [a_1, a_u]$ , 灰色作用向量为 $b = [b_1, b_u]$ .

步骤4 根据区间值运算准则4判断 $X^{(1)}(t) = [x_1^{(1)}(t), x_u^{(1)}(t)]$ 的可微性, 若满足Hukuhara可微, 则有如下微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1^{(1)}(t) = b_1 - a_u x_u^{(1)}(t), \\ \dot{x}_u^{(1)}(t) = b_u - a_1 x_1^{(1)}(t), \\ x_1^{(1)}(1) = x_1^{(0)}(1), \\ x_u^{(1)}(1) = x_u^{(0)}(1), \end{cases} \quad (18)$$

求得预测时间响应式

$$\hat{x}_1^{(1)}(t) = \frac{1}{2}(x_1^{(0)}(1) - \frac{a_u x_u^{(0)}(1)}{\sqrt{a_1 a_u}} + \frac{b_1}{\sqrt{a_1 a_u}} - \frac{b_u}{a_1}) \times e^{(t-1)\sqrt{a_1 a_u}} - \frac{b_u}{a_1} + \frac{1}{2} e^{-(t-1)\sqrt{a_1 a_u}} \times$$

$$(x_1^{(0)}(1) + \frac{a_u x_u^{(0)}(1)}{\sqrt{a_1 a_u}} - \frac{b_1}{\sqrt{a_1 a_u}} - \frac{b_u}{a_1}), \quad (19)$$

$$\hat{x}_u^{(1)}(t) = \frac{1}{2}(x_u^{(0)}(1) - \frac{x_1^{(0)}(1)\sqrt{a_1 a_u}}{a_u} + \frac{b_u}{\sqrt{a_1 a_u}} - \frac{b_1}{a_u}) \times e^{(t-1)\sqrt{a_1 a_u}} - \frac{b_1}{a_u} + \frac{1}{2} e^{-(t-1)\sqrt{a_1 a_u}} \times (x_u^{(0)}(1) + \frac{x_1^{(0)}(1)\sqrt{a_1 a_u}}{a_u} - \frac{b_u}{\sqrt{a_1 a_u}} - \frac{b_1}{a_u}). \quad (20)$$

步骤5 计算得到区间值预测值序列

$$\hat{X}^{(1)}(i) = [\hat{x}_1^{(1)}(i), \hat{x}_u^{(1)}(i)], \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

步骤6 计算得到区间值还原值序列

$$\hat{X}^{(0)}(i) = [\hat{x}_1^{(0)}(i), \hat{x}_u^{(0)}(i)], \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

公式如下:

$$\begin{cases} \otimes \hat{X}^{(0)}(1) = \otimes X^{(0)}(1), \\ \otimes \hat{X}^{(0)}(i) = \otimes \hat{X}^{(1)}(i+1) - \otimes \hat{X}^{(1)}(i). \end{cases} \quad (21)$$

遵循区间灰数的减法运算法则.

步骤7 模糊区间值GM(1, 1)预测模型精度校验. 灰色理论中经常用到的校验公式有

- $\varepsilon(i) = \otimes X^{(0)}(i) - \otimes \hat{X}^{(0)}(i);$
- $|\varepsilon(i)| = |\otimes X^{(0)}(i) - \otimes \hat{X}^{(0)}(i)|;$
- $\Delta(i) = |\varepsilon(i)| \times 100 / \otimes X^{(0)}(i) \%;$
- $s_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\otimes X^{(0)}(i) - \otimes \bar{X}^{(0)}(i))^2}{n-1}};$
- $s_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta(i) - \bar{\Delta}(i))^2}{n-1}}.$

其意自明, 不再赘述.

## 2.4 几何布朗运动理论

### 2.4.1 布朗运动方程

与未来运营成本有关的不确定性因素可以由布朗运动模拟, 它是一种特殊的随机过程. 使用伊藤随机微分方程刻画的时间过程去描述运营成本的变动, 通过引入干扰项 $dz = \varepsilon(t)\sqrt{dt}$ , 表示为随机微分方程的形式

$$dx(t) = a(x, t)dt + b(x, t)dz, \quad (22)$$

其中:  $z$ 表示维纳过程, 其中 $\varepsilon(t)$ 是标准正态随机变量, 对于 $t' \neq t''$ ,  $\varepsilon'(t)$ 与 $\varepsilon''(t)$ 不相关.

由于任何时间的成本都在某种程度上依赖于以前的成本, 即有

$$S(k+1) = u(k)S(k), \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (23)$$



其中 $S(k)$ 表示时间 $k$ 的成本. 随机变量 $u(k)$ 既独立于 $S(k)$ , 也相互独立, 即 $u(i)$ 与 $u(j)$ 相互独立,  $i, j \in [1, n-1]$ 且 $i \neq j$ . 将式(23)定义为倍数模型, 两边取对数得

$$\ln S(k+1) = \ln S(k) + \ln u(k). \quad (24)$$

借助伊藤过程, 可将其扩展为连续时间模型<sup>[27]</sup>, 其形式为

$$d \ln S(t) = v dt + \sigma dz, \quad (25)$$

其中:  $v$ 是常数,  $\sigma$ 为波动系数, 这样方程的右边为一个常数和零均值的正态随机变量相加的形式, 整体上表现为正态随机变量. 由于

$$d \ln S(t) = \frac{dS(t)}{S(t)}, \quad (26)$$

引入漂移系数 $\mu = v + \frac{1}{2}\sigma^2$ , 这样式(25)转换为

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz. \quad (27)$$

此为标准的几何布朗运动随机过程, 本质上是一个随机微分方程. 式中第1项表示成本的期望值, 第2项表示影响期望的随机因素.

连续的时间价格过程可以通过取一系列的小段时期, 然后一期一期地往前推移进行模拟. 将 $dz = \varepsilon(t)\sqrt{dt}$ 代入式(25)后, 然后对式(25)离散化, 得

$$\begin{aligned} \ln S(t_{k+1}) - \ln S(t_k) = \\ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\varepsilon(t_k)\sqrt{\Delta t}, \end{aligned} \quad (28)$$

求得

$$\begin{cases} S(t_{k+1}) = S(t_k) \cdot e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\varepsilon(t_k)\sqrt{\Delta t}}, \\ S(t_0) = S_0. \end{cases} \quad (29)$$

式(29)描述了成本随时间变化的几何布朗运动过程.

布朗运动路径可以采用矩阵表示, 建立一个 $m$ 行 $n$ 列矩阵, 每1行代表1条路径. 表示如下:

$$C = [C_i^j] = \begin{bmatrix} C_1^1 & C_2^1 & \cdots & C_i^1 & \cdots & C_n^1 \\ C_1^2 & C_2^2 & \cdots & C_i^2 & \cdots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_1^j & C_2^j & \cdots & C_i^j & \cdots & C_n^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_1^m & C_2^m & \cdots & C_i^m & \cdots & C_n^m \end{bmatrix}.$$

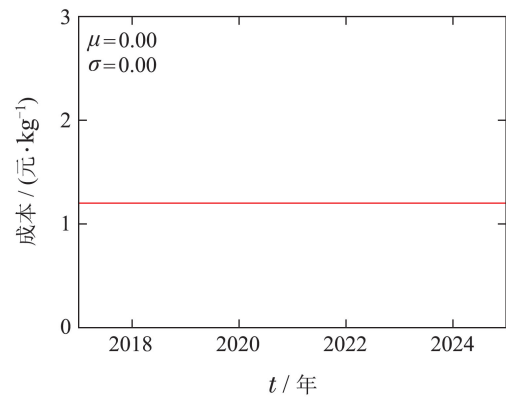
该矩阵的建立对于确定恰当的漂移系数与浮动系数是非常必要的. 由于笔者将用它表示成本的变化过程, 矩阵中符号采用 $C$ (cost)表示.

### 2.4.2 漂移与波动系数确定

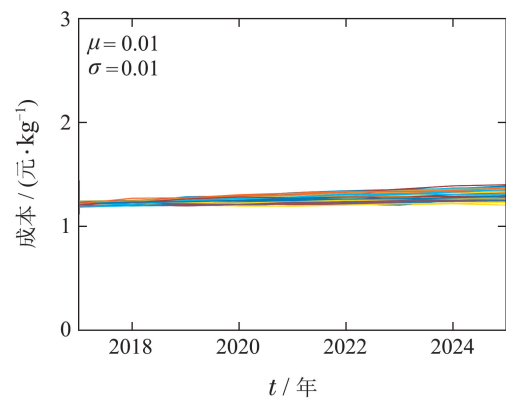
生产资料价格的波动, 劳动力成本的变化, 国家税收杠杆的调节, 地方政府的政策导向, 替代产品产量

与价格的波动, 均会造成铜矿开采成本发生变化, 致使成本在总体均衡的基础上存在一定程度的波动, 虽然不会出现剧烈波动的现象. 正确给定布朗运动的参数是成本模拟成败的关键. 笔者通过组合仿真实验方法分析得出漂移系数与浮动系数的合理值.

