

DOI: 10.7641/CTA.2018.70887

## 考虑导航误差和摄动影响的椭圆轨道最优交会制导

靳 锴, 罗建军<sup>†</sup>, 郑茂章, 方 群

(西北工业大学 航天学院, 陕西 西安 710072; 飞行动力学技术国家重点实验室, 陕西 西安 710072)

**摘要:** 本文提出了一种新的航天器最优交会制导方法. 该方法能够快速精确求解包含  $J_2$  项与大气阻力项摄动的椭圆轨道交会问题, 并充分考虑非合作目标存在的导航误差, 保证交会精度的同时实现所需速度增量最优. 首先, 本文采用了一种新的状态转移矩阵求解方法, 能够对考虑  $J_2$  项和大气阻力项摄动的任意偏心率下的相对运动进行描述, 得到考虑摄动与偏心率信息的状态约束. 其次, 建立了导航误差模型, 得到描述导航误差的状态约束, 并分析其对交会精度与所需速度增量的影响, 设计包含加权矩阵的性能指标实现在存在导航误差情况下所需速度增量最优. 然后, 通过引入松弛变量, 将最优交会问题转化为标准二阶锥规划问题进行求解. 再者, 为了进一步提高相对距离较大的交会任务精度, 构建了闭环制导框架. 最后, 本文通过仿真, 验证了设计方法在考虑  $J_2$  项与阻力项摄动情况下的有效性, 针对椭圆轨道交会问题的精确性以及考虑导航误差情况下所需速度增量的最优性.

**关键词:** 非合作目标; 交会制导; 状态转移矩阵; 导航误差; 二阶锥规划

**引用格式:** 靳锴, 罗建军, 郑茂章, 等. 考虑导航误差和摄动影响的椭圆轨道最优交会制导. 控制理论与应用, 2018, 35(10): 1484 – 1493

中图分类号: TP273 文献标识码: A

## Guidance design with navigation errors for relative motion in noncircular perturbed orbits

JIN Kai, LUO Jian-jun<sup>†</sup>, ZHENG Mao-zhang, FANG qun

(School of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shaanxi 710072, China;  
National Key Laboratory of Aerospace Flight Dynamics, Xi'an Shaanxi 710072, China)

**Abstract:** This paper presents a new method to design the rendezvous trajectory with perturbations and navigation errors. Firstly, a new state transition matrices calculation method is used to model the relative motion of two spacecraft in arbitrarily eccentric orbits perturbed by  $J_2$ , differential drag and the differential mass to area ratio. The state transition matrices are derived by first performing a Taylor expansion on the equations of relative motion and subsequently integrating resulting linear differential equations. Secondly, the navigation errors are taken into consideration and a weighting vector is chosen to generate a new objective function to minimize the propellant consumption with the navigation errors. Thirdly, the rendezvous trajectory problem are cast as second order cone programming problem. Finally, a series of simulations are carried out to verify the effectiveness of the new state transition matrices calculation method in eccentric orbits, with the  $J_2$ , differential drag and the differential mass to area ratio for relative motion, and to prove that the new objective function can be better in propellant use.

**Key words:** uncooperative target; rendezvous guidance; state transition metrics; navigation error; second order cone programming

**Citation:** JIN Kai, LUO Jianjun, ZHENG Maozhang, et al. Guidance design with navigation errors for relative motion in noncircular perturbed orbits. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(10): 1484 – 1493

### 1 引言(Introduction)

21世纪以来,随着航天技术的发展,空间技术逐渐从最初的进入太空、探索太空转向利用太空、空间操作.空间交会作为航天器完成空间操作任务的基础,

是指两个或者两个以上的航天器在空间轨道上按预定位置和时间相会的技术.半个世纪以来,人类以交会技术为基础完成了空间站建造、载人登月和深空探测等复杂航天活动.文献[1]总结了最近30年航天器交

收稿日期: 2017-11-30; 录用日期: 2018-09-05.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: jjluo@nwpu.edu.cn; Tel.: +86 13991870252.

本文责任编辑: 陈杰.

国家自然科学基金项目(61690210, 61690211)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61690210, 61690211).

会问题以及所遇到的技术挑战,介绍了多项航天器任务中的交会与接近操作,以及如何使用航天器交会与接近技术来完成空间任务,涵盖了Mercury, Gemini, Apollo, Skylab以及Apollo/Soyuz等.文献[2-4]对轨道交会的工程、任务以及技术的背景与发展过程进行了全面的介绍,并对轨道交会的标准形成进行了综述.

近年来,考虑不确定因素的空间非合作目标交会成为研究重点<sup>[5-8]</sup>.空间非合作目标泛指不能提供有效合作信息的目标航天器,包括失效或故障航天器、以及空间碎片等.与此类航天器进行交会较为困难,交会过程中存在很多不确定因素,其中导航误差影响最大,是区别于合作目标交会的重要方面.文献[8]提出了一种基于线性协方差理论的轨迹控制与导航方法.该方法能够对交会过程中的环境、传感器、执行机构等存在的不确定因素进行建模,并快速求解轨迹偏差,确定所需控制指令.

空间交会问题往往被描述为固定时间燃料最优的最优控制问题,其约束条件包括终端约束、禁飞区约束、接近走廊约束、最大脉冲约束等,这种强约束的最优控制问题给优化方法带来很多挑战.为了实现在线求解最优轨迹与闭环制导,算法的计算效率与稳定性尤为重要.二阶锥规划方法,作为凸优化的一个分支,备受学者们的关注<sup>[9-12]</sup>.文献[9]提出了一种基于二阶锥规划求解非凸最优控制问题的方法.本文采用连续线性化将最优控制问题中的非凸约束转化为凸约束,并验证解的收敛性,然后,将最优控制问题转化为二阶锥规划进行求解.文献[10]提出一种基于二阶锥规划的自主交会方法.该方法首先通过无损松弛,将相对运动的最优控制问题转化为了一系列的二阶锥规划问题,然后求解得到标称轨迹,再将 $J_2$ 摄动项与阻力项引入到微分方程之中通过对标称轨迹进行迭代优化,得到考虑摄动的最优轨迹.但是由于需要迭代计算,使得计算时间较长.

现有的近程交会任务分析与制导多基于Clohessy-Wiltshire(CW)方程<sup>[13-15]</sup>.CW方程以简洁的方式描述了目标航天器与追踪航天器之间的相对运动,从而使得大量的优化方法应用于任务分析与轨迹设计成为可能.然而该方程基于追踪航天器与目标航天器相对距离远小于目标航天器地心距、目标航天器轨道近圆和二体3个假设,基于CW方程的交会轨迹设计对气动阻力项与 $J_2$ 项进行了简化.而对于未来的空间交会任务,目标航天器轨道多为椭圆轨道,如空间在轨服务、小行星取样返回等,若继续采用CW方程求解此类椭圆轨道交会问题,将导致较大误差,难以满足工程任务的精度要求,且部分任务在低地球轨道进行,任务时间长,此时由大气引起的阻力以及地球不规则球体带来引力二阶项 $J_2$ 的影响不能忽略.因此很多专家

学者针对椭圆交会问题开展了研究.文献[16]提出了一种适用于任意偏心率椭圆轨道的状态转移矩阵的求解方法,但所得到的状态转移矩阵形式复杂,难以应用.文献[17]设计了一种以时间为自变量的状态转移矩阵,其精度随着目标航天器轨道偏心率的增大而降低,仍无法解决椭圆轨道交会问题.文献[18]提出了几何法,该方法能够获得包含偏心率与 $J_2$ 项摄动的状态转移矩阵,但是由于形式复杂难以应用于工程问题.文献[19]提出了一种新的状态矩阵用来描述自由轨道下考虑 $J_2$ 与阻力摄动影响的航天器相对运动,该方法对泰勒展开线性化后的方程求解得到状态转移矩阵,求解过程复杂.

