

# 一类受约束非线性系统的有限时间优化镇定

淳于丹丹, 苏佰丽, 孙宗耀<sup>†</sup>

(曲阜师范大学 工学院, 山东 日照 276826)

**摘要:** 优化控制方法可以考虑系统性能和节省能源, 但是不能给出初始稳定区域的描述. 本文阐述的优化控制方法可以给出初始稳定区域的描述, 使得约束非线性系统有限时间稳定. 首先设计有限时间优化控制器使得系统的状态在有限时间内进入初始稳定区域, 同时优化目标函数, 系统实现性能最优和消耗最小. 进而设计有限时间鲁棒镇定控制器使得系统的状态在有限时间内收敛到原点. Lyapunov函数分析方法给出了吸引域的估计, 并确保在不同状态下, 设计的控制器使得闭环系统有限时间稳定. 最后给出了一个仿真实例验证算法的有效性.

**关键词:** 非线性系统; Lyapunov函数; 优化控制; 有限时间控制

**引用格式:** 淳于丹丹, 苏佰丽, 孙宗耀. 一类受约束非线性系统的有限时间优化镇定. 控制理论与应用, 2019, 36(5): 753 – 758

DOI: 10.7641/CTA.2018.70851

## Finite-time optimization for a class of constrained nonlinear systems

CHUNYU Dan-dan, SU Bai-li, SUN Zong-yao<sup>†</sup>

(College of Engineering, Qufu Normal University, Rizhao Shandong 276826, China)

**Abstract:** The optimization control method can consider the performance of the system and save energy, but it can't give the description of the initial stability region. An optimization control method that can give the description of the initial stability region is presented in this paper to stabilize a class of switched nonlinear systems with constraints in finite time. First, finite-time optimization controller is designed to pull system's states to enter the initial stability region in finite time, at the same time, objective function is optimized, the system can achieve the best performance and the lowest energy consumption. Then finite-time robust stabilizing controller ensures that the system's states converge to the origin in finite time. The estimation of the region of attraction can be prescribed by Lyapunov function method, and the controllers can stabilize the closed-loop system according to the different states in finite time. Final, the simulation example is used to verify the effectiveness of the proposed algorithm.

**Key words:** nonlinear systems; Lyapunov function; optimization control; finite time control

**Citation:** CHUNYU Dandan, LIU Quanli, SUN Zongyao. Finite-time optimization for a class of constrained nonlinear systems. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(5): 753 – 758

## 1 引言

稳定性是研究控制系统性能时要考虑的一个极其重要的方面, 特别地, 在许多工业系统的实际应用中, 需要系统能够在有限时间内收敛到平衡点, 所以有限时间稳定性在近年来得到了快速的发展.

有限时间稳定这个概念最早是在文献[1]中提出. 随后, 文献[2]给出了线性系统有限时间稳定的停息时间表达式. 文献[3]针对一类连续非线性自治系统, 研究了其有限时间稳定性问题并给出了有限时间稳定

的充分必要条件, 奠定了研究非线性系统的有限时间稳定问题的基础. 文献[4]采用了时滞依赖Lyapunov Krasovskii泛函和平均驻留时间法, 讨论了一类脉冲随机系统的有限时间有界性和 $H_\infty$ 控制. 文献[5]设计的状态反馈控制器, 不仅保证有限时间稳定性还加快了系统的收敛速度. 文献[6]在文献[5]的基础上, 针对一类随机非线性系统, 通过增加幂次积分方法设计了状态反馈控制器, 使得闭环系统有限时间稳定. 文献[7]针对一类不确定非线性系统, 采用了一种连续的有

收稿日期: 2017-11-20; 录用日期: 2018-06-05.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: sunzongyao@soho.com; Tel.: +86 537 4455719.

国家自然科学基金项目(61374004, 61773237, 61473170), 中国博士后科研基金项目(2017M610414), 山东省研究生教育优质课程(SDYKC17079), 山东省重点研发计划项目(2017GSF18116)资助.

本文责任编辑: 刘淑君.

Supported by the Natural Science Foundation of China(61374004, 61773237, 61473170), the China Postdoctoral Science Foundation Funded Project (2017M610414), the Shandong Province Quality Core Curriculum of Postgraduate Education (SDYKC17079) and the Development Programs of Shandong Province (2017GSF18116).

