

# 多智能体系统一致性问题的控制器与拓扑协同优化设计

马丹<sup>†</sup>, 张宝峰, 王璐瑶

(东北大学 信息科学与工程学院; 流程工业综合自动化国家重点实验室, 辽宁 沈阳 110819)

**摘要:** 本文考虑多智能体系统一致性问题的控制与拓扑协同优化设计. 首先在给定的二次性能指标下, 对多智能体系统的分布式一致性控制协议寻优, 得到依赖于网络拓扑图拉普拉斯矩阵的最优控制器. 其次, 为进一步最大限度地减少拓扑之间的连边, 又不降低多智能体系统的收敛速度, 通过权衡系统的通信能量和控制能量, 寻求网络拓扑的优化设计, 给出了拓扑优化算法和多智能体系统特征值的优化方法. 最后, 仿真研究验证了在控制器优化的基础上进一步寻求拓扑优化, 可大大提升系统的一致性能.

**关键词:** 多智能体系统; 一致性; 控制器优化; 拓扑优化

**引用格式:** 马丹, 张宝峰, 王璐瑶. 多智能体系统一致性问题的控制器与拓扑协同优化设计. 控制理论与应用, 2019, 36(5): 720 – 727

DOI: 10.7641/CTA.2018.70950

## Controller and topology co-optimization for consensus of multi-agent systems

MA Dan<sup>†</sup>, ZHANG Bao-feng, WANG Lu-yao

(College of Information Science and Engineering;

State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries, Northeastern University Shenyang Liaoning 110819, China)

**Abstract:** In this paper, the co-optimization problem of controller and topology for consensus of multi-agent systems is investigated. Firstly, the distributed control protocol for consensus of multi-agent systems is optimized for the given quadratic performance index. The proposed optimal controller depends on the Laplace matrix of the topological graph. Secondly, in order to further reduce the edge of the topology, but not affect the convergence speed of multi-agent systems, the topology optimization algorithm and the eigenvalue optimization method for multi-agent systems are presented, which balances the communication energy and control energy of the systems. Finally, the simulation results show that the topology optimization along with the controller optimization is able to improve the system performance.

**Key words:** multi-agent systems; consensus; controller optimization; topology optimization

**Citation:** MA Dan, ZHANG Baofeng, WANG Luyao. Controller and topology co-optimization for consensus of multi-agent systems. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(5): 720 – 727

### 1 引言

多智能体性能优化的评价指标为一致性收敛速度或综合考虑一致性收敛速度及系统能耗的综合性能. 而性能优化采用的主要方式为控制器优化或拓扑优化<sup>[1]</sup>. 其中控制器的选取决定了智能体之间是如何进行交互的, 进而达到各自的控制目标. 如果从这方面进行优化, 则可以提高智能体的交互方式, 降低相应的交互量, 进而优化系统的综合性能. 而拓扑优化是通过优化智能体之间的连边或者连边上权重来达到系统性能的提升.

拓扑信息是系统性能优化的一个重要的组成部分,

其中多智能体系统通信拓扑图的第二小特征值的大小是决定一致性收敛速度的一个重要的指标<sup>[2]</sup>. 文献[3–5]中指出当拓扑图是连通平衡图时, 一阶积分系统能达到平均一致, 并且此条件为系统一致性的充要条件. 文献[6]针对有向图, 利用随机矩阵知识验证了当通信拓扑图中含有有向生成树时, 多智能体系统能达到一致性收敛. 以上文献介绍了拓扑图的不同特性对多智能体一致性收敛的影响. 通过提升通信拓扑图的第二小特征值提升一致性的收敛速度也取得了一些进展<sup>[7–8]</sup>. 关于控制器的优化能提高系统的综合性能的研究工作采用线性二次型理论. 文献[9–11]利用

收稿日期: 2017–12–22; 录用日期: 2018–06–19.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: madan@mail.neu.edu.cn.

本文责任编辑: 左志强.

国家自然科学基金项目(61603079, 61773098)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61603079, 61773098).