本文对考虑导航误差情况下的摄动椭圆轨道非合作目标交会制导开展研究工作.首先,针对 $J_2$ 项、大气阻力项摄动以及目标航天器轨道偏心率影响,提出一种新的状态转移矩阵求解方法,建立状态约束.其次,针对非合作目标状态信息存在不确定性的问题,建立导航误差模型,分析其对交会精度与所需速度增量的影响,得到导航误差状态约束;设计包含加权矩阵的性能指标,实现在存在导航误差的情况下所需速度增量最优.然后,将最优交会问题,通过凸化的方式转化为标准二阶锥规划问题并进行求解.最后,本文进行案例仿真,验证设计方法针对考虑导航误差的摄动椭圆轨道交会问题的有效性和优越性.

## 2 考虑摄动与偏心率的系统模型建立(Relative motion dynamics with perturbation and eccentricity)

在惯性坐标系中,追踪航天器和目标航天器轨道动力学方程为<sup>[20]</sup>

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \mathbf{v}_c, \quad (1)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = -\frac{\mu}{\|\mathbf{r}_c\|^3}\mathbf{r}_c + \mathbf{f}_c + \frac{\mathbf{F}_c}{m_c}, \quad (2)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_t = \mathbf{v}_t, \quad (3)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_t = -\frac{\mu}{\|\mathbf{r}_t\|^3}\mathbf{r}_t + \mathbf{f}_t, \quad (4)$$

其中:下标c表示追踪航天器,下标t表示目标航天器, $\mathbf{f}_c$ 和 $\mathbf{f}_t$ 分别表示作用于航天器上的除了推进力与中心引力以外的其他全部力带来的加速度, $\mathbf{F}_c$ 为追踪航天器上的控制力.本文考虑的摄动主要包括 $J_2$ 项摄动与阻力项摄动,于是 $\mathbf{f}_c$ 和 $\mathbf{f}_t$ 可以表示为<sup>[20]</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_t = & \mathbf{a}_{J_2}(\mathbf{r}_t) - \frac{1}{2}\rho C_d \frac{A_t}{m_t} \mathbf{v}_t^2 = \\ & -\frac{\mu J_2 R_e}{2 \|\mathbf{r}_t\|^5} [6(\mathbf{r}_t \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}} + 3\mathbf{r}_t - 15(\mathbf{r}_t \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \mathbf{r}_t] - \\ & \frac{1}{2}\rho(\mathbf{r}_t) C_d \frac{A_t}{m_t} \|\mathbf{v}_t\| \mathbf{v}_t, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_c = & \mathbf{a}_{J_2}(\mathbf{r}_c) - \frac{1}{2}\rho C_d \frac{A_c}{m_c} \mathbf{v}_c^2 = \\ & -\frac{\mu J_2 R_e}{2 \|\mathbf{r}_c\|^5} [6(\mathbf{r}_c \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}} + 3\mathbf{r}_c - 15(\mathbf{r}_c \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \mathbf{r}_c] - \\ & \frac{1}{2}\rho(\mathbf{r}_c) C_d \frac{A_c}{m_c} \|\mathbf{v}_c\| \mathbf{v}_c, \end{aligned} \quad (6)$$

其中:  $\mu$  为地球引力参数,  $R_e$  为地球平均半径,  $\hat{\mathbf{n}}$  为惯性系单位坐标向量,  $A_t$  和  $A_c$  为参考面积,  $m_c$  和  $m_t$  为航天器质量,  $\rho$  为大气密度,  $C_d$  为阻力系数.

将式(2)和式(4)联立, 可以得到相对运动动力学方程在惯性坐标系中的表达式

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} = & \ddot{\mathbf{r}}_c - \ddot{\mathbf{r}}_t = \\ & -\left(\frac{\mu}{r_c^3} \mathbf{r}_c - \frac{\mu}{r_t^3} \mathbf{r}_t\right) + \mathbf{f}_c - \mathbf{f}_t + \frac{\mathbf{F}_c}{m_c}, \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $\mathbf{r}$  为相对位置矢量, 定义为  $\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_t$ . 将上述方程转换到目标航天器轨道坐标系之中, 可得到

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} = & -\dot{\boldsymbol{\omega}}_t \times \boldsymbol{\rho} - 2\boldsymbol{\omega}_t \times \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\omega}_t \times (\boldsymbol{\omega}_t \times \mathbf{r}) + \\ & \frac{\mu}{r_t^3} [\mathbf{r}_t - \left(\frac{r_t}{r_c}\right)^3 \mathbf{r}_c] + \Delta \mathbf{f}_d + \frac{\mathbf{F}_c}{m_c}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中:  $\boldsymbol{\omega}_t$  为目标航天器的轨道角速度,  $\Delta \mathbf{f}_d = \mathbf{f}_c - \mathbf{f}_t$  为相对摄动加速度. 将矢量方程转换为标量形式

$$\ddot{x} = \dot{\theta}^2 x + \ddot{\theta} y + 2\dot{\theta} \dot{y} + \frac{\mu}{r_t^2} - \frac{\mu(r_t + x)}{r_c^3} + f_x, \quad (9)$$

$$\ddot{y} = -\ddot{\theta} x + \dot{\theta}^2 y - 2\dot{\theta} \dot{x} - \frac{\mu y}{r_c^3} + f_y, \quad (10)$$

$$\ddot{z} = \frac{\mu z}{r_c^3} + f_z, \quad (11)$$

其中:  $f_x, f_y, f_z$  表示轨道坐标系中除中心引力加速度外的合加速度,  $\theta$  为真近点角.