限时间反馈镇定控制律,使其全局鲁棒有限时间镇定.文献[8]研究了一类高阶不确定非线性系统的有限时间镇定问题,通过将符号函数与自适应技术相结合的方法,设计了一种自适应控制器,处理不确定性和非线性增长率.文献[9]设计了一种基于符号函数和增加幂次积分法的状态反馈控制器,统一了在现有结果中用于处理高阶和低级非线性增长率的Lyapunov函数的构造,还大大缩短了文献[8]的收敛时间.

非线性系统的有限时间稳定问题已有相当丰富的成果,但是大多数有限时间稳定的研究成果在设计过程中没有结合对系统性能及节省能源的考虑,即没有就事先给定的性能指标进行优化设计.值得一提的是,动态优化控制方法可以很好地处理系统约束,并且可以综合对系统性能足够的考虑<sup>[10-12]</sup>.文献[13]针对一类有约束的高阶线性系统,采用降阶优化控制方法使系统稳定.在文献[14]中,针对一类输入受约束且状态不可测的非线性切换系统,采用了一种混合非线性优化控制方法,给出了初始稳定区域的描述并使系统稳定.文献[15]考虑一类带有不确定性的切换非线性系统,利用了一种混合Lyapunov优化控制方法,保证了系统的渐近稳定性.文献[16]在文献[15]的基础上,设计了一种基于Lyapunov函数的预测控制器,使得状态约束为软约束的不确定性的非线性切换系统渐近稳定.在文献[17]中,针对一类不确定切换非线性系统,设计了基于Lyapunov函数的输出反馈控制器,使其渐近稳定.文献[13-17]都是针对非线性系统的渐近稳定问题做出的研究.

目前为止,针对非线性系统的有限时间优化控制方面的研究还很少.针对以上问题,本文将针对一类具有状态约束和控制约束的非线性系统,给出一种使得系统有限时间稳定的新的优化控制方法.本文主要贡献如下:1) 依据事先设定的目标函数,设计有限时间优化控制器,使得目标函数达到最优的同时,使得系统在有限时间内到达稳定区域;2) 基于选定的Lyapunov函数,构建一种新的有限时间鲁棒控制器,使得系统有限时间稳定,同时给出稳定区域的具体描述,相比于以往的鲁棒控制器<sup>[15-16]</sup>,这里设计的控制器可以在有限时间内到达平衡点;3) 根据状态的不同,切换不同的控制器,确保任意初始条件下系统可以达到有限时间稳定.本文中记号 $L_f h$ 表示标量函数 $h(x)$ 关于函数 $f(x)$ 的标准李导数,即

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x);$$

上右导数

$$D^+ \nu(t) = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{\nu(t+h) - \nu(t)}{h};$$

$\|\cdot\|$ 表示欧式范数; $\|\cdot\|_Q^2$ 表示 $x^T(t)Qx(t)$ .

## 2 问题阐述及预备知识

### 2.1 问题阐述

考虑如下受约束的非线性系统:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

其中:  $x(t) \in X \subseteq \mathbb{R}^n$  是系统的状态变量,  $X$  表示对状态  $x$  的约束,  $u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m$  是系统的输入变量,  $U = \{u \in \mathbb{R}^m : \|u\| \leq u^{\max}\}$  是一非空闭凸集, 表示对输入  $u$  的约束,  $u^{\max} \geq 0$  表示输入约束的幅值,  $f(\cdot)$  和  $g(\cdot)$  为定义在  $X$  上的连续可微的向量函数, 且  $f(0) = 0, g(0) = 0$ , 即  $0$  为系统(1)的平衡点,  $X$  和  $U$  是包含原点的闭凸集. 本文假定状态变量  $x(t)$  为可测的.

控制目标是在状态和输入变量均满足给定约束的前提下, 设计连续的控制律, 使得闭环系统实现全局有限时间稳定.

### 2.2 预备知识

首先给出有限时间稳定的概念:

对于下述自治系统:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

其中:  $x(t) \in X \subseteq \mathbb{R}^n$  是系统的状态变量,  $f(\cdot)$  为定义在  $X$  上的连续可微的向量函数.

**定义<sup>[3]</sup>** 对于  $\forall x_0 \in B \setminus \{0\}$ , 系统(2)在原点的开邻域  $B \subseteq X$  内, 存在某一  $T(x_0) (0 \leq T(x_0) < \infty)$ , 使得它的解  $x(t) = x(t; t_0, x_0) \in B$ , 并且对于  $\forall t \in [t_0, T(x_0))$  有  $\lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t) = 0$ , 同时平衡点  $x = 0$  是Lyapunov意义下稳定的, 则称系统(2)是有限时间稳定的. 如果  $B = X = \mathbb{R}^n$ , 则称系统(2)是全局有限时间稳定的.