线性二次型理论,在特殊的条件限制下,得到了分布式最优控制器.文献[12]考虑了环形拓扑的一致性问题,并选取特殊的性能指标,得到最优控制器.文献[13]针对跟踪控制问题,证明了在星型拓扑的条件下,得到特殊性能指标下所对应的最优控制器.文献[14]针对一般的多智能体系统,利用线性二次型调节器(linear quadratic regulator, LQR)优化控制与Riccati方程的结合,给出最优控制器存在的充分条件,所得的最优控制器结构与拓扑的信息密切相关.然而,虽然控制器的形式相同,但是在不同的拓扑结构下,得到的优化效果不同,主要原因是拓扑可变可优化的.因此,本文将在文献[14]的基础上,寻求拓扑的优化设计.为进一步最大限度地减少拓扑之间的连边,又不降低多智能体系统的收敛速度,本文通过在系统的通信能量和控制能量之间进行权衡,寻求拓扑的优化设计,给出拓扑优化算法和多智能体系统特征值的优化方法.最后仿真验证了控制器与拓扑协同优化对提升系统一致性性能的重要性.

## 2 问题描述

考虑 $n$ 个智能体组成的多智能体系统

$$\dot{x}_i(t) = ax_i(t) + bu_i(t), \quad (1)$$

其中:智能体 $i$ 的状态 $x_i(t) \in \mathbb{R}^1$ ,控制协议 $u_i(t) \in \mathbb{R}^1$ , $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $a$ 和 $b$ 是已知的标量参数.

系统(1)可以写成如下的矩阵形式:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2)$$

且 $A = aI_n$ ,  $B = bI_n$ .

在多智能体系统(2)中,把每个智能体抽象化为图的顶点,用 $G = (V, E)$ 来表示含有 $n$ 个顶点的图,其中 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ 是图的顶点集,而 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 是图的边集.对于任意一条边 $(v_i, v_j) \subset E$ ,如果都存在 $(v_j, v_i) \subset E$ ,则称为无向图,反之则称为有向图.

定义拉普拉斯矩阵 $L = [l_{ij}]$ ,其中

$$l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & j \neq i, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}, & j = i. \end{cases}$$

本文研究无向拓扑,即 $L$ 是对称矩阵. $L$ 也可以表示为 $L = D - A$ ,  $D = [d_{ij}]$ 为图的度矩阵,其中

$$d_{ij} = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}, & j = i. \end{cases}$$

在无权图的情况下,邻接矩阵 $A$ 对应的是一个仅含有0,1元素的矩阵,即 $A = [a_{ij}]$ ,其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & (v_i, v_j) \notin E, \\ 1, & (v_i, v_j) \in E. \end{cases}$$

## 3 控制器优化

对于系统(2),在无向拓扑图下,考虑控制器的优化,选取如下的性能指标<sup>[14]</sup>:

$$J = \sum_{i=1}^n J_i = \sum_{i=1}^n \int_0^{\infty} c \left[ \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j(t) - x_i(t))^2 \right]^2 dt + \sum_{i=1}^n \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{2} d \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_i(t) - x_j(t))^2 \right] dt + \sum_{i=1}^n \int_0^{\infty} (ex_i^2(t) + ru_i^2(t)) dt, \quad (3)$$

其中: $a_{ij}$ 是加权邻接矩阵 $A$ 第 $(i, j)$ 个元素,系数满足 $c > 0$ ,  $d > 0$ ,  $e > 0$ ,  $r > 0$ .

**注1** 在性能指标(3)中,第1项表示单个智能体与其相连的所有智能体状态的平均值之差的平方项,能够加快智能体与邻居的整体性的收敛.第2项表示单个智能体分别与每一个相邻智能体的状态差平方项再求和,反应的是智能体与每一个邻居之间的趋同性,加快智能体的局部收敛性.第3项为单个智能体的状态以及控制输入量,前一项使响应的状态最小,增强整体的稳定性,后一项获得最小的控制能量,使系统达到一致.

性能指标(3),可改写成如下标准的LQR形式:

$$J = \sum_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T Ru(t)] dt, \quad (4)$$

其中 $Q = cL^2 + dL + eI_n$ .由于 $L$ 为对称半正定矩阵,则 $Q$ 为对称半正定矩阵, $R = rI_n$ 为正定矩阵.