在推导考虑摄动与偏心率的状态转移矩阵与状态约束时, 为简化推导, 将轨道动力学方程(1)–(4)表示为

$$\dot{\mathbf{x}}_c^I = \mathbf{f}_c(\mathbf{x}_c^I) + \mathbf{B}\mathbf{u}^I, \quad (12)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_t^I = \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t^I), \quad (13)$$

其中上标 I 表示惯性系,  $\mathbf{u}^I = \frac{\mathbf{F}_c}{m_c}$ . 将方程(12)与(13)联立, 可以得到惯性系下的相对运动方程

$$\dot{\mathbf{x}}_c^I - \dot{\mathbf{x}}_t^I = \mathbf{f}_c(\mathbf{x}_c^I) - \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t^I) + \mathbf{B}\mathbf{u}^I \quad (14)$$

并定义

$$\mathbf{x}^I = \mathbf{x}_c^I - \mathbf{x}_t^I, \quad (15)$$

于是

$$\dot{\mathbf{x}}^I = \mathbf{f}_c(\mathbf{x}_c^I) - \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t^I) + \mathbf{B}\mathbf{u}^I. \quad (16)$$

假设追踪航天器与目标航天器状态较为接近, 将上述惯性系下的相对运动方程在目标航天器参

考轨迹下进行线性化, 可以得到

$$\dot{\mathbf{x}}^I = \mathbf{F}_t \mathbf{x}^I + \mathbf{B}\mathbf{u}^I, \quad (17)$$

其中  $\mathbf{F}_t = \frac{\partial \mathbf{f}_t}{\partial \mathbf{x}_t^I} |_{\bar{\mathbf{x}}_t}$ .

式(17)为在目标参考轨迹下线性化得到的相对运动方程. 此线性化基于两航天器状态较为接近, 但是由于阻力摄动项的引入, 使得航天器状态不仅包括位置、速度参数, 同样包括了面质比参数. 而不同的目标航天器(包括卫星、空间站、空间碎片等), 往往与追踪航天器的面质比不同, 因此在线性化时不能够将两者默认相同进行忽略. 为了得到精确的线性化模型, 相对运动在对位置、速度变量线性化的同时, 也需要

对面质比进行线性化. 定义扩展状态为  $\mathbf{X} = [\mathbf{x} \ \delta \frac{A}{m}]$ ,

其中  $\delta \frac{A}{m} = \left(\frac{A}{m}\right)_c - \left(\frac{A}{m}\right)_t$ , 于是相对运动的扩展方程

可以表示为

$$\dot{\mathbf{X}}^I = \mathbf{F}_A \mathbf{X}^I + \mathbf{B}\mathbf{u}^I, \quad (18)$$

其中  $\mathbf{F}_A = \frac{\partial \mathbf{f}_t}{\partial \mathbf{X}_t^I} |_{\mathbf{x}_t}$ .

对线性化后的扩展相对运动状态方程(18)求解可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^I(t) = & \boldsymbol{\Phi}^I(t, t_0) \mathbf{X}^I(t_0) + \\ & \int_{t_0}^t \boldsymbol{\Phi}^I(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}^I(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi}^I(t, t_0) = \int_{t_0}^t \dot{\boldsymbol{\Phi}}^I(t, \tau) d\tau. \quad (20)$$

式(19)中的  $\mathbf{u}^I$  为惯性坐标系下的控制指令. 而在求解最优轨迹时, 控制指令在目标航天器轨道坐标系下为常值, 在惯性坐标系下为时间的函数, 故无法直接对式(19)积分得到输入矩阵. 于是, 将惯性系下的控制指令转换到轨道坐标系, 并对式(19)进行离散化, 可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{i+1}^I = & \boldsymbol{\Phi}^I(t_{i+1}, t_i) \mathbf{X}_i^I + \\ & \int_{t_i}^{t_{i+1}} \boldsymbol{\Phi}^I(t_{i+1}, \tau) \mathbf{B}_t(\tau) d\tau \mathbf{u}_i, \end{aligned} \quad (21)$$

其中  $\mathbf{B}_t(\tau) = \mathbf{B}(\tau) \mathbf{T}_{LV LH \rightarrow I}(\tau)$ .  $\mathbf{T}_{LV LH \rightarrow I}$  是由目标航天器轨道坐标系到惯性坐标系的转换矩阵,  $\mathbf{u}$  是轨道坐标系的控制指令.

定义

$$\mathbf{B}_d(t_{i+1}, t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \boldsymbol{\Phi}^I(t_{i+1}, \tau) \mathbf{B}_t(\tau) d\tau,$$

于是式(21)可表达为

$$\mathbf{X}_{i+1}^I = \boldsymbol{\Phi}^I(t_{i+1}, t_i) \mathbf{X}_i^I + \mathbf{B}_d(t_{i+1}, t_i) \mathbf{u}_i, \quad (22)$$

其中:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}}_d(t, t_i) = & \\ \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_t(t), \frac{\bar{\mathbf{A}}}{m_t})\mathbf{B}_d(t, t_i) + \mathbf{B}\mathbf{T}_{LVLH \rightarrow I}(t), & \end{aligned} \quad (23)$$

$$\dot{\Phi}^I(t, t_i) = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_t(t), \frac{\bar{\mathbf{A}}}{m_t})\Phi^I(t, t_i), \quad (24)$$

$$\Phi(t_i, t_i) = \mathbf{I}, \quad (25)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{d}(t_i, t_i) = \mathbf{0}. \quad (26)$$

将方程(22)从惯性系转换到目标航天器轨道坐标系下,可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{i+1} = & \\ \Phi(t_{i+1}, t_i)\mathbf{X}_i + \Lambda(t_{i+1})\mathbf{B}_d(t_{i+1}, t_i)\mathbf{u}_i, & \end{aligned} \quad (27)$$

其中 $\Phi(t_{i+1}, t_i) = \Lambda(t_{i+1})\Phi^I(t_{i+1}, t_i)\Lambda^{-1}(t_i)$ 为包含摄动与偏心率信息的目标航天器轨道坐标系下状态转移矩阵, 式中:

$$\begin{aligned} \Lambda(t_i) = & \\ \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{I \rightarrow LVLH}(t_i) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ -\mathbf{T}_{I \rightarrow LVLH}\Omega_{\otimes}(t_i) & \mathbf{T}_{I \rightarrow LVLH}(t_i) & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, & \\ \Omega_{\otimes} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}. & \end{aligned}$$

方程式(27)即为所建立的描述摄动椭圆轨道交会的相对运动方程, 作为最优交会制导问题中的状态约束.

### 3 制导律设计(Guidance law design)

在与非合作目标的交会过程中, 目标航天器不提供自身状态信息, 而是由追踪航天器星上敏感器测量获得, 此种方式获取的导航信息存在着误差, 影响着交会精度. 在闭环制导与轨迹跟踪的过程中, 需要更多机动来消除导航误差对交会精度的影响, 导致所需速度增量的增加. 本节对导航误差进行建模与处理, 在保证交会精度的同时, 使得所需速度增量最优.

首先建立包含导航误差的模型. 导航状态量由 $\hat{\mathbf{n}}$ 维向量构成

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{Nav}} = (\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}), \quad (28)$$

$\hat{\mathbf{x}}_{\text{Nav}}$ 包括了6个相对状态 $\hat{\mathbf{x}}$ 和4个导航误差参数 $\hat{\mathbf{p}}$ , 其中 $\hat{\mathbf{p}} = (\mathbf{f}_r, \mathbf{b}_r, \mathbf{f}_v, \mathbf{b}_v)$ , 为误差比例因子与误差偏量.