比较引理<sup>[18]</sup>, 考虑标量微分方程

$$\dot{\mu} = f(t, \mu), \quad \mu(t_0) = \mu_0, \quad (3)$$

对  $\forall t \geq 0$  和所有  $\mu \in E \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f(t, \mu)$  对于  $t$  连续可微, 且对于  $\mu$  是局部Lipschitz的. 设  $[t_0, T_c) (T_c$  可以是无限的) 是解  $\mu$  存在的最大区间, 并且假设对于  $\forall t \in [t_0, T_c)$  有  $\mu(t) \in E$ . 设  $\nu(t)$  是连续函数, 它的上右导数  $D^+ \nu(t)$  对  $\forall t \in [t_0, T_c), \mu(t) \in E$  有如下微分不等式:

$$D^+ \nu(t) \leq f(t, \nu(t)), \quad \nu(t_0) \leq \mu(t_0), \quad (4)$$

那么对  $\forall t \in [t_0, T_c)$ , 有  $\nu(t) \leq \mu(t)$ .

## 3 控制器设计

### 3.1 有限时间优化控制器设计

本部分将在考虑路径最优以及能源消耗最少的前提下设计控制器, 以使得系统在有限时间内到达预定区域.

首先, 选取某一有限时间  $t_f, t_f > t_0$ , 合适的Lyapunov函数  $V$  及常数  $r \in (0, 1), c > 0$ , 设计动态优化控制器, 以使得系统状态在有限时间  $t_f$  内到达预先给定的稳定区域  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \delta\}$ ,  $\delta$  为一个正实数,

即满足终端约束:  $x(t_f) \in \Omega$ . 选取采样时刻  $\Delta \in (0, \Delta^*]$ ,  $\Delta^*$  是一个正实数, 是最大允许采样间隔, 有限时间优化控制器可以通过求解如下形式的有限时域优化问题得到

$$\min_u J = \int_t^{t+N\Delta} (\|x(\tau)\|_Q^2 + \|u(t+\tau|t)\|_P^2) d\tau, \quad (5)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t+s\Delta|t), \\ x(t) \in X, x(t_f) \in \Omega, u(t+s\Delta|t) \in U, \\ \dot{V}(x(t)) \leq -cV^r(x(t)), V(x(t_0)) > \delta, \end{cases} \quad (6)$$

其中:  $Q$  是正定矩阵,  $P$  是正定对称矩阵. 对该优化问题求解, 可得  $u^*(t+l|t)$  ( $l \in [0, N\Delta)$ ), 它表示利用  $t$  时的参数计算得到  $t+l$  时的控制器,  $N$  为预测时域, 然后通过采样定理确定最大采样间隔, 对控制进行离散化, 得到  $u^*(t+s\Delta|t)$ , 其中  $s=0, 1, 2, \dots, N$ , 仅将  $u^*(t|t)$  应用于系统中, 在下一时刻  $t+\Delta$  重新进行优化, 对系统做及时的校正, 由此滚动优化, 将得到的控制器定义如下:

$$u_m = \min_u J. \quad (7)$$

**注 1** 该控制器可以将系统状态在有限时间  $t_f$  内控制进预定区域  $\Omega$ , 该有限时间  $t_f$  可以根据实际需要来确定.

**注 2** 性能指标  $J$  可以选择以上形式的性能指标(路径最优和能耗最小), 也可以选择系统在系统工作范围内, 尽可能减少各时刻工作状态对应的经济指标在整个生产过程中的累积量.

**命题 1** 当系统初始状态在预定区域  $\Omega$  外, 也就是  $V(x_0) > \delta$  时, 将有限时间优化控制器(5)–(6)应用于系统(1), 可使系统状态沿最优路径在有限时间内进入预定区域  $\Omega$ .

**证** 针对系统(1), 当系统状态在预定区域  $\Omega$  外, 即  $V(x_0) > \delta$  时, 由式(6)可知, 选取的 Lyapunov 函数  $V(x)$  满足

$$\dot{V}(x(t)) \leq -cV^r(x(t)), \quad (8)$$

所以  $V(x)$  是单调递减的, 又由  $V(x)$  的正定性和(5)–(6)可知, 在时刻  $t_f$ , 有

$$x(t_f) \in \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \delta\}. \quad (9)$$

所以, 针对系统(1), 应用有限时间优化控制器(5)–(6), 可以使得系统状态沿最优路径在有限时间内进入预定区域  $\Omega$  内. 证毕.