**定理1**<sup>[14]</sup> 对于系统(2),保证性能指标(3)最小化的控制器为

$$u^*(t) = -Kx^*(t). \quad (5)$$

当 $c > 0$ ,且如下的条件

$$d^2 - 4c(e + r(ab^{-1})^2) = 0 \quad (6)$$

成立时,则有最优的反馈增益矩阵 $K$ 为

$$K = \sqrt{r^{-1}cL} + (ab^{-1} + \frac{\sqrt{r^{-1}d}}{2\sqrt{c}})I_n. \quad (7)$$

此时,对应的最优状态方程为

$$\dot{x}^*(t) = (A - BK)x^*(t) = -(\frac{bd}{2\sqrt{rc}}I_n + b\sqrt{r^{-1}cL})x^*(t). \quad (8)$$

## 4 拓扑优化

对于系统(2),在满足性能指标(3)的情况下,设计最优反馈控制律,进一步进行拓扑优化,最大限度地提高系统性能,是本文的设计目标.由定理1可知,式(7)给出的最优反馈控制器增益 $K$ 依赖于拓扑网络拉普拉斯阵 $L$ ,那么进一步的优化拓扑,能否最大限度的提升系统的性能呢?此部分的设计优化过程回答了

这个问题.

#### 4.1 预备知识

拓扑设计问题主要是拓扑和相应性能指标的选择匹配问题. 在给出主要结果之前, 先给出两个引理.

**引理 1** 对于系统(8), 令  $S = \frac{bd}{2\sqrt{rc}}I_n + b\sqrt{r^{-1}c}L$ .

当通信拓扑为无向连通图时, 相应的拓扑信息描述矩阵  $L$  的秩  $\text{rank}(L) = n - 1$ . 设矩阵  $L$  的特征值为  $\lambda_i$ , 矩阵  $S$  的特征值为  $\lambda_{si}$ , 则:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n, \\ 0 &< \lambda_{s1} < \lambda_{s2} \leq \lambda_{s3} \leq \dots \leq \lambda_{sn}, \end{aligned}$$

其中:  $\lambda_{si} = \frac{bd}{2\sqrt{rc}} + b\sqrt{r^{-1}c}\lambda_i$ ,  $i \in 1, 2, \dots, n$ , 并且, 矩阵  $L$  和  $S$  具有相同的正交转换矩阵

$$P = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n],$$

且系统(8)中所有智能体最终状态为

$$x(\infty) = 0. \quad (9)$$

**证** 因为通信拓扑图是无向且连通的, 所以其对应的Laplacian矩阵  $L$  为对称矩阵, 那么由矩阵理论可知, 对称矩阵一定可以对角化. 设矩阵  $L$  的特征值为  $\lambda_i$ ,  $i \in 1, 2, \dots, n$ , 那么矩阵  $L$  的对角矩阵  $\Lambda$  可以表示成如下形式:

$$\Lambda = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \}. \quad (10)$$

根据无向连通拓扑图Laplacian矩阵的性质可得  $\text{rank}(L) = n - 1$ . 并且  $\lambda_i$  满足

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n. \quad (11)$$

因为矩阵  $S$  与矩阵  $L$  形式相同, 同为对称矩阵, 所以一定能被对角化. 设其对角矩阵为  $\Lambda_s$ , 对角元素为  $\lambda_{si}$ ,  $i \in 1, 2, \dots, n$ , 则矩阵  $S$  的对角矩阵  $\Lambda_s$  可以表示为如下形式:

$$\Lambda_s = \text{diag} \{ \lambda_{s1}, \lambda_{s2}, \dots, \lambda_{sn} \}. \quad (12)$$

其中:  $\lambda_{si} = \frac{bd}{2\sqrt{rc}} + b\sqrt{r^{-1}c}\lambda_i$ ,  $i \in 1, 2, \dots, n$ , 且  $\lambda_{si}$  满足

$$0 < \lambda_{s1} < \lambda_{s2} \leq \lambda_{s3} \leq \dots \leq \lambda_{sn}. \quad (13)$$

因为矩阵  $L$  一定可以对角化, 因此假设其变换矩阵为  $P$ , 对  $P$  中的向量做正交处理可得

$$P = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n], \quad (14)$$

由对角矩阵  $\Lambda$  和变换矩阵  $P$  可得

$$L = P\Lambda P^T. \quad (15)$$

把方程(15)代入矩阵  $S$ , 可得

$$S = \frac{bd}{2\sqrt{rc}}I_n + b\sqrt{r^{-1}c}P\Lambda P^T, \quad (16)$$

由于  $P$  为正交矩阵, 则方程(16)可写为

$$S = P\left(\frac{bd}{2\sqrt{rc}}I_n + b\sqrt{r^{-1}c}\Lambda\right)P^T, \quad (17)$$

进而方程(17)可写为

$$S = P\Lambda_s P^T, \quad (18)$$

其中  $\Lambda_s = \frac{bd}{2\sqrt{rc}}I_n + b\sqrt{r^{-1}c}\Lambda$ .