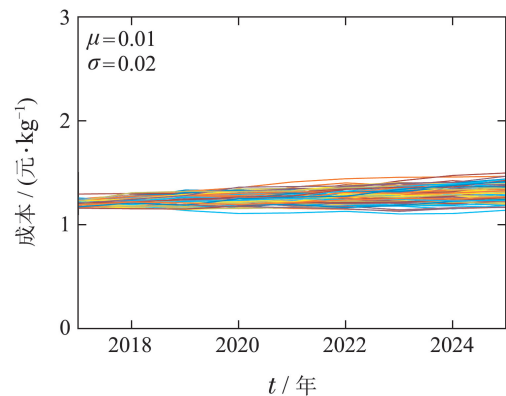
通过改变式(29)所示布朗运动的漂移系数 $\mu$ 与波动系数 $\sigma$ , 得到不同系数组合下的布朗运动的随机路径. 重复模拟100次, 得到100条路径, 记录在路径矩阵 $C = [c]_9^{100}$ 中, 9行100列, 横维代表价格变化的模拟路径, 纵维代表价格变化的未来时间, 不妨设为2017~2025共计9年. 将路径矩阵可视化表示, 如图3所示.



(a)  $\mu = 0.00, \sigma = 0.00$



(b)  $\mu = 0.01, \sigma = 0.01$



(c)  $\mu = 0.01, \sigma = 0.02$

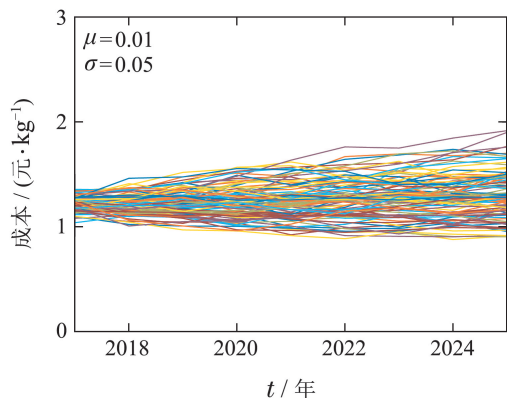
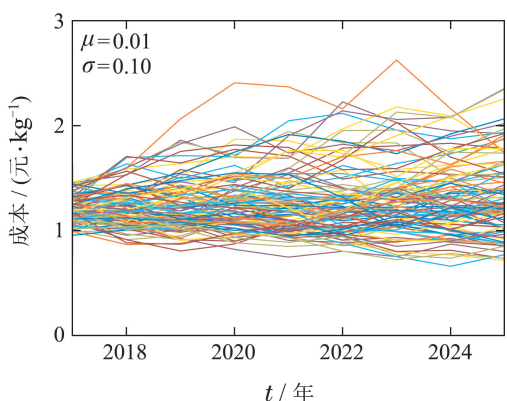
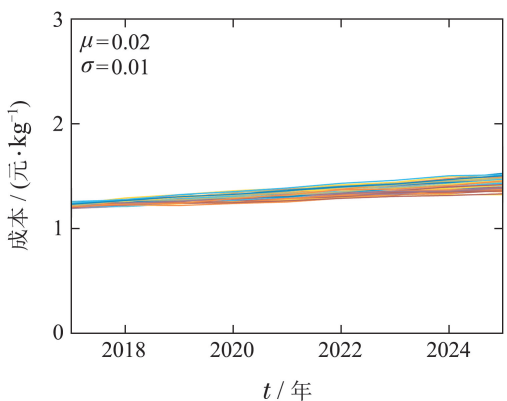
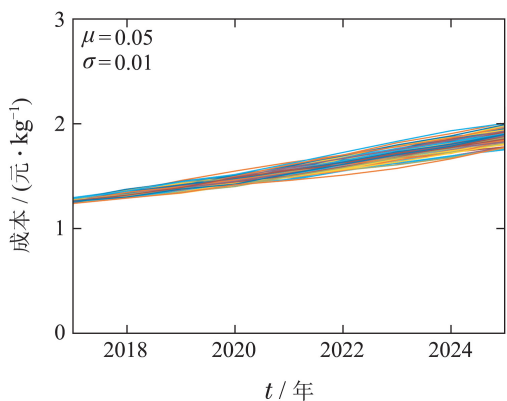
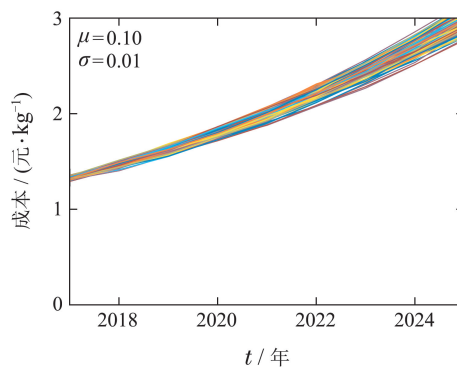
(d)  $\mu = 0.01, \sigma = 0.05$ (e)  $\mu = 0.01, \sigma = 0.10$ (f)  $\mu = 0.02, \sigma = 0.01$ (g)  $\mu = 0.05, \sigma = 0.01$ (h)  $\mu = 0.10, \sigma = 0.01$ 

图3 漂移系数与波动系数组合分析  
Fig. 3 Combination analysis of drift and relocation coefficients

1) 初值取  $S_0 = S(2017) = 1.2$  元/kg. 因为前5年处于项目成长期, 政府给予减息免税的优惠政策, 给以1200元/t为中心的成本波动是合理的.

2)  $\mu = 0.00, \sigma = 0.00$ , 见图3(a), 成本既不波动, 也不漂移, 保持恒值, 这是一种理想情况.

3)  $\mu = 0.01, \sigma = 0.01$ , 见图3(b), 9年成本上涨约0.2元/kg, 随着经济不断增长, 以及消费水平的提高, 成本也会随着增长, 但是0.2元/kg的增长量有点太小了.

4)  $\mu = 0.01, \sigma = 0.02$ , 见图3(c), 成本波动幅度比图3(b)图大了约1倍, 但也只有约0.4元/kg的波动幅度, 与中国经济发展的速度相比, 还是稍小了一些.

5)  $\mu = 0.01, \sigma = 0.05$ , 见图3(d), 9年后成本波动幅度接近1元/kg, 与成本现值1.2元/kg相比, 增幅约0.7~0.8元/kg.

6)  $\mu = 0.01, \sigma = 0.10$ , 见图3(e), 成本波动幅度远远超过1元/kg, 在市场竞争较为残酷的经济环境中, 成本快速上涨意味着企业减产, 失业率增大.

7)  $\mu = 0.02, \sigma = 0.01$ , 见图3(f), 成本虽稍有漂移, 但波动较小, 不符合实际情况.

8)  $\mu = 0.05, \sigma = 0.01$ , 见图3(g), 成本漂移较大, 波动较小, 不符合实际情况.

9)  $\mu = 0.10, \sigma = 0.01$ , 见图3(h), 成本漂移过大, 有快速上涨的趋势, 不符合实际情况.

经权衡分析,  $\mu = 0.01, \sigma = 0.05$  参数组合可以作为一种较为合理的参数选项. 这里只是给出了一种选择参数的方法, 不是绝对最优的参数组合, 但可通过不断观察和专家评判来获得更优的参数组合.

### 3 投资决策

某矿山企业发现高品位铜矿, 计划投资开采, 但需要巨额投资, 考虑到目前市场行情波动不定, 一致认为风险巨大, 可能会出现多年不能回收成本而导致资金链断裂, 致使企业破产的严重后果. 在目前经济形式下, 为最大程度规避风险, 争取到了政府5年内免税

减息的优惠条件, 现决定投资1亿元人民币, 规划铜矿 年后5年内实现赢利. 与项目决策有关的基本参数已经列在表1中了, 要求进行可行性评估, 给出决策参考.