**注 3** 系统(1)的初始状态在满足约束条件和未满足约束条件的情况下, 均可应用有限时间优化控制器(5)–(6), 将系统状态在有限时间内控制进预定区域  $\Omega$ : 如果初始状态未满足约束条件, 由式(6)可知, 应用有限时间优化控制器(5)–(6)可以使系统状态满足约束并且在有限时间内进入预定区域  $\Omega$ ; 如果初始状态满足约束条件, 对系统应用有限时间优化控制器(5)–(6)可将系统状态在有限时间内控制进预定区域  $\Omega$ .

### 3.2 基于 Lyapunov 函数的有限时间鲁棒控制器设计

在系统状态进入  $\Omega$  后, 设计基于 Lyapunov 函数的有限时间鲁棒控制器, 使系统状态在有限时间内到达平衡点.

仍选取第 3.1 节中的 Lyapunov 函数  $V(x)$ ,  $r \in (0, 1)$ ,  $c > 0$ , 构造如下控制器:

$$u_s = -k(x)L_g^T V(x), \quad (10)$$

其中:

$$k(x) = \begin{cases} \frac{\alpha(x) + \sqrt{\alpha^2(x) + \beta^4(x)}}{\beta^2(x)}, & \beta(x) \neq 0, \\ 0, & \beta(x) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

其中:

$$\begin{cases} \alpha(x) = L_f V(x) + cV^r(x), \\ \beta(x) = \|L_g^T V(x)\|. \end{cases} \quad (12)$$

利用式(10)–(12), 给出如下集合<sup>[9]</sup>:

$$\Phi(u) = \{x \in X : \alpha(x) \leq u_s \|L_g^T V(x)\|\}, \quad (13)$$

利用最小二乘估计方法, 可以计算出  $\Phi(u)$  的最大稳定估计集合为

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \theta_{\max}\}, \quad (14)$$

其中:  $\theta_{\max} > 0$ , 为使得  $\Omega(u) \subseteq \Phi(u)$  的最大估计值, 这里的  $\Omega$  为系统(1)的不变集, 即如果  $x(t_0) \in \Omega$ , 有  $x(t) \in \Omega, t > t_0$  (证明见命题 2 的证明).

**命题 2** 当状态位于稳定区域  $\Omega$  内时, 将基于 Lyapunov 函数  $V(x)$  的有限时间鲁棒控制器(10)–(12)应用于系统(1), 可使闭环系统有限时间稳定.

**证** 对系统(1), 由式(10)–(12)可知

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \frac{\partial V}{\partial x} (f(x(t)) + g(x(t))u_s(t)) = \\ &L_f V(x(t)) + L_g V(x(t)) \cdot (L_g^T V(x(t))) \times \\ &\left[ -\frac{\alpha(x) + \sqrt{\alpha^2(x) + \beta^4(x)}}{\beta^2(x)} \right] = \\ &L_f V(x(t)) - \alpha(x) - \sqrt{\alpha^2(x) + \beta^4(x)} = \\ &-cV^r(x(t)) - \sqrt{\alpha^2(x) + \beta^4(x)} \leq \\ &-cV^r(x(t)), \end{aligned} \quad (15)$$

因此有下式成立:

$$\dot{V}(x(t)) \leq -cV^r(x(t)). \quad (16)$$

由式(16)和文献[3]中的 Theorem 4.2 可知

$$V(x(t)) = 0, \forall t \geq T(x_0), \forall x_0 \in \Omega, \quad (17)$$

其中  $T(x_0) = t_0 + \frac{V^{1-r}(x_0)}{c(1-r)}$  为系统的稳定时间, 因此

$$x(t) = 0, \forall t \geq T(x_0), \forall x_0 \in \Omega, \quad (18)$$

所以,系统(1)在稳定区域 $\Omega$ 内经过有限时间 $T(x_0)$ 达到稳定. 证毕.

**注4** 该控制器在文献[15–16]的基础上做了适当修改,并在构造函数 $\alpha(x)$ 时加入了一项 $cV^r(x)$ ,这一项的加入保证了系统状态在有限时间内达到平衡点.

**注5** 该控制器依赖于所选择的Lyapunov函数,非线性系统基于控制Lyapunov函数的控制器设计及稳定性研究已有很多<sup>[16]</sup>,但是控制Lyapunov函数的构造仍是一个难题.本文选取的Lyapunov函数和文献[15]一样,都是 $V(x) = x^T R x$ ( $R$ 为正定矩阵),在文献[15]中的基础上,通过对控制器做了相应的改进,设计了控制器(10)–(12),相应地给出稳定区域 $\Omega$ .