在式(18)中, 因为  $\Lambda_s$  为  $S$  的对角矩阵, 那么  $S$  的正交转换矩阵为  $P$ , 又因为  $P$  为  $L$  的正交转换矩阵, 因此  $S$  和  $L$  拥有相同的正交转换矩阵.

另外, 对方程(8)求解可得

$$x(t) = \exp(-St)x(0), \quad (19)$$

其中:  $S = \frac{bd}{2\sqrt{rc}}I_n + b\sqrt{r^{-1}c}L$ ,  $x(0)$  为状态  $x(t)$  的初始状态.

结合方程(18)–(19)可得

$$x(t) = P \exp(-\Lambda_s t) P^T x(0). \quad (20)$$

由方程(13)可得  $\lambda_{si} > 0$ , 那么当  $t \rightarrow \infty$  时, 指数项趋近于0, 即

$$x(\infty) = 0. \quad (21)$$

证毕.

**注 2** 引理1中的结论, 将在优化矩阵  $L$  特征值中使用.

**注 3** 由引理1, 当系统方程退化成  $\dot{x}(t) = -Lx(t)$ , 并且控制器退化成  $u(t) = -Lx(t)$  时, 系统状态最终趋向于初始状态的平均值, 即

$$x(\infty) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(0). \quad (22)$$

这与文献[2]结论一致.

**引理 2** 对一元三次方程  $a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 = 0$ , 其中  $a_1 \neq 0$ . 化为首1形式得  $x^3 + kx^2 + mx + n = 0$ . 令  $x = y - k/3$ , 则有  $y^3 + py + q = 0$ , 其中  $p = -k^2/3 + m$ ,  $q = (2(k/3)^2) - (km/3) + n$ . 由此, 可得一元三次方程的3个根分别为

$$\begin{aligned} x_1 &= [-q/2 + ((q/2)^2 + (p/3)^3)^{1/2}]^{1/3} + \\ &[-q/2 - ((q/2)^2 + (p/3)^3)^{1/2}]^{1/3}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= w[-q/2 + ((q/2)^2 + (p/3)^3)^{1/2}]^{1/3} + \\ &w^2[-q/2 - ((q/2)^2 + (p/3)^3)^{1/2}]^{1/3}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} x_3 &= w^2[-q/2 + ((q/2)^2 + (p/3)^3)^{1/2}]^{1/3} + \\ &w[-q/2 - ((q/2)^2 + (p/3)^3)^{1/2}]^{1/3}, \end{aligned} \quad (25)$$

其中  $w = -1/2 + \sqrt{3}/2i$ .

**证** 针对一元三次方程  $a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 = 0$ , 其中  $a_1 \neq 0$ , 约去  $a_1$  可得

$$x^3 + kx^2 + mx + n = 0, \quad (26)$$

其中:  $k = b_1/a_1, m = c_1/a_1, n = d_1/a_1$ .

令  $x = y - k/3$ , 代入方程(25)可得

$$y^3 + py + q = 0, \tag{27}$$

其中:  $p = -k^2/3 + m, q = (2(k/3)^2) - (km/3) + n$ .

设  $y = u + v$  是方程(27)的解, 代入可得

$$(u + v)(3uv + p) + u^3 + v^3 + q = 0. \tag{28}$$

如果  $u$  和  $v$  满足  $uv = -p/3, u^3 + v^3 = -q$ , 那么方程(28)成立.