表1 基本参数  
Table 1 Basic parameters

|                         |                                      |                            |                     |
|-------------------------|--------------------------------------|----------------------------|---------------------|
| 铜矿年采量/t<br>100 000      | 精矿金属含量/%<br>[47, 52]                 | 金属品味/%<br>[4.2, 5.0]       | 采矿回收率/%<br>[75, 80] |
| 初始投资总额/百万元<br>[80, 120] | 运营成本现值/(元·kg <sup>-1</sup> )<br>1.20 | 漂移系数(μ)<br>0.01            | 波动系数(σ)<br>0.05     |
| 布朗运动仿真次数<br>100         | 铜矿建设准备时间/年<br>3: 2017 ~ 2019         | 成本回收时间/年<br>5: 2020 ~ 2024 | 折现率/%<br>[6, 10]    |

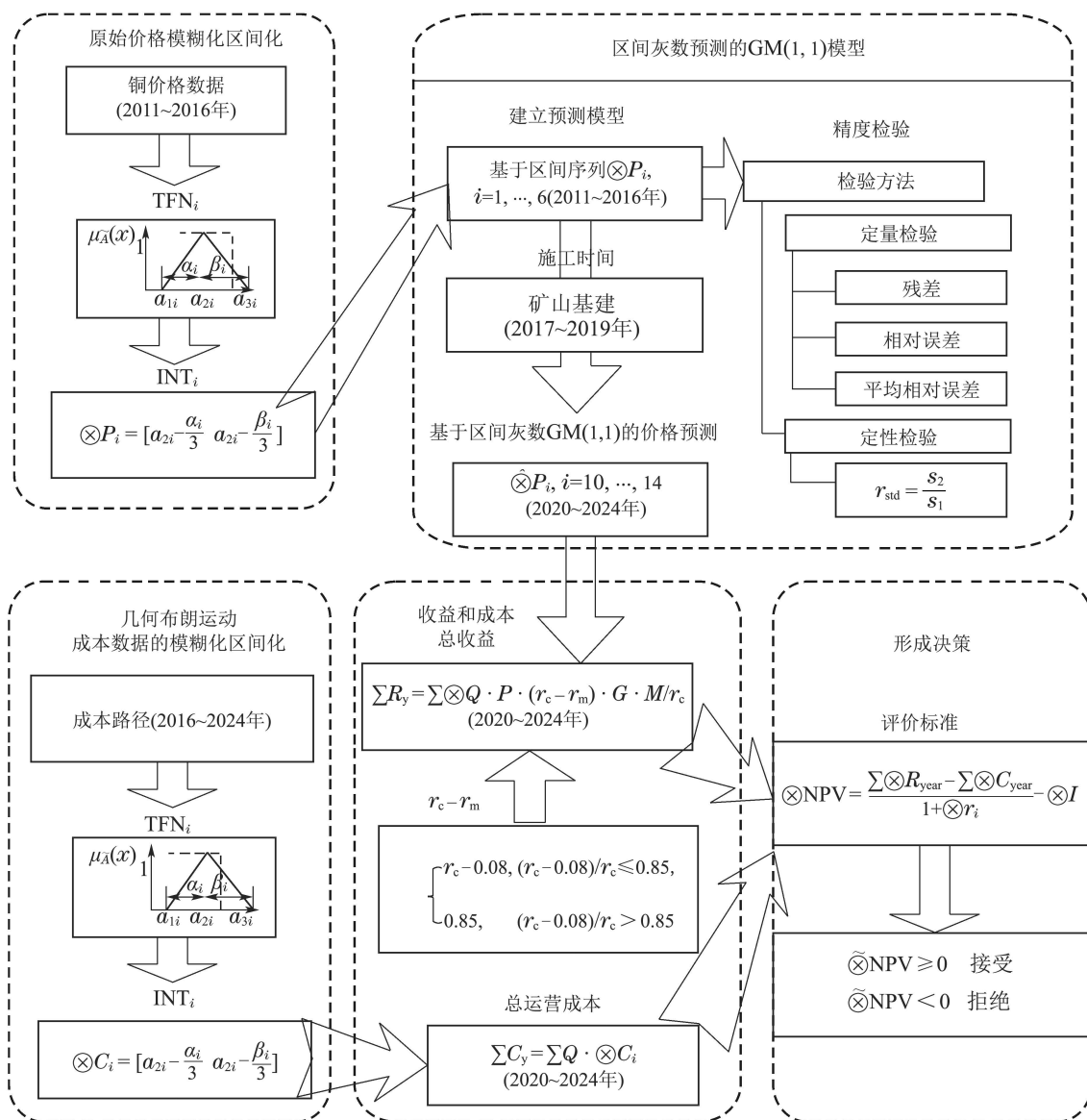


图4 参数评估与投资决策实施思路

Fig. 4 Thinking in parameter evaluation and investment decision-making

3.1 评估依据

在限定的生命周期内, 项目评估包括收入评估与

成本评估. 采用期望净现值标准

$$E(NPV|Q, P, G, M, C, I, r, t) \geq 0, \quad (30)$$

式中:

- $Q$ , 铜矿年产量, 单位: t/年.
- $P$ , 铜单价, 单位: 元/kg.
- $G$ , 品味, 单位: %.
- $C$ , 成本, 单位: 元/kg.
- $I$ , 总投资额, 约1亿元.
- $r$ , 折现率, 单位: %.
- $t$ , 时间, 单位: 年.

严格上, 参数往往具有一个参数窗口, 而由上界与下界定义的区间灰数具有表示参数的结构特征, 所以应该是参数较为合理的表示形式. 如果投产 $n(n \leq 5)$ 年后, 使得净现值

$$E(NPV) = \text{WHT}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\otimes R_{yi} - \otimes C_{yi}}{1 + \otimes r_i} - \otimes I\right) \geq 0 \quad (31)$$

成立, 则认为金属矿山投资项目是可行的, 可以计划投资开采. 式(31)中函数WHT( $\cdot$ )表示取白化值.

参数评估与投资决策的实施思路如图4所示. 首先, 对原始价格数据进行模糊化区间化处理, 转变成区间灰数, 然后利用2011年至2016年的铜价数据建立区间灰数预测模型, 分析模型的精度, 并用它来预测2020年至2024生产年的价格变化趋势, 得到总收益. 同时, 对铜矿的单位开采成本运用几何布朗运动进行模拟得到模拟路径, 然后, 进行模糊化区间化处理得到2020年至2024年的年运营成本, 累计得到总成本. 最后, 将收益和成本代入净现值目标函数(31), 形成最终决策.

无论是搜集到的金属历史价格数据, 还是布朗运动模拟得到的成本变化数据均不能直接用于区间值GM(1, 1)预测模型, 必须对其进行处理和变换, 然后转换成区间灰数的形式. 下面给出包括三角模糊变换和模糊区间数转换的数据处理策略.

### 3.2 数据处理策略

#### 3.2.1 模糊化处理

参数的不确定性表现为模糊性, 影响决策的风险因素均有随机性, 表现为概率密度序列:

$$\{P_i \sim f(\mu_i, \sigma_i), i = 1, 2, \dots, n\}, \quad (32)$$

式中:  $\mu_i$ 表示均值,  $\sigma_i$ 表示方差,  $n$ 表示矿山服务年限. 从大数定律可知, 价格变化近似服从正态分布.

然后, 根据定理1, 对价格进行模糊化处理, 即将 $P_i$ 参数的不确定性用一个三角模糊数 $(a_{1i}, a_{2i}, a_{3i})$ 来模拟, 对上述概率分布取约95%的置信区间, 有

$$a_{1i} = \mu_i - 2\sigma_i, a_{2i} = \mu_i, a_{3i} = \mu_i + 2\sigma_i. \quad (33)$$

其下界 $a_{1i}$ 与上界 $a_{3i}$ 分别从5%分布的下界和上界得到,  $a_{2i}$ 表示希望最大值, 等于分布的平均值.