于是目标航天器的导航信息可以表示为

$$\hat{\mathbf{r}} = (\mathbf{I}_{\hat{n}_r \times \hat{n}_r} + \mathbf{f}_r)\mathbf{r} + \mathbf{b}_r, \quad (29)$$

$$\hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{I}_{\hat{n}_v \times \hat{n}_v} + \mathbf{f}_v)\mathbf{v} + \mathbf{b}_v, \quad (30)$$

$$\dot{\hat{p}}_i = -\frac{\hat{p}_i}{\tau_i} + \omega_{p_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (31)$$

其中:  $\mathbf{r}$ 为相对位置,  $\mathbf{v}$ 为相对速度,  $\hat{p}_i$ 为一阶马可夫过程,  $\tau_i$ 为时间常数,  $\omega_{p_i}$ 为白噪声, 满足

$$E[\omega_{p_i}(t)\omega_{p_i}(t')] = \sigma_{p_i}^2\delta(t-t'), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (32)$$

合并式(29)–(30), 并写成离散化形式

$$\hat{\mathbf{X}}_i = (\mathbf{I}_{\hat{n}_x \times \hat{n}_x} + \mathbf{f})\mathbf{X}_i + \mathbf{b}. \quad (33)$$

式(33)即为最优交会问题的导航误差的状态约束.

由式(33)可以看出, 由于误差比例因子的存在, 导航误差的大小与追踪航天器和目标航天器相对状态成正比, 当追踪航天器与目标航天器相对距离与相对速度较大时, 导航误差显著, 所以在航天器交会的初始阶段设计与执行的机动并不能够实现高精度的交会. 并且在闭环制导过程中, 为了弥补导航误差带来的轨迹偏差, 需要更大的速度增量.

传统的最优性能指标表示为

$$\min \sum_{i=1}^N \|\mathbf{u}_i\|_2 dt, \quad (34)$$

其中:  $N$ 为离散化后的脉冲次数,  $dt$ 为每次脉冲时长.

为了减小在导航误差较大时的脉冲, 在性能指标中引入权重向量 $\mathbf{k}_w$ , 于是性能指标转化为

$$\min \sum_{i=1}^N k_{w_i} \|\mathbf{u}_i\|_2 dt, \quad (35)$$

其中 $\mathbf{k}_w = [k_{w_1} \ k_{w_2} \ \dots \ k_{w_N}]$ 且 $k_{w_i}$ 之间满足关系式

$$k_{w_1} \geq k_{w_2} \geq \dots \geq k_{w_N} > 0. \quad (36)$$

本文中采用的权重向量采用如下形式:

$$k_{w_i} = 1 + \frac{\text{tr}(\sigma_{f_i})}{k}, \quad (37)$$

$$\sigma_{f_i} = \Phi(t_f, t_i)\mathbf{P}_i\Phi(t_f, t_i)^T, \quad (38)$$

其中 $\mathbf{P}_i$ 为 $t_i$ 时刻的导航误差协方差.

式(35)(37)构成了考虑非合作目标导航误差的最优交会问题的性能指标. 在近些年航天制导与轨迹优化的研究中, 凸优化备受关注. 二阶锥规划作为凸优化的一个典型方法, 得到了专家学者的重视. 二阶锥规划要求目标函数为线性函数, 约束为线性约束或二阶锥约束. 二阶锥规划问题, 可以通过原始对偶内点法进行高效可靠的求解. 当可行解存在时, 可以保证在一定步数的迭代中找到满足精度要求的解, 且不需要初始猜测值.

二阶锥规划问题的标准形式为

$$\min \mathbf{f}^T \mathbf{x}, \quad (39)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{g}, \quad (40)$$

$$\|\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i\|_2 \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{d}_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (41)$$

其中:  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 为优化变量,  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n}$ ,  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ .

采用二阶锥规划求解最优交会问题, 需要将其转

化为二阶锥规划的标准形式. 通过前文的工作, 最优交会问题可以描述为

$$P1 : \min \sum_{i=1}^N k_{w_i} \|\mathbf{u}_i\|_2 dt, \quad (42)$$

$$\text{s.t. } 0 \leq \|\mathbf{u}_i\|_2 \leq u_{\max}, \quad (43)$$

$$k_{w_i} = 1 + \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_{f_i})}{k}, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{i+1} = & \boldsymbol{\Lambda}(t_{i+1}) \boldsymbol{\Phi}(t_{i+1}, t_i) \boldsymbol{\Lambda}^{-1}(t_i) \hat{\mathbf{X}}_i + \\ & \boldsymbol{\Lambda}(t_{i+1}) \mathbf{B}_d(t_{i+1}, t_i) \mathbf{u}_i, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_i = (\mathbf{I}_{\hat{n}_x \times \hat{n}_x} + \mathbf{f}) \mathbf{X}_i + \mathbf{b}, \quad (46)$$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \delta \frac{A}{m} \end{bmatrix}, \quad (47)$$

$$\mathbf{X}_{N+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{N+1} \\ \delta \frac{A}{m} \end{bmatrix}. \quad (48)$$

因为P1中的燃料最优目标函数是非线性形式, 不满足标准二阶锥规划形式, 需要对目标函数进行处理.

引入松弛变量 $\eta_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 满足 $\|\mathbf{u}_i\| \leq \eta_i$ 关系, 然后交会问题可以松弛为标准二阶锥规划形式

$$P2 : \min \sum_{i=1}^N k_{w_i} \eta_i dt, \quad (49)$$

$$\text{s.t. } \|\mathbf{u}_i\| \leq \eta_i, \quad (50)$$

$$0 \leq \eta_i \leq u_{\max}, \quad (51)$$

$$\text{式(44) - (48)}. \quad (52)$$

此时将前文所建立的考虑导航误差的椭圆摄动轨道交会轨迹最优化问题转化为了标准二阶锥规划问题. 通过内点法可以进行有效求解<sup>[11]</sup>. 基于二阶锥规划求解最优交会问题具有计算效率高的特点, 可实现在线计算. 为进一步提高交会精度, 尤其是针对初始相对距离较大的交会任务, 本节设计了闭环制导框架.

闭环制导流程图如图1所示.