由一元二次方程韦达定理可得,  $u^3$  和  $v^3$  是如下方程的解:

$$y^2 + qy - (p/3)^3 = 0. \tag{29}$$

求解方程(29)得

$$y = -q/2 \pm ((q/2)^2 + (p/3)^3)^{1/2}. \tag{30}$$

设  $X, Y$  为方程(29)两个根, 则

$$\begin{aligned} X &= -q/2 - ((q/2)^2 + (p/3)^3)^{1/2}, \\ Y &= -q/2 + ((q/2)^2 + (p/3)^3)^{1/2}. \end{aligned}$$

由于  $u^3$  和  $v^3$  是方程(29)两个根, 则有

$$u^3 = X, v^3 = Y. \tag{31}$$

求解方程(31)得

$$u = \begin{cases} X^{1/3}, \\ X^{1/3}w, \\ X^{1/3}w^2, \end{cases} \quad v = \begin{cases} Y^{1/3}, \\ Y^{1/3}w, \\ Y^{1/3}w^2, \end{cases}$$

其中  $w = -1/2 + \sqrt{3}/2i$ . 考虑到  $uv = -p/3$ , 所以  $u, v$  只有三组解, 分别为

$$\begin{aligned} u_1 &= X^{1/3}, v_1 = Y^{1/3}, \\ u_2 &= X^{1/3}w, v_2 = Y^{1/3}w^2, \\ u_3 &= X^{1/3}w^2, v_3 = Y^{1/3}w. \end{aligned}$$

上式中代入  $X$  和  $Y$  便可得结论中根的形式. 证毕.

**注 4** 引理 2 中的结论, 将在优化矩阵  $L$  特征值中使用.

### 4.2 拓扑设计

考虑系统(8), 令  $S = \frac{bd}{2\sqrt{rc}}I_n + b\sqrt{r^{-1}c}L$ . 根据矩阵  $L$  的行和为零, 可知矩阵  $S$  的行和为固定值  $\frac{bd}{2\sqrt{rc}}$ , 进而其所对应的特征向量可取为  $p_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}1_n$ . 由于矩阵  $S$  的特征值均为正整数, 最小特征值的特征向量已知, 且特征向量彼此之间正交, 那么能否根据这些特征设计出优化矩阵  $S$  所对应的形式呢? 下面, 给出拓扑优化算法, 具体步骤如下:

**步骤 1** 首先令  $p_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}1_n$  为矩阵  $S$  最小特征

值  $\frac{bd}{2\sqrt{rc}}$  所对应的特征向量.

**步骤 2** 求出向量  $p_1$  的零空间, 并记为  $N(p_1)$ .

**步骤 3** 从向量  $p_1$  的零空间中任取线性无关向量组:

$$[k_2 \ k_3 \ \cdots \ k_n] \in N(p_1).$$

对这些线性无关的向量做正交化处理, 可记为

$$[p_2 \ p_3 \ \cdots \ p_n],$$

令  $P = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n]$ .

**步骤 4** 对于矩阵  $S$  的特征值, 可通过任意给定矩阵  $L$  的特征值得出, 其中  $\lambda_i > 0, i = 2, 3, \dots, n$ . 因为  $\lambda_{si} = \frac{bd}{2\sqrt{rc}} + b\sqrt{r^{-1}c}\lambda_i$ , 所以

$$\begin{aligned} A_s &= \text{diag} \left\{ \frac{bd}{2\sqrt{rc}}, \frac{bd}{2\sqrt{rc}} + b\sqrt{r^{-1}c}\lambda_2, \dots, \right. \\ &\quad \left. \frac{bd}{2\sqrt{rc}} + b\sqrt{r^{-1}c}\lambda_n \right\}. \end{aligned}$$

**步骤 5** 根据  $S = PA_sP^T$ , 计算可得与  $L$  矩阵同型的  $S$  矩阵.

**步骤 6** 如果需要相应的拓扑连接信息, 可以通过矩阵  $S$  逆推矩阵  $L$ , 那么根据  $L$  便可得出相应的拓扑信息.

**注 5** 根据步骤 1 可求出步骤 2, 3 所对应的结果, 即得到矩阵的正交转换矩阵. 步骤 4 中矩阵  $S$  所对应的特征值, 是后续需要优化设计的量, 通过步骤 5 可得出优化矩阵  $S$  所对应的具体形式, 若需要知道矩阵  $L$  的具体形式, 则可以通过步骤 6 获得.

为进一步的优化步骤 4 中矩阵  $S$  所对应的特征值, 考虑如下的系统总能量.