**注6** 第3.1节中的预定区域 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \delta\}$ 由本部分给出的 $\Omega$ 确定,也就是式(14),即 $\delta = \theta_{\max}$ .

### 3.3 有限时间综合控制器设计

为了给出完整的控制器描述,将系统(1)写成如下切换形式:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u^{[i(t)]}(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (19)$$

其中 $i(t) : [0, \infty) \rightarrow \{1, 2\}$ 是一个分段右连续的切换信号.当且仅当 $i(t) = 1$ 时, $u^{[i(t)]} = u^{[1]}$ ;当且仅当 $i(t) = 2$ 时, $u^{[i(t)]} = u^{[2]}$ ,其中:

$$u^{[1]} \triangleq u_m = \min_u J, \quad (20)$$

$$u^{[2]} \triangleq u_s = -k(x)L_g^T V(x). \quad (21)$$

针对系统(1),控制输入在动态优化控制器(5)–(6)和基于Lyapunov函数的有限时间鲁棒控制器(10)–(12)之间进行切换,切换律为

$$i(t) = \begin{cases} 1, & x_0 \notin \Omega, \\ 2, & x_0 \in \Omega. \end{cases} \quad (22)$$

## 4 稳定性分析

针对系统(1),可以用第3部分设计的动态优化控制器和基于Lyapunov函数的有限时间鲁棒控制器,使其全局有限时间稳定,主要结果总结如下:

**定理1** 系统(1)在满足假设的前提下,控制器根据初始状态的位置在动态优化控制器(5)–(6)和基于Lyapunov函数的有限时间鲁棒控制器(10)–(12)之间进行选择,实现了闭环系统的全局有限时间稳定.

**证** 证明过程分2部分进行:

1) 当初始状态 $x_0 \notin \Omega$ 时,取 $t_f > t_0$ ,采用动态优化控制器(5)–(6)将系统状态沿最优路径拉进稳定区域 $\Omega$ 内,即 $x(t_f) \in \Omega$ ,然后将 $t_f$ 作为初始时间, $x(t_f)$ 作为系统的初始状态,将基于Lyapunov函数的有限时间鲁棒控制器(10)–(12)应用于系统(1),由上述命题2的证明过程可知系统(1)在稳定区域 $\Omega$ 内是有限时间稳

定的,使得系统稳定的有限时间为 $t_f + T(x_0)$ ,此时控制器进行了一次切换.

2) 当初始状态 $x_0 \in \Omega$ 时,此时控制器不需要切换.对系统(1)直接运用控制器(10)–(12),由上述命题2的证明过程可知系统(1)在 $\Omega$ 内是有限时间稳定的,此时使得系统稳定的有限时间为 $T(x_0)$ .

综上所述,对于任意的初始状态,控制器根据初始状态的位置在(5)–(6)和(10)–(12)之间进行选择,可保证系统(1)全局有限时间稳定. 证毕.

对上述定理,可得算法步骤如下:

1) 对系统(1),取适当的Lyapunov函数 $V(x)$ , $r \in (0, 1)$ , $c > 0$ ,设计控制器(10)–(12),计算出稳定区域 $\Omega$ .

2) 取合适的矩阵 $Q$ 和 $P$ ,设计动态优化控制器(5)–(6).

3) 判断初始状态与稳定区域 $\Omega$ 的位置关系,如果 $x_0 \notin \Omega$ ,采用控制器(5)–(6),将状态在有限时间内控制进稳定区域 $\Omega$ 内,再采用控制器(10)–(12),使系统有限时间稳定,有限稳定时间为 $t_f + T(x_0)$ ,此时控制器在两种控制器之间切换一次.

4) 如果 $x_0 \in \Omega$ ,采用控制器(10)–(12),使系统在稳定区域 $\Omega$ 内是有限时间稳定的,有限稳定时间为 $T(x_0)$ ,此时控制器不需要切换.

**注7** 如果初始状态不在系统的状态约束集内,采用控制器(5)–(6),使系统(1)的状态满足约束并且在有限时间 $t_f$ 内进入稳定区域 $\Omega$ ,然后对系统(1)应用有限时间优化控制器(10)–(12),控制器在(5)–(6)和(10)–(12)之间进行了一次切换,可使系统(1)在有限时间 $t_f + T(x_0)$ 内稳定.

最后,控制模式切换示意图如图1所示.