**步骤 1** 追踪航天器星上传感器测量目标航天器状态, 获取目标航天器相对状态信息与绝对状态信息, 并利用绝对状态求解状态转移矩阵;

**步骤 2** 利用初始相对运动状态、期望, 末端相对运动状态、状态转移矩阵以及目标函数共同建立最优交会制导问题;

**步骤 3** 通过引入松弛变量、利用凸化的方法将交会问题转化为标准二阶锥规划形式, 并求解得到最优交会轨迹与控制指令.

**步骤 4** 控制系统执行一个制导周期的指令, 使追踪航天器接近目标航天器.

**步骤 5** 若追踪航天器到达期望末端相对位置, 则交会任务结束, 否则返回步骤1.

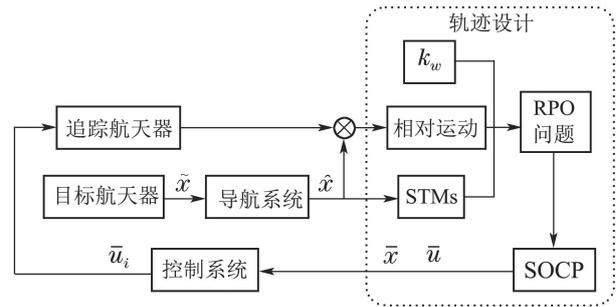


图1 闭环制导流程图

Fig. 1 The flowchart of the closed-loop guidance

## 4 仿真验证(Simulations)

### 4.1 考虑 $J_2$ 与阻力项摄动轨道交会仿真 (Simulations for rendezvous with $J_2$ and drag perturbations)

传统的基于CW状态转移矩阵的方法无法考虑 $J_2$ 项与阻力项摄动, 致使当目标航天器运行于 $J_2$ 项与阻力项影响较大的地球轨道时, 无法保证交会精度. 为验证新方法的有效性, 开展仿真案例1, 目标航天器运行于圆轨道, 不考虑导航误差影响. 案例1中共有3个算例, 分别为初始相对距离较小、适中、较大的交会任务, 其中目标航天器惯性系下初始状态如表1所示, 轨道坐标系下初始相对状态如表2所示, 期望末端相对状态与约束如表3所示.

表1 目标航天器初始状态

Table 1 Target initial state

变量	数值	单位
$r_{t_x}$	0	km
$r_{t_y}$	6600	km
$r_{t_z}$	0	km
$v_{t_x}$	-6.730	km/s
$v_{t_y}$	0	km/s
$v_{t_z}$	3.886	km/s

表2 初始相对状态

Table 2 Initial relative state

变量	算例1	算例2	算例3	单位
$r_x$	-0.5	-2	-10	km
$r_y$	-1	-10	-50	km
$r_z$	0	0	0	km
$v_x$	0.035	0.106	0.212	m/s
$v_y$	0.122	0.366	0.732	m/s
$v_z$	0	0	0	m/s
$t_f$	1000	3000	5000	s

表 3 期望末端相对状态与约束

Table 3 Desired final relative condition and constraints

变量	数值	单位	变量	数值	单位
$r_x(t_f)$	0	km	$v_z(t_f)$	0	km/s
$r_y(t_f)$	-0.2	km	$U_{max}$	1	m/s <sup>2</sup>
$r_z(t_f)$	0	km	$(A/m)_t$	0.04	m <sup>2</sup> /kg
$v_x(t_f)$	0	km/s	$(A/m)_c$	0.01	m <sup>2</sup> /kg
$v_y(t_f)$	0	km/s	$C_d$	2	—

图2-5给出了采用本文所提出方法与传统方法<sup>[13,20]</sup>针对算例2中交会任务所得仿真结果. 其中图2-3为相对位置与相对速度变化曲线, 图4为三维空间的相对运动轨迹, 图5为控制加速度曲线. 通过图2-3的局部图与图4可以看到本文所提出方法精度优于基于CW方程的传统方法. 从图5中可以看出, 两种方法求解得到的最优控制指令具有相同的机动时间, 但是由于本文提出的方法考虑了 $J_2$ 项与阻力项摄动, 在求解过程中对摄动进行了补偿, 故每一次机动大小与传统方法不同.

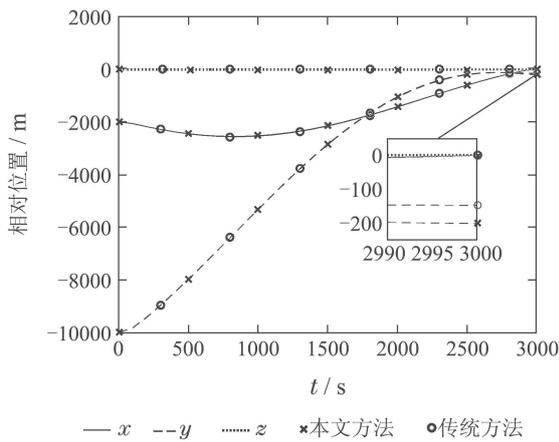


图 2 考虑摄动影响的相对位置曲线

Fig. 2 Relative position history with perturbation

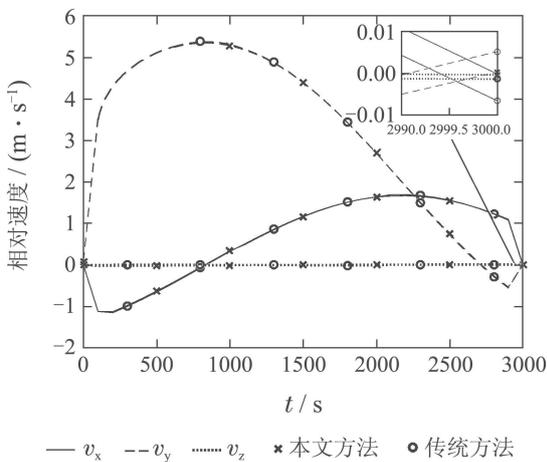


图 3 考虑摄动影响的相对速度曲线

Fig. 3 Relative velocity history with perturbation

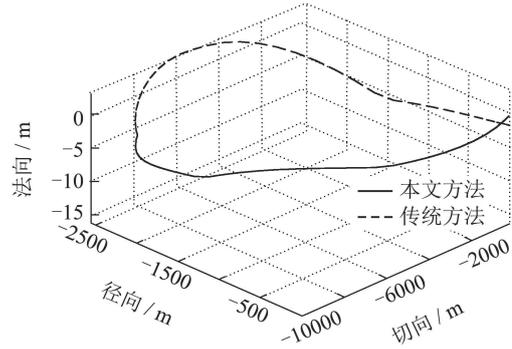


图 4 考虑摄动影响的三维最优轨迹

Fig. 4 Optimal trajectory with perturbation

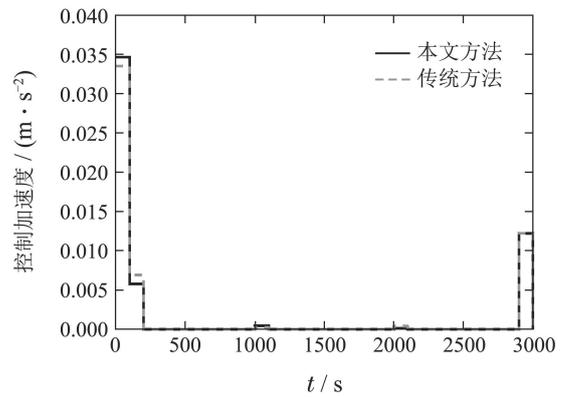


图 5 考虑摄动影响的控制加速度

Fig. 5 Control history with perturbation

3个算例的误差对比结果如表4所示. 其中New表示本文所提出方法, CW表示传统方法. 从数据中可以看出本文所提出的方法, 针对考虑 $J_2$ 项与阻力项摄动的交会问题, 具有明显优势, 在所需速度增量基本相同的情况下, 精度明显高于传统方法. 其中位置精度由10m量级提高到0.1m量级. 速度精度由 $10^{-2}$  m/s量级提高到 $10^{-4}$  m/s量级. 同时, 对比3个算例可知, 采用传统方法时,  $J_2$ 项与阻力项的影响随着任务时间的增长而逐渐增大, 因此在长时间的低地球轨道交会任务中摄动影响不能忽略. 本文所提出的方法, 在3个算例中精度保持一致, 优于传统方法. 另外, 本文仿真中假设目标航天器与追踪航天器面质比分别为 $0.04 \text{ m}^2/\text{kg}$ 与 $0.01 \text{ m}^2/\text{kg}$ , 而在实际任务中两者面质比之差可能更大, 此时摄动影响更为明显, 采用传统方法的交会精度会进一步降低.