对于系统(8), 定义系统的总能量函数如下:

$$J = \alpha J_1 + \beta J_2, \tag{32}$$

其中

$$J_1 = \|L\|_F^2, \tag{33}$$

( $\|\cdot\|_F$  为矩阵的  $F$  范数), 反映的是多智能体系统通信拓扑的总连边数, 对应的是系统的通信能量.

$$J_2 = \int_0^\infty (x(t) - x(\infty))^T (x(t) - x(\infty)) dt \tag{34}$$

是多智能体系统中智能体状态的暂态量与最终稳定状态之差的二次型函数, 反应了趋向于一致性的过程, 对应于系统中的控制能量.  $\alpha > 0, \beta > 0$  是能量的加权系数, 满足  $\alpha + \beta = 1$ . 通过加权系数的调节, 可以增强评估系统综合性能的灵活性.

**注 6** 在总能量函数  $J$  中, 优化通信能量  $J_1$ , 可以最大

限度的减少拓扑之间的连边, 得出总连边数最小的优化拓扑. 而连边数的减少将减弱智能体之间的交互, 进而会降低一致性的收敛速度. 为了在降低通信能量的同时, 保证理想的收敛速度, 本文引入了控制能量 $J_2$ . 当智能体彼此之间的通信变弱时, 最小化控制能量 $J_2$ 可以保证智能体的快速稳定性收敛. 系统的总能量 $J$ 有效的综合了两方面的性能指标, 权衡通信能量和控制能量之间的矛盾, 找出其中的均衡点, 获取最优的矩阵 $S$ .

下面的定理给出了获取矩阵 $S$ 的优化特征值方法:

**定理 2** 对于系统(8), 在优化矩阵 $S$ 的设计过程中, 通过优化(32)中的总能量, 得出优化拉普拉斯矩阵 $L$ 的特征值 $\lambda_i$ :

$$\lambda_{i1} = [-q/2 + ((q/2)^2 + (p/3)^3)^{1/2}]^{1/3} + [-q/2 - ((q/2)^2 + (p/3)^3)^{1/2}]^{1/3}, \quad (35)$$

$$\lambda_{i2} = w[-q/2 + ((q/2)^2 + (p/3)^3)^{1/2}]^{1/3} + w^2[-q/2 - ((q/2)^2 + (p/3)^3)^{1/2}]^{1/3}, \quad (36)$$

$$\lambda_{i3} = w^2[-q/2 + ((q/2)^2 + (p/3)^3)^{1/2}]^{1/3} + w[-q/2 - ((q/2)^2 + (p/3)^3)^{1/2}]^{1/3}, \quad (37)$$

其中:

$$p = -\frac{d^2}{12c^2},$$

$$q = \frac{2d^3}{27c^3} - \frac{d^3}{12c^3} - \frac{\sqrt{rc}\beta}{4bc\alpha} x^T(0)p_i p_i^T x(0),$$

$x(0)$ 表示智能体的初始状态,  $p_i$ 表示第 $i$ 个智能体对应的特征向量,  $w = -1/2 + \sqrt{3}/2i$ . 则优化矩阵 $S$ 所对应的特征值为

$$\lambda_{si} = \frac{bd}{2\sqrt{rc}} + b\sqrt{r^{-1}c}\lambda_i, \quad (38)$$

其中:  $i = 1, 2, 3, \dots, n, k = 1, 2, 3$ .

**证** 由引理1可知, 对于多智能体系统(8), 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 对应的系统状态

$$x(\infty) = 0.$$

总能量:

$$J = \alpha J_1 + \beta J_2 =$$

$$\alpha \|L\|_F^2 + \beta \int_0^\infty ((x(t) - x(\infty))^T (x(t) - x(\infty))) dt =$$

$$\alpha \sum_{i=1}^n (\lambda_i)^2 + \beta \int_0^\infty x^2(t) dt. \quad (39)$$

对式(8)求解, 代入方程(39)可得

$$J = \alpha \sum_{i=1}^n (\lambda_i)^2 + \beta x^T(0)P \int_0^\infty \{\exp(-A_s t)\}^2 dt P^T x(0), \quad (40)$$

其中 $A_s = \text{diag}\{\lambda_{s1}, \lambda_{s2}, \dots, \lambda_{sn}\}$ . 在式(40)中, 指数