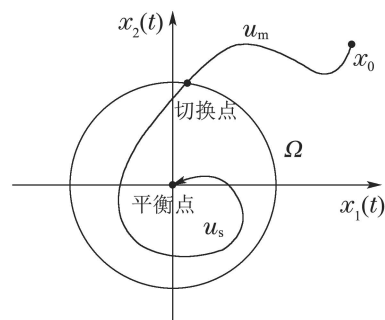


图1 控制模式切换示意图

Fig. 1 Control mode switch diagram

## 5 仿真实例

考虑如下2阶非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad (23)$$

其中状态和控制约束为

$$\begin{aligned} X &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq 6, |x_2| \leq 4\}, \\ U &= \{u \in \mathbb{R}^1 : |u| \leq 6\}. \end{aligned}$$

取Lyapunov函数 $V = \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ , 计算出预定区域为 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) \leq 0.8\}$ , 如图2所示.

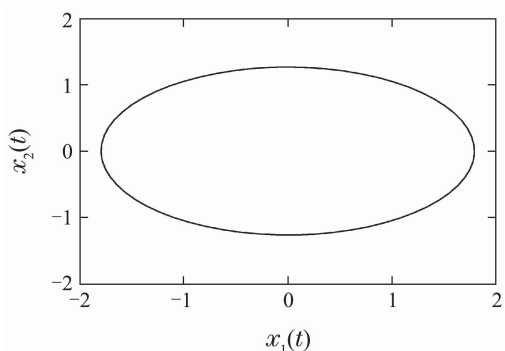


图2 预定区域  
Fig. 2 Prescribed area

对于系统(23), 根据初始状态的不同, 分3种情况进行仿真:

1) 取初始状态 $x_0 = [0.175 \quad -0.8]^T \in \Omega$ , 然后取 $c=0.0008, r=0.8$ , 应用控制器(10)–(12), 可得状态仿真结果如图3所示, 控制仿真结果如图4所示.

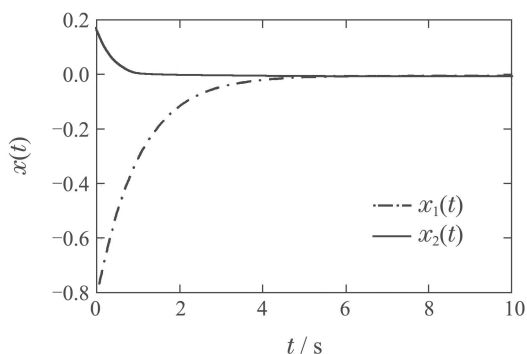


图3 状态轨迹曲线  
Fig. 3 State trajectory curves

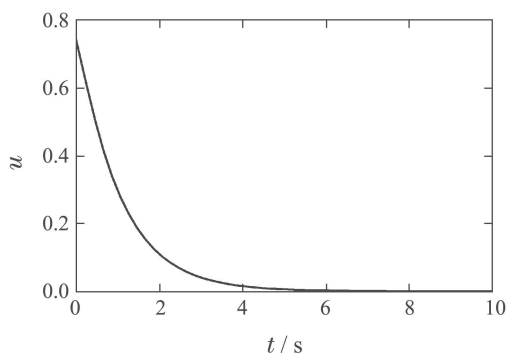


图4 控制曲线  
Fig. 4 Control curve

2) 取系统的初始状态 $x_0 = [2 \quad -2.84]^T \notin \Omega$ , 对其应用动态优化控制器 $u_m$ , 即式(5)–(6), 取 $Q=I, P=0.5I, T=0.1 \text{ s}, t_f=0.9 \text{ s}$ , 可使系统在0.9 s时的状态为 $[0.43 \quad -1.12]$ , 此时状态在预定区域 $\Omega$ 之内, 在0.9 s后, 应用基于Lyapunov函数的有限时间鲁棒控制器

$u_s$ , 取 $c=0.0001, r=0.1$ , 可使系统在有限时间内稳定. 仿真结果如图5–7所示.