表 4 考虑摄动影响的误差对比

Table 4 Comparison of the two methods with perturbation

变量	算例1		算例2		算例3		单位
	New	CW	New	CW	New	CW	
$e_r$	0.2	16.1	0.2	53.8	0.2	60.5	m
$e_v$	0.2	3.5	0.4	14.6	0.5	17.6	mm/s
$\Delta U$	2.2	2.2	5.3	5.4	23.9	23.3	m/s

### 4.2 椭圆轨道交会仿真 (Simulations for noncircular orbit rendezvous)

本文中提出的方法在交会过程中考虑了目标航天器轨道偏心率信息, 因此可以实现椭圆轨道的高精度交会任务. 为验证其有效性, 开展仿真案例2, 该案例中暂不考虑摄动与导航误差. 案例中共有3个算例, 分别针对偏心率为0.01, 0.5与0.9的交会任务. 目标航天器初始状态如表5所示, 初始相对状态如表2中的算例2所示, 期望末端相对状态与约束条件如表3所示.

表 5 目标航天器初始状态

Table 5 Target initial state

变量	算例4	算例5	算例6	单位
$e$	0.01	0.5	0.9	—
$r_{tx}$	0	0	0	km
$r_{ty}$	6600	6600	6600	km
$r_{tz}$	0	0	0	km
$v_{tx}$	-6.764	-8.243	-9.277	km/s
$v_{ty}$	0	0	0	km/s
$v_{tz}$	3.905	4.759	5.356	km/s

图6-9给出了两种方法求解算例6得到的仿真结果. 其中图6、图7为相对位置与相对速度曲线, 图8为三维空间的相对运动轨迹, 图9为控制加速度曲线. 由图6-8可以看出, 本文所提出方法求解得到的相对位置与速度曲线精度高且变化平缓, 而传统方法求解得到的曲线精度低且变化剧烈. 这是由于传统方法基于近圆假设, 无法考虑偏心率影响, 在每一闭环制导周期中追踪航天器无法按照设计的相对运动轨迹飞行, 致使在下一制导周期中需要较大机动修正偏差. 图9中的控制加速度曲线显示, 采用本文提出方法只需两次脉冲即可完成交会任务, 且所需速度增量较小. 而传统方法共进行了5次机动, 每次机动脉冲都较大, 所需速度增量远远高于本文提出方法.

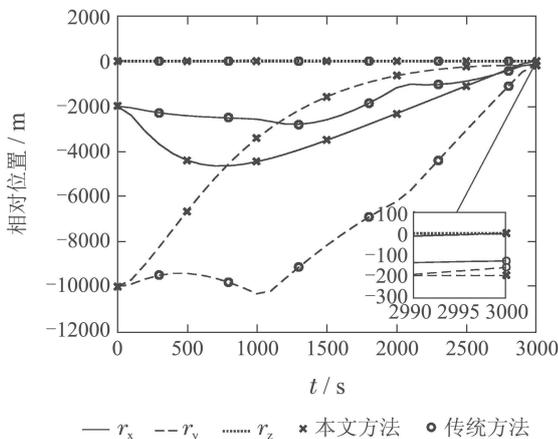


图 6 椭圆轨道交会的相对位置曲线

Fig. 6 Relative position history for noncircular orbit rendezvous

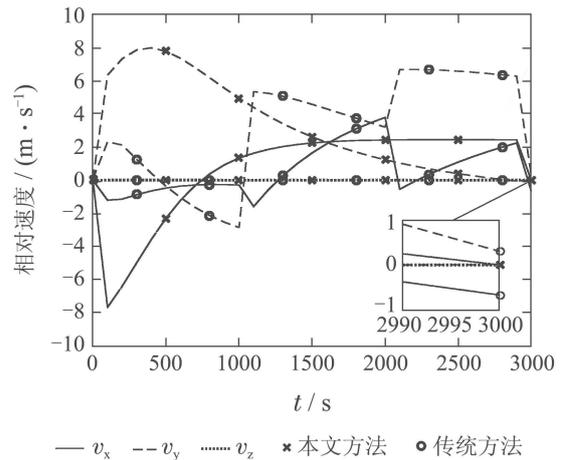


图 7 椭圆轨道交会的相对速度曲线

Fig. 7 Relative velocity history for noncircular orbit rendezvous

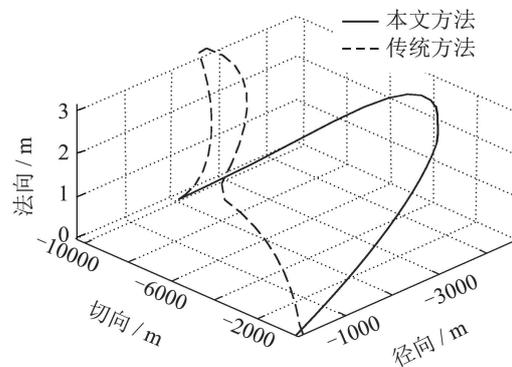


图 8 椭圆轨道交会的三维最优轨迹

Fig. 8 Optimal trajectory for noncircular orbit rendezvous

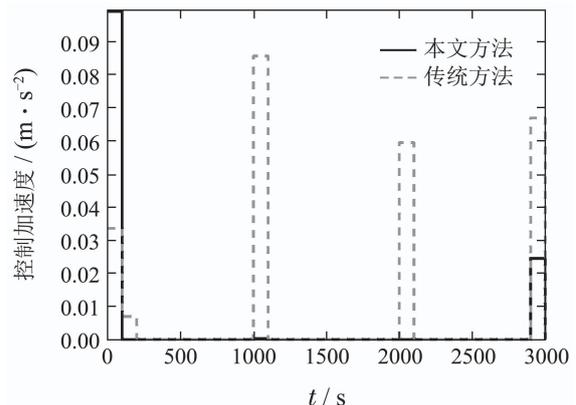


图 9 椭圆轨道交会的控制加速度

Fig. 9 Control history for noncircular orbit rendezvous

算例4-6的误差对比结果如表6所示. 可以看出本文所提出的方法, 在针对椭圆轨道交会问题时, 位置、速度精度明显高于传统方法, 且当偏心率增加时, 精度保持不变. 而伴随着偏心率的增加, 传统方法精度急剧降低, 且所需速度增量急剧增加, 远远多于本文所提出方法, 不具有最优性.