#### 3.2.2 区间数转换

基于定理3, 将价格 $P_i$ 的三角模糊数序列 $(a_{1i}, a_{2i}, a_{3i})$ 转换成区间数序列:

$$P_i \sim \{[P_{lj}, P_{uj}]\} = \left\{ \left[ a_{2i} - \frac{\alpha_i}{3}, a_{2i} + \frac{\beta_i}{3} \right] \right\}. \quad (34)$$

由图1知

$$\alpha_i = a_{2i} - a_{1i} = \mu_i - (\mu_i - 2\sigma_i) = 2\sigma_i,$$

$$\beta_i = a_{3i} - a_{2i} = (\mu_i + 2\sigma_i) - \mu_i = 2\sigma_i.$$

### 3.3 价格预测

按照模糊区间GM(1, 1)预测理论, 对铜金属价格进行拟合和预测. 给出铜金属历史价格的拟合公式, 并验证拟合精度. 接着, 以此公式为基础, 对未来铜金属价格进行预测. 步骤详述如下:

1) 首先, 进行数据搜集、整理, 完成价格到三角模糊数的转换及到模糊区间数的变换. 将近5年(2012~2016)的金属铜价格, 以月为单位均值化处理, 填入表2. 然后, 依次计算出年价格均值 $\mu_i$ 及标准差 $\sigma_i, i = 2012 \sim 2016$ . 按照式(33)进行三角模糊化处理, 得到三角模糊数 $(a_{1i}, a_{2i}, a_{3i})$ , 对应隶属度如图5所示. 然后, 依据式(34)转换成模糊区间数:

$$\otimes P^{(0)} = \{[P_1^{(0)}, P_u^{(0)}]\} = \{[45.236, 52.056], [40.836, 50.188], [41.154, 47.074], [43.381, 46.197], [45.279, 49.699]\}.$$

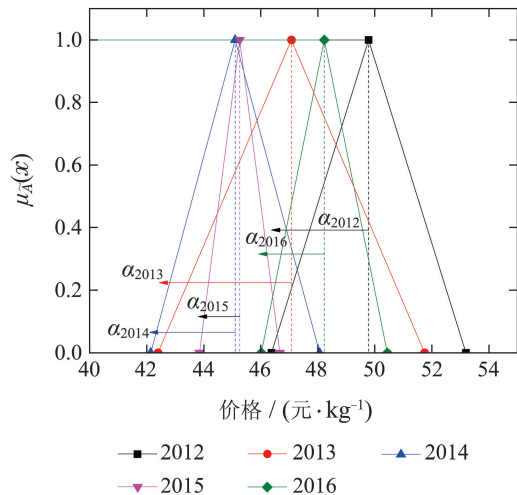


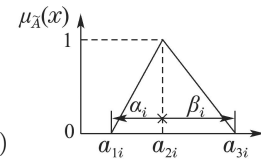
图5 2012~2016年铜金属价格的三角模糊数表示  
Fig. 5 The triangular fuzzy numbers of copper metal prices from year 2012 to 2016

2) 计算序列 $P^{(0)}$ 的1-AGO序列:

$$\otimes P^{(1)} = \{[P_1^{(1)}, P_u^{(1)}]\} = \{[45.236, 52.056], [86.072, 102.244], [127.226, 149.318], [170.607, 195.515], [215.886, 245.214]\}.$$

表2 2012~2016年金属铜的历史价格处理与变换( $f_{pi} \rightarrow TFN_i \rightarrow INT_i$ ), 价格模拟及其精度分析  
 Table 2 Processing and transformation ( $f_{pi} \rightarrow TFN_i \rightarrow INT_i$ ), simulating and error analyzing of the historical copper prices based on fuzzy interval-valued GM(1, 1) model from year 2012 to 2016

| 月份  | 年份     |  |        |        |        | 备注  |
|---|--------|--|--------|--------|--------|---|
|   | 2012   | 2013   | 2014   | 2015   | 2016   |   |
| 1月  | 49.952 | 52.635   | 44.110 | 45.315 | 46.273 | 资料来源: 第1铜网 <a href="http://www.cu168.com">http://www.cu168.com</a> ;<br>数据已做均值化预处理。<br>价格波动的主要影响因素包括:<br>1) 国家能源政策;<br>2) 国家税收;<br>3) 劳动力成本;<br>4) 国家有色金属政策;<br>5) 信贷利率;<br>6) 竞争性金属市场;<br>7) 管理水平;<br>8) 市场经济环境. |
| 2月  | 49.473 | 50.801   | 42.655 | 44.301 | 46.506 |   |
| 3月  | 50.492 | 45.510   | 48.370 | 44.535 | 47.013 |   |
| 4月  | 50.854 | 47.505   | 46.970 | 46.205 | 47.917 |   |
| 5月  | 48.712 | 46.600   | 44.385 | 45.219 | 48.095 |   |
| 6月  | 49.771 | 44.650   | 44.877 | 45.712 | 48.739 |   |
| 7月  | 49.435 | 47.250   | 45.101 | 44.068 | 48.781 |   |
| 8月  | 50.013 | 46.105   | 44.055 | 44.876 | 48.739 |   |
| 9月  | 50.146 | 46.255   | 44.370 | 45.698 | 49.150 |   |
| 10月   | 49.003 | 45.710   | 44.959 | 45.246 | 48.479 |   |
| 11月   | 49.525 | 46.355   | 45.900 | 45.691 | 49.452 |   |
| 12月   | 50.021 | 45.472   | 45.459 | 46.238 | 49.575 |   |
| $f_{pi}$  |        |  |        |        |        | 概率密度  |
| $\mu_i$   | 49.783 | 47.071   | 45.101 | 45.258 | 48.226 | 1) 均值;  |
| $\sigma_i$  | 1.705  | 2.338  | 1.480  | 0.704  | 1.105  | 2) 标准差.   |
| $TFN_i$   |        |  |        |        |        | 三角模糊数   |
| $a_{1i} = \mu_i - 2\sigma_i$                                  | 46.373 | 42.395   | 42.141 | 43.85  | 46.016 | $f_i \sim N(\mu_i, \sigma_i) \Rightarrow$<br>$TFN_i \sim (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i})$  |
| $a_{2i} = \mu_i$  | 49.783 | 47.071   | 45.101 | 45.258 | 48.226 |   |
| $a_{3i} = \mu_i + 2\sigma_i$                                  | 53.193 | 51.747   | 48.061 | 46.666 | 50.436 |   |
| $\alpha_i = \beta_i$  | 3.410  | 4.676  | 2.960  | 1.408  | 2.210  |   |
| $INT_i \sim \otimes P_i^{(0)} = [P_{li}^{(0)}, P_{ui}^{(0)}]$ |        |  |        |        |        |   |
| $P_{li}^{(0)}$  | 45.236 | 40.836   | 41.154 | 43.381 | 45.279 | $TFN_i \Rightarrow \otimes P_i^{(0)} = [a_{2i} - \frac{\alpha_i}{3}, a_{2i} + \frac{\beta_i}{3}]$   |
| $P_{ui}^{(0)}$  | 52.056 | 50.188   | 47.074 | 46.197 | 49.699 |   |
| $\hat{P}_{li}^{(0)}$  | 45.236 | 37.552   | 37.292 | 37.025 | 36.752 | 区间灰数预测序列:   |
| $\hat{P}_{ui}^{(0)}$  | 52.056 | 51.384   | 52.758 | 54.123 | 55.478 | $\otimes \hat{P}_i^{(0)} = [\hat{P}_{li}^{(0)}, \hat{P}_{ui}^{(0)}]$ ,  |
| $\tilde{\otimes} P_i^{(0)}$                                   | 48.646 | 45.512   | 44.114 | 44.789 | 47.489 | $\tilde{\otimes} P_i^{(0)} = (P_{li}^{(0)} + P_{ui}^{(0)})/2, \lambda = 0.5$ 白化值,   |
| $\tilde{\otimes} \hat{P}_i^{(0)}$                             | 48.646 | 44.468   | 45.025 | 45.574 | 46.115 | $\tilde{\otimes} \hat{P}_i^{(0)} = (\hat{P}_{li}^{(0)} + \hat{P}_{ui}^{(0)})/2, \lambda = 0.5$ 白化值,   |
| $\varepsilon_i$   | 0.000  | 1.044  | -0.911 | -0.785 | 1.374  | $\varepsilon_i = \tilde{\otimes} P_i^{(0)} - \tilde{\otimes} \hat{P}_i^{(0)}$ .   |
| $ \varepsilon_i $   | 0.000  | 1.044  | 0.911  | 0.785  | 1.374  |   |
| $\Delta_i$  | 0.000  | 2.293  | 2.065  | 1.752  | 2.893  | $\Delta_i =  \varepsilon_i  \times 100 / \tilde{\otimes} P_i^{(0)} \%$ ,  |
| $s_1$   | 1.8987 | 序列 $\{\tilde{\otimes} P_i^{(0)}, i = 2012 \sim 2016\}$ 的标准差, |        |        |        |   |
| $s_2$   | 0.5096 | 序列 $\{\Delta_i, i = 2012 \sim 2016\}$ 的标准差,                  |        |        |        |   |
| $r_{std}$   | 0.2684 | 比值 $s_2/s_1$ .   |        |        |        |   |