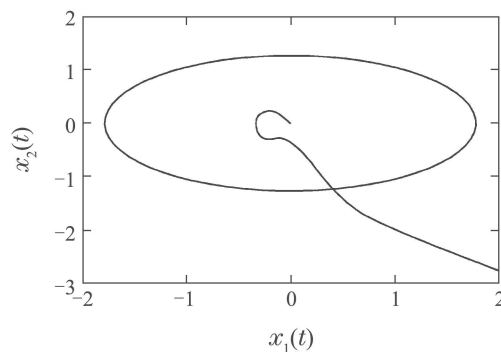


图5 状态轨迹曲线  
Fig. 5 State trajectory curves

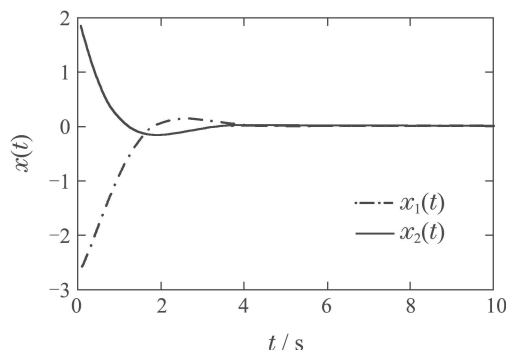


图6 状态轨迹曲线  
Fig. 6 State trajectory curves

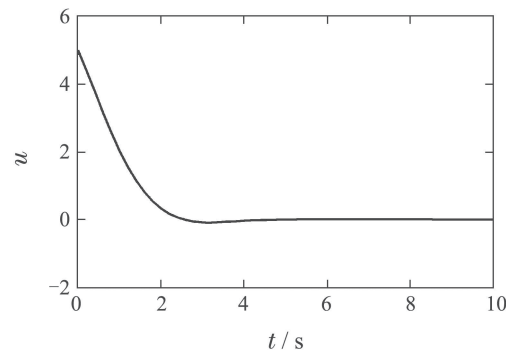


图7 控制曲线  
Fig. 7 Control curve

3) 取系统的初始状态 $x_0 = [7 \quad -6]^T$ , 此时初始状态位于系统约束集之外, 应用控制器 $u_m$ , 取 $Q=2I, P=I, T=0.5 \text{ s}, t_f=1 \text{ s}$ , 可以使系统在1 s时的状态为 $[2.2 \quad -3.6]$ , 此时状态位于预定区域之外, 再应用控制器 $u_m, Q=I, P=0.5I, T=0.1 \text{ s}$ , 可使系统在1 s之后的状态为 $[0.15 \quad -0.9]$ , 此时状态位于预定区域之内, 应用控制器 $u_s$ , 取 $c=0.0005, r=0.1$ , 可使系统有限时间稳定, 仿真结果如图8–10所示. 由图8–9的仿真结果可以看出, 无论初始状态是否位于约束集内, 都可以采用本文所设计的切换控制器使得系统在有限时间内稳定, 并且使得状态变量和控制变量满足约束.

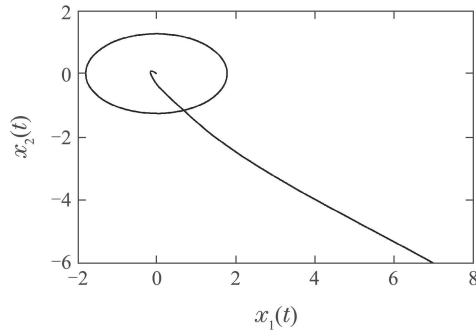


图8 状态轨迹曲线

Fig. 8 State trajectory curves

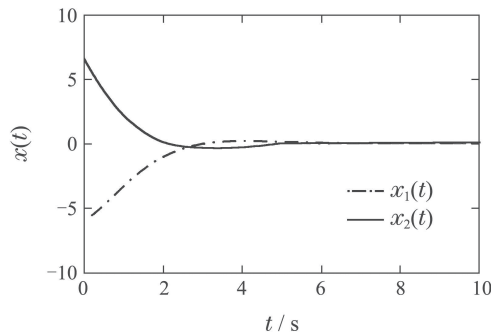


图9 状态轨迹曲线

Fig. 9 State trajectory curves

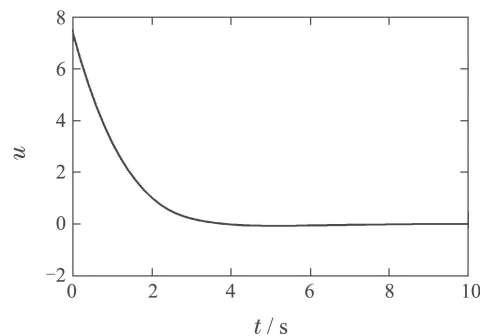


图10 控制曲线

Fig. 10 Control curve

## 6 结论

本文针对一类非线性约束系统首先采用了优化控制的方法,将系统的状态在有限时间内控制进预定区域内,然后基于Lyapunov函数设计有限时间鲁棒控制器,使状态在预定区域内是有限时间稳定的.最后,根据状态与预定区域的关系,采取不同的控制器使非线性约束系统有限时间稳定.下一步的研究工作是将本文中所采用的方法应用到非线性时滞系统、非线性扰动系统等的有限时间稳定性问题上.