表 6 椭圆轨道交会的误差对比

Table 6 Comparison of the two methods for noncircular orbit rendezvous

变量	算例4		算例5		算例6		单位
	New	CW	New	CW	New	CW	
$e_r$	0.2	12.9	0.2	114.8	0.4	138.1	m
$e_v$	0.5	4.0	0.2	627.8	0.7	726.8	mm/s
$\Delta U$	5.5	5.6	9.6	19.1	13.4	25.24	m/s

### 4.3 考虑导航误差轨道交会仿真(Simulations for rendezvous with navigation error)

针对非合作目标交会存在导航误差的问题, 本文建立了导航误差模型, 设计了考虑导航误差的性能指标. 为验证有效性, 开展仿真案例3. 导航误差参数如表7所示, 目标航天器初始状态如表1所示, 初始相对状态如表2中算例2所示, 期望相对状态与约束如表3所示. 仿真中不考虑摄动与偏心率.

表 7 导航误差参数

Table 7 Values of the navigation error parameters

变量	数值	单位	描述
$f_r$	0.01	—	$3\sigma$ 比例因子
$\tau_{f_r}$	100	s	$3\sigma$ 时间常数
$b_r$	1	m	$3\sigma$ 偏差
$\tau_{b_r}$	10000	s	$3\sigma$ 时间常数
$f_v$	0.01	—	$3\sigma$ 比例因子
$\tau_{f_v}$	100	s	$3\sigma$ 时间常数
$b_v$	0.1	m/s	$3\sigma$ 偏差
$\tau_{b_v}$	10000	s	$3\sigma$ 时间常数

在仿真案例3中, 一共进行1000次Monte Carlo仿真. 其中500次用以检验本文提方法对导航误差处理能力, 另500次检验传统方法对导航误差处理能力.

图10-11给出了在考虑导航误差情况下, 分别采用本文所提出方法与传统方法的交会轨迹相对位置、速度误差. 可以看出两种方法具有相同的交会精度.

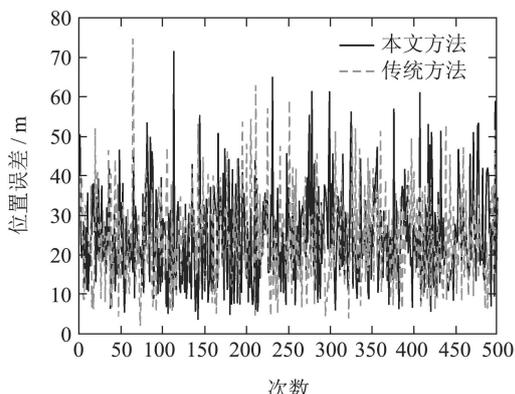


图 10 考虑导航误差的位置误差

Fig. 10 Relative position error with navigation error

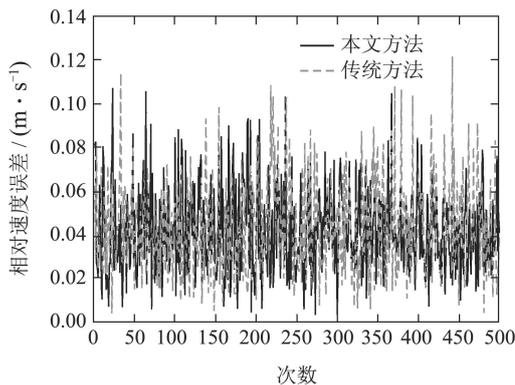


图 11 考虑导航误差的速度误差

Fig. 11 Relative velocity error with navigation error

而图12则给出了所需速度增量. 可以看出本文所提出方法在所需速度增量方面优于传统方法. 传统方法平均所需速度增量为5.7 m/s, 而本文提出方法所需速度增量仅为5.2 m/s, 所需速度增量减小8.7%.

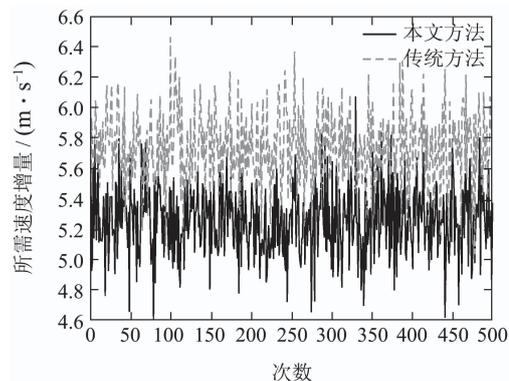


图 12 考虑导航误差所需速度增量

Fig. 12 Magnitude control with navigation error

### 4.4 考虑导航误差的摄动椭圆轨道交会仿真 (Simulations for noncircular orbit rendezvous with navigation error and perturbation)

为验证本文所提出方法在同时考虑导航误差、 $J_2$ 项摄动、大气阻力摄动, 以及偏心率情况下的有效性, 开展了仿真案例4. 导航误差参数如表7所示, 目标航天器初始状态如表5中算例6所示, 初始相对状态如表2中算例2所示, 期望相对状态与约束如表3所示.

在仿真案例4中, 分别进行了无导航误差的仿真与1000次具有导航误差的Monte Carlo仿真. 仿真结果如图13-15所示.

图13-15分别给出了本文所提出方法与传统方法在考虑导航误差与不考虑导航误差情况下的摄动椭圆轨道交会位置、速误差与所需速度增量曲线. 图中直线为无导航误差的情况, 可以看出在同时考虑摄动与偏心率影响时, 本文所提出方法精度高于传统方法, 所需速度增量较少. 图中曲线为考虑导航误差情况, 可以看出本文所提出的方法在同时考虑摄动、偏心率以及导航误差的情况下, 依然适用, 交会精度优于传统方法, 且所需速度增量明显低于传统方法.

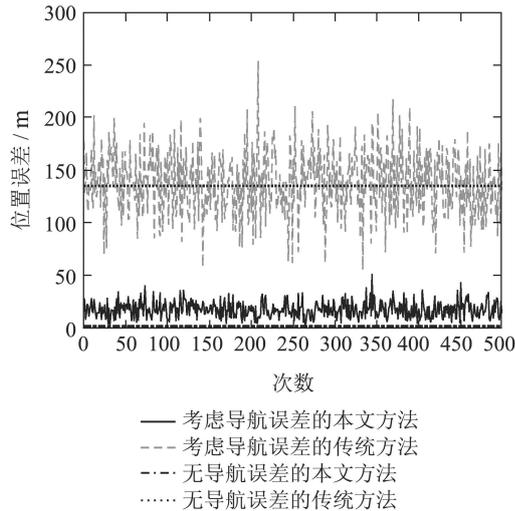


图 13 考虑导航误差、摄动椭圆轨道交会的位置误差  
Fig. 13 Relative position error with navigation error, perturbation and eccentricity