3) 根据式(17)利用最小二乘方法, 求取GM(1, 1) 预测模型的发展系数a和灰色作用量b, 结果如下:

$$\otimes \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [a_1, a_u] \\ [b_1, b_u] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-0.0367, 0.0050] \\ [37.9393, 49.0326] \end{bmatrix}.$$

4) 将[a, b]代入式(19), 得区间下限时间响应:

$$\hat{x}_1^{(1)}(t) =$$

$$-1336.038 + 1380.4 \cos(0.013546(t - 1)) + 2783.6 \sin(0.013546(t - 1)), \quad (35)$$

代入式(20), 得到区间上限的时间响应:

$$\hat{x}_1^{(u)}(t) = 7587.860 - 7551.7 \cos(0.013546(t - 1)) + 3745.0 \sin(0.013546(t - 1)). \quad (36)$$

对 $t$ 取离散时间点 $i = 1, 2, \dots, n$ , 则得区间模拟值:

$$\begin{aligned} \hat{P}_1^{(1)}(i+1) &= -1336.038 + 1380.4 \cos(0.013546i) + \\ &2783.6 \sin(0.013546i), \\ \hat{P}_u^{(1)}(i+1) &= 7587.860 - 7551.7 \cos(0.013546i) + \\ &3745.0 \sin(0.013546i), \end{aligned}$$

其中:  $\hat{P}_1^{(1)}(1) = P_1^{(1)}(1)$ ,  $\hat{P}_u^{(1)}(1) = P_u^{(1)}(1)$ . 因此, 还原值为

$$\begin{cases} \hat{P}_1^{(0)}(1) = P_1^{(0)}(1), \\ \hat{P}_u^{(0)}(1) = P_u^{(0)}(1), \\ \hat{P}_1^{(0)}(i+1) = \\ 37.833 \cos(0.013546i) - 18.443 \times \\ \sin(0.013546i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \hat{P}_u^{(0)}(i+1) = \\ 50.036 \cos(0.013546i) + 102.637 \times \\ \sin(0.013546i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

$i = 1$  为 2013 年的索引值,  $i = 2$  为 2014 年的索引值, 依次类推. 2012 年至 2016 年价格的变化趋势如图 6 所示. 价格区间  $P_i^{(0)} = [P_{li}^{(0)}, P_{ui}^{(0)}]$  的下限值序列  $P_{li}^{(0)}$  和上限值序列  $P_{ui}^{(0)}$  之间的区间表示原始价格所有可能的取值. 区间  $\hat{P}_i^{(0)} = [\hat{P}_{li}^{(0)}, \hat{P}_{ui}^{(0)}]$  的下限值序列  $\hat{P}_{li}^{(0)}$  和上限值序列  $\hat{P}_{ui}^{(0)}$  之间的区间表示模拟价格所有可能的取值.

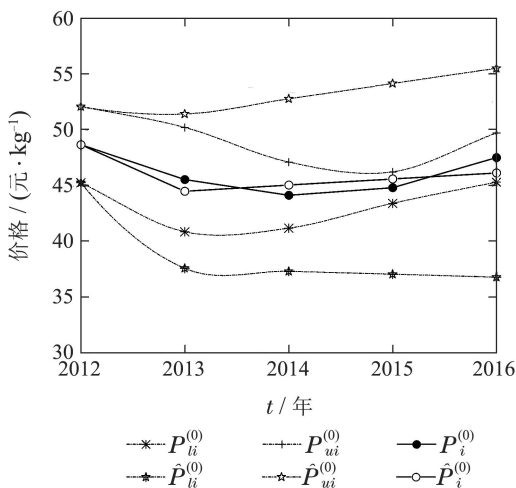


图 6 2012 ~ 2016 年铜金属价格区间值上、下限的变化趋势  
Fig. 6 Variation tendencies of copper metal's raw and simulative prices from year 2012 to 2016

5) 最后, 通过计算出原始灰色区间的白化序列

$$\tilde{\otimes} P^{(0)} = \{48.646, 45.512, 44.114, 44.789, 47.489\}$$

与模拟灰色区间的白化序列

$$\tilde{\otimes} \hat{P}^{(0)} = \{48.646, 44.468, 45.025, 45.574, 46.115\}$$

之间的残差, 得到残差序列  $\{\varepsilon_i, i = 1 \sim 5\}$ , 绝对误差序列  $\{|\varepsilon_i|\}$  与相对误差序列  $\{\Delta_i\}$ , 并绘制于图 7 中. 可见残差的绝对值和相对值均具有较小的数值, 说明对金属价格的模拟精度是较为理想的. 其次, 通过比较序列  $\{\tilde{\otimes} P_i^{(0)}\}$  的标准差  $s_1$  与序列  $\{\Delta_i\}$  的标准差  $s_2$ , 并计算出比值  $r_{std} = s_2/s_1 = 0.2684 < 0.35$ . 文献[17]指出, 当该比值小于 0.35 时, 预测效果可评级为“优秀”. 这验证了 GM(1, 1) 模型具有较高的模拟精度.

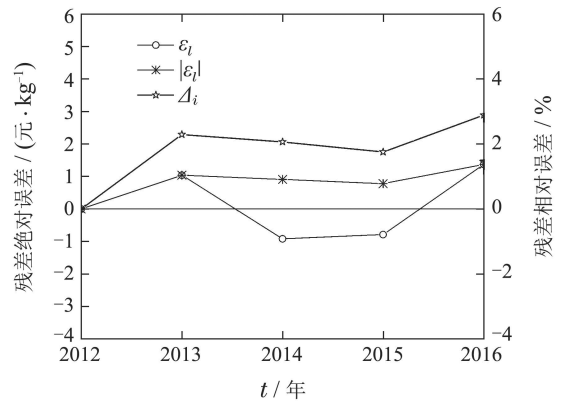


图 7 2012 ~ 2016 年铜价格模拟残差及其相对误差  
Fig. 7 Absolute and relative residual error of copper metal prices from year 2012 to 2016

6) 预测出 2020 年至 2024 年每年的价格均值. 由  $\otimes \hat{P}^{(0)}(i+1) = [\hat{P}_{li}^{(0)}(i+1), \hat{P}_{ui}^{(0)}(i+1)] (i = 8, 9, 10, 11, 12)$ , 得到 2020 ~ 2024 年金属价格的预测值序列:

$$\begin{aligned} \{\otimes \hat{P}^{(0)}(i+1), \quad i = 8, 9, \dots, 12\} = \\ \{[35.591, 60.792], [35.285, 62.094], \\ [34.972, 63.384], [34.652, 64.662], \\ [34.327, 65.929]\}. \end{aligned}$$

分析预测数据, 发现区间预测序列的上限值与下限值有逐年加大的趋势, 这正反应了未来价格变化的不确定性. 而且上限序列值的增速与下限序列值的减速均不强烈, 反应了预测模型的稳健性.

### 3.4 收入预测

Gligoric 给出了一种金属精矿年收益的计算公式<sup>[17]</sup>

$$R_y = Q \cdot P \cdot (r_c - r_m) \cdot G \cdot M / r_c, \quad (37)$$

其中:  $r_c$  表示精矿金属含量, 单位: %;  $r_m$  表示金属回收率, 单位: %;  $M$  表示采矿回收率, 单位: %; 且式中

$$r_c - r_m = \begin{cases} r_c - 0.08, & (r_c - 0.08)/r_c \leq 0.85, \\ 0.85, & (r_c - 0.08)/r_c > 0.85. \end{cases} \quad (38)$$

需要指出的是,以上公式中的所有参数除年产量 $Q$ 外均为模糊区间数,比如采矿回收率可表示为 $M = [M_l, M_u]$ ,下标 $l$ 表示区间下限,下标 $u$ 表示区间上限;再如金属回收率表示为 $r_m = [r_{ml}, r_{mu}]$ ,等等.