## 参考文献:

- [1] KAMENKOV G V. On stability of motion over a finite interval of time. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1953, 17(2): 529 – 540.
- [2] CHOURA S. Design of finite-time settling regulators for linear systems. *ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 1994, 116(4): 602 – 609.

- [3] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, 38(3): 751 – 766.
- [4] YAO Fengqi, ZHU Xingxing. Finite-time boundedness analysis and  $H_\infty$  control for a class of impulsive stochastic systems. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(3): 291 – 298.  
(姚凤麒, 朱行行. 一类脉冲随机系统的有限时间有界性分析与 $H_\infty$ 控制. *控制理论与应用*, 2018, 35(3): 291 – 298.)
- [5] SHEN Y J, HUANG Y H. Global finite-time stabilisation for a class of nonlinear systems. *International Journal of Systems Science*, 2012, 43(1): 73 – 78.
- [6] ZHAO Y, ZHAO P. Finite-time state feedback stabilization for a class of stochastic nonlinear systems. *Proceedings of the IEEE International Conference on Information and Automation*. Ningbo, China: IEEE, 2017: 1325 – 1329.
- [7] LI Peng, ZHENG Zhiqiang, MA Jianjun. Global robust finite time stabilization of a class of nonlinear uncertain systems. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(7): 915 – 920.  
(李鹏, 郑志强, 马建军. 一类不确定非线性系统的全局鲁棒有限时间镇定. *控制理论与应用*, 2011, 28(7): 915 – 920.)
- [8] SUN Z Y, XUE L R, ZHANG K M. A new approach to finite-time adaptive stabilization of high-order uncertain nonlinear system. *Automatica*, 2015, 58(8): 60 – 66.
- [9] SUN Z Y, YUN M M, LI T. A new approach to fast global finite-time stabilization of high-order nonlinear system. *Automatica*, 2017, 81(6): 455 – 463.
- [10] MAYNE D Q, RAWLINGS J B, RAO C V, et al. Survey constrained model predictive control: stability and optimality. *Automatica*, 2000, 36(6): 789 – 814.
- [11] XI Yugen, LI Dewei, LIN Shu. Model predictive control: status and challenges. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(3): 222 – 236.  
(席裕庚, 李德伟, 林殊. 模型预测控制: 现状与挑战. *自动化学报*, 2013, 39(3): 222 – 236.)
- [12] MAYNE D Q. Model predictive control: recent developments and future promise. *Automatica*, 2014, 50(12): 2967 – 2986.
- [13] LOHNING M, REBLE M, HASENAUER J, et al. Model predictive control using reduced order models: guaranteed stability for constrained linear systems. *Journal of Process Control*, 2014, 24(11): 1647 – 1659.
- [14] SU Baili, LI Shaoyuan, ZHU Quanmin. Predictive control design of the initial stability region is given for constrained switched nonlinear systems. *Science China*, 2009, 39(5): 994 – 1003.  
(苏佰丽, 李少远, 朱全民. 约束切换非线性系统给出初始稳定区域的预测控制设计. *中国科学*, 2009, 39(5): 994 – 1003.)
- [15] MHASKAR P, EI-FARRA N H, CHRISTOFIDES P D. Robust hybrid predictive control of nonlinear systems. *Automatica*, 2005, 41(2): 209 – 217.
- [16] SU Baili, LI Saoyuan. Constrained predictive control for nonlinear switched systems with uncertainty. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(9): 1140 – 1146.  
(苏佰丽, 李少远. 具有不确定性的非线性切换系统的约束预测控制. *自动化学报*, 2008, 34(9): 1140 – 1146.)
- [17] SU B L, QI G Y, WYK B J V. Hybrid predictive control based on high-order differential state observers and Lyapunov functions for switched nonlinear systems. *Applied Mathematics*, 2013, 4(9): 32 – 42.
- [18] KHALIL H K. *Nonlinear Systems*. 2nd Edition. New York: Prentice Hall, 2002.
- [19] EI-FARRA N H, CHRISTOFIDES P D. Bounded robust control of constrained multivariable nonlinear processes. *Chemical Engineering Science*, 2003, 58(13): 3025 – 3047.

## 作者简介:

淳于丹丹 硕士研究生, 目前研究方向为预测控制和有限时间稳定, E-mail: 18853717356@163.com;

苏佰丽 教授, 目前研究方向为预测控制和模糊控制, E-mail: subaili111@126.com;

孙宗耀 副教授, 目前研究方向为非线性控制, E-mail: sunzongyao@sohu.com.