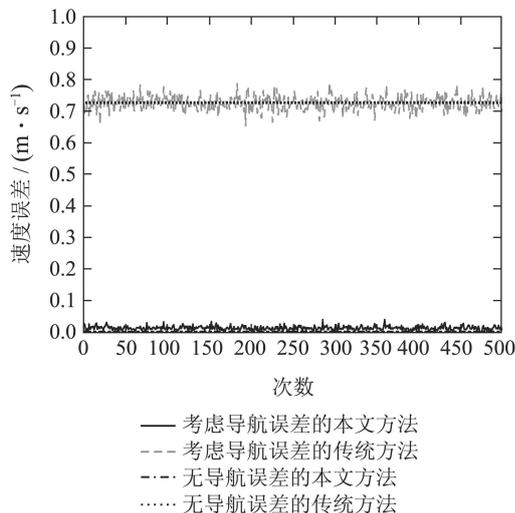


图 14 考虑导航误差、摄动和椭圆轨道交会的速度误差  
Fig. 14 Relative velocity error with navigation error, perturbation and eccentricity

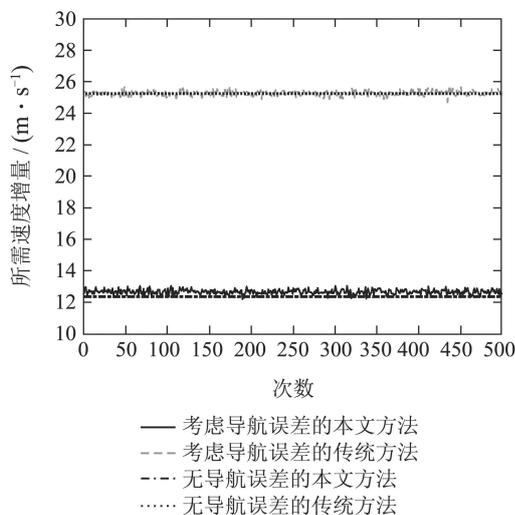


图 15 考虑导航误差、摄动椭圆轨道交会所需速度增量  
Fig. 15 Magnitude control with navigation error, perturbation and eccentricity

## 5 结论(Conclusions)

本文以空间非合作目标的交会任务为背景,研究了考虑导航误差信息的摄动椭圆轨道最优交会制导问题. 针对交会过程中的摄动以及目标航天器轨道偏心率影响, 采用了新的状态转移矩阵求解方法. 针对存在导航误差问题, 建立了导航误差模型, 提出了新的加权性能指标. 本文通过引入松弛变量将交会轨迹设计问题转化为了二阶锥规划问题进行求解. 通过仿真验证可以看出针对具有导航误差的摄动椭圆交会问题, 本文提出的方法交会精度更高, 所需速度增量更低.

## 参考文献(References):

- [1] DIRECTORATE N M O, DIVISION N F D, CENTER N J S. History of space shuttle rendezvous [J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2011, 43(5): 944 – 959.
- [2] WOFFINDEN D C, GELLER D K. Navigating the road to autonomous orbital rendezvous [J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2007, 44(4): 898 – 909.
- [3] RT E. *Automated Rendezvous and Docking of Spacecraft* [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2003.
- [4] ZIMPFER D, KACHMAR P, TUOHY S. Autonomous rendezvous, capture and in-space assembly: past, present and future [C] // *Space Exploration Conference: Continuing the Voyage of Discovery*. Orlando, Florida, USA: AIAA, 2013.
- [5] 郭永, 宋申民, 李学辉. 非合作交会对接的姿态和轨道耦合控制 [J]. *控制理论与应用*, 2016, 33(5): 638 – 644.  
(GUO Yong, SONG Shenmin, LI Xuehui. Coupled-distributed-adaptive-coordinated control for relative orbit and attitude of multiple spacecrafts [J]. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(5): 638 – 644.)
- [6] 朱彦伟, 杨乐平. 航天器近距离相对运动的鲁棒约束模型预测控制 [J]. *控制理论与应用*, 2009, 26(11): 1273 – 1276.  
(ZHU Yanwei, YANG Leping. Spacecraft proximity relative motion under robust constrained model predictive control [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(11): 1273 – 1276.)
- [7] 刘付成, 梅杰, 马广富. 有向图中模块化航天器系统相对轨道的自适应分布式一致性 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(2): 223 – 229.  
(LIU Fucheng, MEI Jie, MA Guangfu. Adaptive distributed consensus for relative orbit of modular spacecrafts under a directed graph [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(2): 223 – 229.)
- [8] GELLER D K. Linear covariance techniques for orbital rendezvous analysis and autonomous onboard mission planning [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2006, 29(6): 1404 – 1414.
- [9] LIU X, LU P. Solving nonconvex optimal control problems by convex optimization [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2014, 37(3): 750 – 765.
- [10] LU P, LIU X. Autonomous trajectory planning for rendezvous and proximity operations by conic optimization [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2013, 36(2): 375 – 389.
- [11] BOYD S, VANDENBERGHE L. *Convex Optimization* [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.
- [12] ALIZADEH F, GOLDFARB D. Second-order cone programming [J]. *Mathematical Programming*, 2003, 95(1): 3 – 51.
- [13] CLOHESSEY W H. Terminal guidance system for satellite rendezvous [J]. *Aerospace Science*, 1960, 27(9): 653 – 658.
- [14] JEZEWSKI D J, BRAZZEL J P J, PRUST E E, et al. A survey of rendezvous trajectory planning [J]. *Advances in the Astronautical Sciences*, 1992, 12(1): 1373 – 1396.

- [15] LUO Y, ZHANG J, TANG G. Survey of orbital dynamics and control of space rendezvous [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2014, 27(1): 1 – 11.
- [16] CARTER T E. State Transition matrices for terminal rendezvous studies: brief survey and new example [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2015, 21(1): 148 – 155.
- [17] MELTON R G. Time-explicit representation of relative motion between elliptical orbits [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2000, 23(4): 604 – 611.
- [18] GIM D W, ALFRIEND K T. State transition matrix of relative motion for the perturbed noncircular reference orbit [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2003, 26(6): 956 – 971.
- [19] KOENIG A W, GUFFANTI T, D'AMICO S. New state transition matrices for spacecraft relative motion in perturbed orbits [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2017, 40(7): 1 – 20.
- [20] 章仁为. 卫星轨道姿态动力学与控制 [M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1998.  
(ZHANG Renwei. *Orbit Dynamics and Attitude Control* [M]. Beijing: Beihang University Press, 1998.)

#### 作者简介:

**靳 锴** (1988–), 男, 博士研究生, 主要从事航天器制导与控制研究, E-mail: kai.jin2016@hotmail.com;

**罗建军** (1965–), 男, 教授, 博士研究生导师, 主要从事航天飞行动力与控制、组合导航与制导研究, E-mail: jjluo@nwpu.edu.cn;

**郑茂章** (1990–), 男, 博士研究生, 主要从事飞行器动力学与控制研究, zhengmaozhang@mail.nwpu.edu.cn;

**方 群** (1965–), 女, 教授, 研究生导师, 主要从事飞行器动力学与控制、导航与制导研究, E-mail: qfang@nwpu.edu.cn.