由表1知精矿金属含量 $r_c = [0.47, 0.52]$ ,采矿回收率 $M = [0.75, 0.80]$ ,金属品味 $G = [0.042, 0.05]$ ,

铜矿年采量 $Q = 100\ 000\ t$ ,则利用式(37)和式(38)计算出2020~2024每年收入预测区间值 $R_y$ ,并将结果填入表3中:

$$R_y = \{[84.085, 217.300], [83.361, 221.952], [82.621, 226.563], [81.866, 231.133], [81.097, 235.660]\}.$$

表3 2020~2024生产年矿山收入值

Table 3 Annual revenue of the copper mine from year 2020 to 2024

| 年份  | 2020              | 2021              | 2022              | 2023              | 2024              |
|---|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $\hat{P}_i^{(0)}/(\text{元}\cdot\text{kg}^{-1})$ | [35.591, 60.792]  | [35.285, 62.094]  | [34.972, 63.384]  | [34.652, 64.662]  | [34.327, 65.929]  |
| $R_y/\text{百万元}$                                | [84.085, 217.300] | [83.361, 221.952] | [82.621, 226.563] | [81.866, 231.133] | [81.097, 235.660] |

表4 2017~2025年成本的布朗运动模拟值及其转换:  $f_{ci} \rightarrow \text{TFN}_i \rightarrow \text{INT}_i$

Table 4 Simulation and its transformation of costs from year 2017 to 2025 ( $f_{ci} \rightarrow \text{TFN}_i \rightarrow \text{INT}_i$ )

|   | 2017   | 2018   | 2019   | 2020   | 2021   | 2022   | 2023   | 2024   | 2025   |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 模拟节点1   | 1.1662 | 1.0960 | 1.1546 | 1.1288 | 1.2400 | 1.2590 | 1.2367 | 1.0977 | 1.1087 |
| 模拟节点2   | 1.1909 | 1.2473 | 1.3068 | 1.3086 | 1.3080 | 1.3757 | 1.4020 | 1.4031 | 1.3578 |
| 模拟节点3   | 1.1946 | 1.1824 | 1.1242 | 1.2436 | 1.2073 | 1.2560 | 1.2046 | 1.1679 | 1.0935 |
| ⋮   | ⋮      | ⋮      | ⋮      | ⋮      | ⋮      | ⋮      | ⋮      | ⋮      | ⋮      |
| 模拟节点98  | 1.1539 | 1.1546 | 1.2123 | 1.1681 | 1.0585 | 1.0668 | 1.1362 | 1.1008 | 1.1875 |
| 模拟节点99  | 1.1981 | 1.1604 | 1.1906 | 1.2772 | 1.2764 | 1.2537 | 1.4521 | 1.5353 | 1.5886 |
| 模拟节点100   | 1.1365 | 1.1498 | 1.1390 | 1.1823 | 1.1290 | 1.1956 | 1.2848 | 1.3286 | 1.3701 |
| $f_{ci} \sim N(\mu_i, \sigma_i)$                                  |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| $\mu_i$   | 1.2031 | 1.2136 | 1.2455 | 1.2535 | 1.2660 | 1.2743 | 1.2838 | 1.2985 | 1.3229 |
| $\sigma_i$  | 0.0606 | 0.0816 | 0.1023 | 0.1166 | 0.1323 | 0.1416 | 0.1512 | 0.1662 | 0.1755 |
| $\text{TFN}_i \sim (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i})$                      |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| $a_{1i} = \mu_i - 2\sigma_i$                                      | 1.0820 | 1.0503 | 1.0409 | 1.0203 | 1.0015 | 0.9910 | 0.9815 | 0.9660 | 0.9719 |
| $a_{2i} = \mu_i$  | 1.2031 | 1.2136 | 1.2455 | 1.2535 | 1.2660 | 1.2743 | 1.2838 | 1.2985 | 1.3229 |
| $a_{3i} = \mu_i + 2\sigma_i$                                      | 1.3242 | 1.3769 | 1.4502 | 1.4866 | 1.5305 | 1.5576 | 1.5861 | 1.6310 | 1.6739 |
| $\alpha_i = \beta_i$  | 0.1211 | 0.1633 | 0.2046 | 0.2331 | 0.2645 | 0.2833 | 0.3023 | 0.3325 | 0.3510 |
| $\text{INT}_i = \otimes C_i^{(0)} = [C_{li}^{(0)}, C_{ui}^{(0)}]$ |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| $C_{li}^{(0)}(\text{元}\cdot\text{kg}^{-1})$                       | 1.1627 | 1.1592 | 1.1773 | 1.1757 | 1.1779 | 1.1799 | 1.1830 | 1.1877 | 1.2059 |
| $C_{ui}^{(0)}(\text{元}\cdot\text{kg}^{-1})$                       | 1.2435 | 1.2680 | 1.3137 | 1.3312 | 1.3542 | 1.3687 | 1.3846 | 1.4093 | 1.4399 |

### 3.5 成本预测

正确给定布朗运动的参数是成本预测成败的关键.本文在理论模型的基础上,通过组合仿真实验方法给出了漂移系数与浮动系数的合理组合 $\mu = 0.01, \sigma = 0.05$ .在考虑运营成本现值 $S_0 = 1.2\text{元}/\text{kg}$ 的前提下,执行100次模拟,对得到的2017~2025年成本的布朗运动模拟路径可视化,使用MATLAB绘制于图8.可以看出运营成本总体趋势向上漂移,中心线斜率约为0.0313,拟合直线方程为 $y = 0.0313x + 1.2$ ,由图可知2024年比现值上涨约0.25元,是1个比较合理的上涨幅度,随着采矿机械化自动化水平的提高,总体

运营成本增幅减缓.但在短期内会随着市场未知因素的影响呈现一定幅度的波动,图8中上拟合包络线 $y = 0.0837x + 1.33$ 和下拟合包络线 $y = -0.0125x + 1$ 之间的部分给出了成本的波动区间.然后,将这100条模拟路径节点数据填入表4中.

然后,依次计算出年成本均值 $\mu_i$ 及标准差 $\sigma_i, i = 2017 \sim 2025$ .按照式(33)进行三角模糊化处理,得到三角模糊数 $(a_{1i}, a_{2i}, a_{3i})$ ,对应隶属度如图9所示.然后,依据式(34)转换成模糊区间数:

$$\otimes C^{(0)} = \{[C_l^{(0)}, C_u^{(0)}]\} =$$



{[1.1627, 1.2435], [1.1592, 1.2680], [1.1773, 1.4093], [1.2059, 1.4399]},  
 [1.3137], [1.1757, 1.3312], [1.1779, 1.3542],  
 [1.1799, 1.3687], [1.1830, 1.3846], [1.1877,

将该模糊区间数及计算过程中得到的样本均值、标准差和三角模糊数一并记录于表4中.

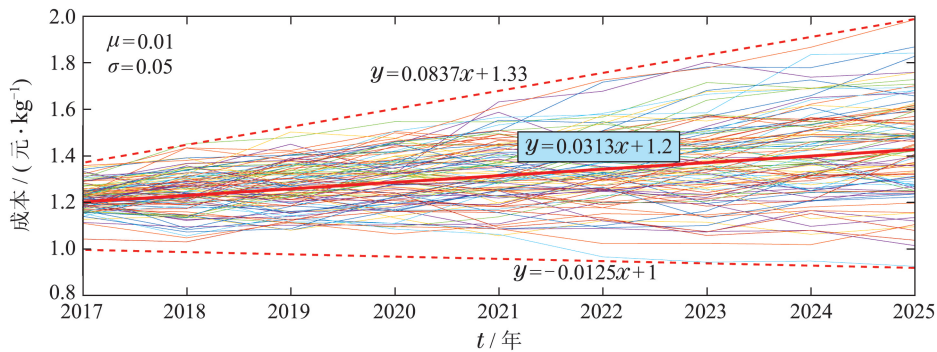


图 8  $\mu = 0.01, \sigma = 0.05, S_0 = 1.20$ 组合参数下的布朗运动对成本的100条模拟路径

Fig. 8 100 simulation paths of Brown motion under the combination of parameters  $\mu = 0.01, \sigma = 0.05$  and  $S_0 = 1.20$  on costs from year 2017 to year 2025

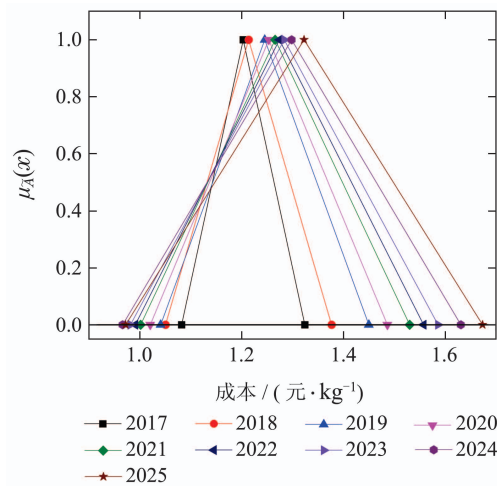


图 9 2017 ~ 2025年模拟成本的三角模糊数表示

Fig. 9 The triangular fuzzy numbers of cost simulated by Brown motion from year 2017 ~ 2025

因为年规划总开采量为  $Q = 100\,000$  t, 而开采每吨铜矿所需运营成本为  $\otimes C^{(0)}$ , 所以年运营成本计算公式为

$$\otimes C_y = Q \cdot \otimes C^{(0)} = Q \cdot \{[C_l^{(0)}, C_u^{(0)}]\}. \quad (39)$$

将  $Q$  值及 2020 ~ 2024 年运营成本的预测值序列 {[1.1757, 1.3312], [1.1779, 1.3542], [1.1799, 1.3687], [1.1830, 1.3846], [1.1877, 1.4093]} 代入公式(39)得到上述5个生产年的运营成本序列:

$$\otimes C_y = \{[117.574, 133.115], [117.786, 135.420], [117.988, 136.874], [118.303, 138.456], [118.766, 140.932]\}.$$

将结果记录于表5中.

表 5 2020 ~ 2024 生产年矿山运营成本值  
 Table 5 Operation cost of mine from year 2020 to 2024

|            | 2020               | 2021               | 2022               | 2023               | 2024               |
|------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $C_y$ /百万元 | [117.574, 133.115] | [117.786, 135.420] | [117.988, 136.874] | [118.303, 138.456] | [118.766, 140.932] |

### 3.6 形成决策

在实际评估分析过程中, 很少将折现率  $r$  视为定值, 除货币的时间价值外, 还要考虑风险等附加因素, 因此折算系数  $1 + r$  表现为一个逐年增大的数值序列. 不妨将 2020 ~ 2024 年的折算系数定义为

$$\otimes r = [r_l, r_u] = \{[1.01, 1.06], [1.12, 1.20], [1.20, 1.30], [1.30, 1.42], [1.40, 1.55]\}.$$

为便于计算, 将其记录于表6中. 则每年现值按公式

$$\otimes PV_i = \frac{\otimes R_{yi} - \otimes C_{yi}}{1 + \otimes r_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (40)$$

计算得到, 填入表格6中, 单位为“百万元”.

根据式(31)计算出2020年至2024年每年的净现值, 单位均为“百万元”.

• 2020年度净现值为

表6 2020~2024生产年的折现现金流

Table 6 Discounted cash flow of mine from year 2020 to 2024

|             | 2020               | 2021               | 2022               | 2023               | 2024               |
|-------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $R_y$ /百万元  | [84.085, 217.300]  | [83.361, 221.952]  | [82.621, 226.563]  | [81.866, 231.133]  | [81.097, 235.660]  |
| $C_y$ /百万元  | [117.574, 133.115] | [117.786, 135.420] | [117.988, 136.874] | [118.303, 138.456] | [118.766, 140.932] |
| $R_y - C_y$ | [-49.030, 99.726]  | [-52.059, 104.166] | [-54.253, 108.575] | [-56.590, 112.830] | [-59.835, 116.894] |
| 折现系数        | [1.01, 1.06]       | [1.12, 1.20]       | [1.20, 1.30]       | [1.30, 1.42]       | [1.40, 1.55]       |
| 现值/百万元      | [-48.544, 98.739]  | [-46.481, 93.005]  | [-45.210, 90.479]  | [-43.530, 86.792]  | [-42.739, 83.496]  |

$$\begin{aligned} \otimes NPV_{2020} &= [NPV_{2020}^l, NPV_{2020}^u] = \\ &= \sum_{i=1}^1 \frac{\otimes R_{yi} - \otimes C_{yi}}{1 + \otimes r_i} - \otimes I = \\ &= [-48.544, 98.739] - [80, 120] = \\ &= [-168.54, 18.739], \end{aligned}$$

其白化值为

$$\tilde{\otimes} NPV_{2020} = \lambda NPV_{2020}^l + (1 - \lambda) NPV_{2020}^u$$

取 $\lambda = 0.5$ , 得净现值的均值白化值

$$\tilde{\otimes} NPV_{2020} = -74.9025.$$

按照相同的方法求出2021~2024年的净现值

$$\otimes NPV_{2021} = [-215.030, 111.740],$$

$$\otimes NPV_{2022} = [-260.235, 202.223],$$

$$\otimes NPV_{2023} = [-303.765, 289.015],$$

$$\otimes NPV_{2024} = [-346.500, 372.510].$$

同样, 得到 $\lambda = 0.5$ 时的均值白化值, 依次为

$$\tilde{\otimes} NPV_{2021} = -51.6405,$$

$$\tilde{\otimes} NPV_{2022} = -29.006,$$

$$\tilde{\otimes} NPV_{2023} = -7.375,$$

$$\tilde{\otimes} NPV_{2024} = 13.0035.$$

变化趋势如图10所示。

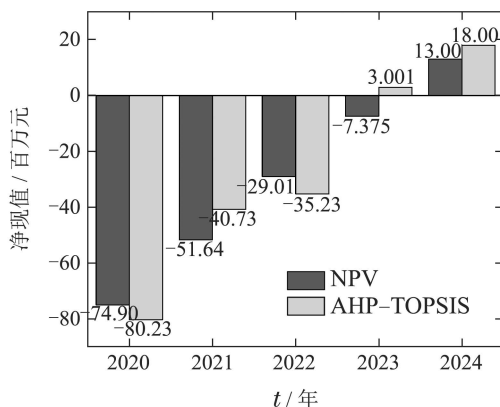


图10 2020~2024生产年净现值的变化趋势

Fig. 10 Variation tendency of annual NPV from 2020 to 2024

从图10可以看出, 在目前经济形式下, 及政府5年内免税减息的优惠条件下, 投资1亿元人民币, 实现铜矿年采量100000t, 并于第5生产年开始赢利是可以实现的. 在决策过程中, 综合考虑了铜矿年产量、铜矿金属品味、采矿回收率、精矿金属含量、市场价格的变化、运营成本的波动、货币的时间价值以及折现率的波动等多种因素. 综合采用了GM(1, 1)预测理论和布朗运动模拟机制, 实现了以NPV为目标函数的投资决策.

结合对铜矿山建设项目进行投资的研究案例<sup>[28]</sup>, 计算得到层次分析法-逼近理想解排序方法(analytic hierarchy process-technique for order preference by similarity to an ideal solution, AHP-TOPSIS) 组合模型下的预测值(图10). 发现AHP-TOPSIS组合方法对于未确知因素考虑不全面会导致预测序列的较大波动, 给出了第4年开始出现盈利的结论, 而本文所提出的方法第5年开始盈利, 相对比较保守. 但两种方法给出的决策结论是一致的, 即投资开采是可行的.

### 3.7 决策优势

文中给出的决策理论及方法具有较为明显的特征或优势, 突出表现为以下几个方面:

1) 采用了灰色GM(1, 1)预测理论, 仅需要至少4个数据便能完成对关键决策参数的模拟及预测, 而传统的统计方法至少需要30个有效数据.

2) 采用了模糊区间化理论, 实现了所有参数的模糊区间化转换, 给出了具有波动特征参数的系统决策方法, 增强了决策的适应性与模型的稳健性.

3) 采用了几何布朗运动的随机性特征实现了对项目运营成本的变化模拟, 对成本浮动及波动路径给出了简单而形象的可视化描述.

4) 更易于与人工智能优化算法, 如蚁群算法、人工蜂群算法相结合, 通过优化GM(1, 1)预测模型的结构及参数达到提高预测精度的目的.

## 4 结论

研究成果主要包括3个方面, 总结如下:

1) 给出了一种模糊数采用区间灰值表示的方法.

以此为基础, 提出了一种新颖的模糊区间GM(1, 1)预测理论, 它将较难实现的模糊区间变化趋势的预测转换成了对区间上、下限变化趋势的分别预测, 巧妙绕过了采用灰数矩阵求逆理论对区间变化趋势的直接预测, 而灰数矩阵求逆目前还没有切实可行的实现方法。

2) 采用了布朗运动随机运动实现了对项目运营成本变化规律的模拟, 而正确给定布朗运动方程式中的参数是成本预测成败的关键。本文在理论模型的基础上, 通过组合仿真实验方法, 对成本的浮动和波动路径给出了简单而形象的可视化描述, 进而确定了漂移系数与浮动系数的合理组合。

3) 以铜矿投资决策为例, 给出了的金属矿山投资决策的系统理论与实施方法。在决策过程中, 综合考虑了铜矿年产量、铜矿金属品味、采矿回收率、精矿金属含量、市场价格的变化、运营成本的波动、货币的时间价值以及折现率的波动等多种因素。综合采用了GM(1, 1)预测理论和几何布朗运动模拟机制, 实现了以NPV为目标函数的投资决策。

## 参考文献:

- [1] HU Xiuyi, SHI Xiuzhi, ZHOU Jian, et al. Evaluation of investment risk in metal mines based on Fisher's test. *Nonferrous Metal Engineering*, 2017, 7(4): 83 – 87.  
(胡修壹, 史秀志, 周健, 等. 基于Fisher判别法的金属矿山投资风险评价. 有色金属工程, 2017, 7(4): 83 – 87.)
- [2] MELLICHAMP D A. New discounted cash flow method: estimating plant profitability at the conceptual design level while compensating for business risk/uncertainty. *Computers & Chemical Engineering*, 2013, 48(2): 251 – 263.
- [3] REGNIER E D. Discounted cash flow methods and environmental decisions. *Journal of Agricultural Economics*, 2001, 16(2): 555 – 562.
- [4] ZHAO Xiaoyue, HE Shurui, CHEN Xianzhong, et al. Machine learning algorithm of blast furnace radar in strong interference environment. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(12): 1667 – 1673.  
(赵晓月, 何书睿, 陈先中, 等. 强干扰环境下高炉雷达信号机器学习算法. 控制理论与应用, 2016, 33(12): 1667 – 1673.)
- [5] CHENG Hua, LI Yanmei, LUO Qian, et al. Study on the prediction of arrival delays in Hong Kong based on C4.5 decision tree method. *Systems Engineering Theory & Practice*, 2014, 34 (S1): 239 – 247.  
(程华, 李艳梅, 罗谦, 等. 基于C4.5决策树方法的到港航班延误预测问题研究. 系统工程理论与实践, 2014, 34(S1): 239 – 247.)
- [6] CHEN Baiyi, LIU Yanbin, LEI Hao, et al. Stability boundary analysis of hypersonic vehicle with control saturation and bandwidth limitation. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(11): 1508 – 1518.  
(陈柏屹, 刘燕斌, 雷灏, 等. 输入饱和及带宽限制下高超飞行器的闭环稳定边界研究. 控制理论与应用, 2016, 33(11): 1508 – 1518.)
- [7] HE Wei. *Study on application of Monte Carlo simulation in mining investment risk analysis*. Kunming: Kunming University of Technology, 2015.  
(何巍. 蒙特卡洛模拟在矿业投资风险分析中的应用研究. 昆明: 昆明理工大学, 2015.)
- [8] YI Hao, YANG Zhaojun. Consumption-utility based pricing of payments following mean reversion. *Control Theory & Applications* 2009, 26(5): 494 – 498.  
(易昊, 杨招军. 均值回复收益的消费效用无差别定价. 控制理论与应用, 2009, 26(5): 494 – 498.)
- [9] SWISHCHUK A, WARE A, LI H. Option pricing with stochastic volatility using fuzzy sets theory. *Mathematics in Practice & Theory*, 2008, (3): 129 – 134.
- [10] DIMITRAKOPOULOS R. Applied risk assessment for ore reserves and mine planning. *Australasian Institute of Mining and Metallurgy, Melbourne*, 2007, 16(23): 350 – 361.
- [11] LI Songqing, LIU Yiling. Mining investment decision model based on deferred real option. *Systems Engineering*, 2008, 26(3): 124 – 126.  
(李松青, 刘异玲. 基于延迟实物期权的矿业投资决策模型. 系统工程, 2008, 26(3): 124 – 126.)
- [12] LIN Lu, LI Feng, ZHU Lixing, et al. Regression of mean volatility. *Journal of System Science and Mathematical*, 2015, 35(12): 1383 – 1401.  
(林路, 李锋, 朱力行, 等. 均值波动率回归. 系统科学与数学, 2015, 35(12): 1383 – 1401.)
- [13] DENG Julong. *Grey System*. Beijing: National Defence Industry Press, 1985.  
(邓聚龙. 灰色系统. 北京: 国防工业出版社, 1985.)
- [14] ZENG B, CHEN G, LIU S F. A novel interval grey prediction model considering uncertain information. *Journal of the Franklin Institute*, 2013, 350(10): 3400 – 3416.
- [15] ZENG Xiangyan. *Study on several kinds of developed models of GM(1, 1)*. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2016.  
(曾祥艳. 灰色预测GM(1, 1)模型的几种拓广模型研究. 成都: 电子科技大学, 2016.)
- [16] FANG Zhigeng, LIU Sifeng, LU Fang, et al. Study on improvement of token and arithmetic of interval grey numbers and its GM(1, 1) model. *Strategic Study of CAE*, 2005, 7(2): 57 – 61.  
(方志耕, 刘思峰, 陆芳, 等. 区间灰数表征与算法改进及其GM(1, 1)模型应用研究. 中国工程科学, 2005, 7(2): 57 – 61.)
- [17] YOU Zhongsheng, HE Li. Study on modeling conditions of GM(1, 1) interval prediction based on sequence enveloping band. *Journal of Southwest University (Natural Science Edition)*, 2015, 37(1): 150 – 154.  
(游中胜, 何丽. 基于序列包络带的GM(1, 1)区间预测建模条件研究. 西南大学学报(自然科学版). 2015, 37(1): 150 – 154.)
- [18] GLIGORIC Z, KRICAK L, BELJIC C, et al. Evaluation of underground zinc mine investment based on fuzzy-interval grey system theory and geometric brownian motion. *Journal of Applied Mathematics*, 2014, 7(23): 1 – 12.
- [19] WU Heping. *Analysis and simulation of mining investment risk under uncertain conditions*. Changsha: Central South University, 2008.  
(吴和平. 不确定性条件下的矿业投资风险分析与模拟. 长沙: 中南大学, 2008.)
- [20] GASILOV N, SAHIN E A, FATULLAYEV A G. Solution of linear differential equations with fuzzy boundary values. *Fuzzy Sets & Systems*, 2014, 257(S1): 169 – 183.
- [21] DUBOIS D, PRADE H. The mean value of a fuzzy number. *Fuzzy Sets & Systems*, 1987, 24(3): 279 – 300.
- [22] CARLSSON C, FULLER R. On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets & Systems*, 2001, 122(2): 315–326.

- [23] WANG Qingyin, LÜ Ruihua. The intrinsic relation between universal grey number and intervals number standard expression as well as four arithmetic operation. *Mathematics in Practice and Theory*, 2005, 35(6): 216 – 222.  
(王清印, 吕瑞华. 区间数的标准表示及其四则运算法则与泛灰数的内在联系. 数学的实践与认识, 2005, 35(6): 216 – 222.)
- [24] ZHOU Junjian. Direct representation of interval grey number four operations. *Journal of Hebei Engineering University (Natural Science Edition)*, 1992, (3): 17 – 20.  
(周俊健. 区间型灰数四则运算的直接表示. 河北工程大学学报(自然科学版), 1992, (3): 17 – 20.)
- [25] WANG Lei, GUO Sicong, LI Na. Numerical solutions of fuzzy differential equations with promotion of Hukuhara derivatives. *Computer Engineering and Applications*, 2012, 48(2): 56 – 58.  
(王磊, 郭嗣琮, 李娜. 具有推广Hukuhara导数的模糊微分方程的数值解. 计算机工程与应用, 2012, 48(2): 56 – 58.)
- [26] HUKUHARA M. Intégration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe. *Funkcialaj Ekvacioj*, 1967, 10(3): 205 – 223.
- [27] LIU Yi. Simulation and prediction on stock price based on the Ito process. *Beifang Jingmao*, 2011, (3): 109 – 111.  
(柳艺. 基于伊藤过程对股票价格的模拟和预测. 北方经贸, 2011, (3): 109 – 111.)
- [28] FENG Bitao. *Research on investment decision of copper mine construction project based on multi-attribute decision making method*. Beijing: Beijing University of Technology, 2013.  
(冯碧涛. 基于多属性决策方法的铜矿山建设项目投资决策研究. 北京: 北京工业大学, 2013.)

#### 作者简介:

**李守军** 博士研究生, 主要从事人工智能、模式识别与预测决策研究, E-mail: lishoujunbox@126.com;

**马小平** 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事人工智能、信息融合研究, E-mail: xpma@cumt.edu.cn;

**杨春雨** 博士, 教授, 主要从事控制系统建模、分析与设计研究, E-mail: chunyuayang@cumt.edu.cn.