项对应的对角矩阵为

$$\exp(-\lambda_{si} t) =$$

$$\text{diag}\{\exp(-\lambda_{s1} t), \exp(-\lambda_{s2} t), \dots, \exp(-\lambda_{sn} t)\}, \quad (41)$$

其中 $\lambda_{si} = \frac{bd}{2\sqrt{rc}} + b\sqrt{r^{-1}c}\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

化简方程(40)中的积分项, 可得

$$J = \alpha \sum_{i=1}^n (\lambda_i)^2 + \beta x^T(0)P \bar{L} P^T x(0), \quad (42)$$

其中 $\bar{L} = \text{diag}\{\frac{1}{2\lambda_{s1}}, \frac{1}{2\lambda_{s2}}, \dots, \frac{1}{2\lambda_{sn}}\}$ .

将 $\lambda_{si} = \frac{bd}{2\sqrt{rc}} + b\sqrt{r^{-1}c}\lambda_i$ 代入方程(42), 可得

$$J = \alpha \sum_{i=1}^n (\lambda_i)^2 + \beta x^T(0)P \tilde{A} P^T x(0), \quad (43)$$

其中 $\tilde{A} = \text{diag}\{\frac{\sqrt{rc}}{bd}, \frac{\sqrt{rc}}{bd+2bc\lambda_2}, \dots, \frac{\sqrt{rc}}{bd+2bc\lambda_n}\}$ .

为使系统的总能量最小, 方程(43)两边对 $\lambda_i$ 求导, 可得

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda_i} = 2\alpha \lambda_i - \frac{2bc\sqrt{rc}}{(bd+2bc\lambda_i)^2} \beta x^T(0)p_i p_i^T x(0). \quad (44)$$

令方程(44)等于零, 化简可得如下的一元三次方程:

$$4b^2c^2\alpha\lambda_i^3 + 4b^2dc\alpha\lambda_i^2 + b^2d^2\alpha\lambda_i - bc\sqrt{rc}\beta x^T(0)p_i p_i^T x(0) = 0. \quad (45)$$

因为 $4b^2c^2\alpha > 0$ 符合一元三次方程化简条件, 方程(45)两边同时除以 $4b^2c^2$ 可得如下方程:

$$\lambda_i^3 + \frac{d}{c}\lambda_i^2 + \frac{d^2}{4c^2}\lambda_i - \frac{\sqrt{rc}\beta}{4bc\alpha} x^T(0)p_i p_i^T x(0) = 0. \quad (46)$$

由式(46)以及引理2可知式(45)的解为

$$\lambda_{i1} = [-q/2 + ((q/2)^2 + (p/3)^3)^{1/2}]^{1/3} + [-q/2 - ((q/2)^2 + (p/3)^3)^{1/2}]^{1/3}, \quad (47)$$

$$\lambda_{i2} = w[-q/2 + ((q/2)^2 + (p/3)^3)^{1/2}]^{1/3} + w^2[-q/2 - ((q/2)^2 + (p/3)^3)^{1/2}]^{1/3}, \quad (48)$$

$$\lambda_{i3} = w^2[-q/2 + ((q/2)^2 + (p/3)^3)^{1/2}]^{1/3} + w[-q/2 - ((q/2)^2 + (p/3)^3)^{1/2}]^{1/3}, \quad (49)$$

其中

$$p = -\frac{d^2}{12c^2},$$

$$q = \frac{2d^3}{27c^3} - \frac{d^3}{12c^3} - \frac{\sqrt{rc}\beta}{4bc\alpha} x^T(0)p_i p_i^T x(0),$$

$$w = -1/2 + \sqrt{3}/2i.$$

因为矩阵  $S$  的特征值  $\lambda_{si} = \frac{bd}{2\sqrt{rc}} + b\sqrt{r^{-1}c}\lambda_i$ , 所以优化的矩阵  $S$  的特征值为

$$\lambda_{si} = \frac{bd}{2\sqrt{rc}} + bc\lambda_i,$$

其中:  $i = 1, 2, 3, \dots, n, k = 1, 2, 3$ . 证毕.

**注 7** 根据定理 2 获得的特征值是拓扑优化算法步骤 4 所对应的最优特征值. 根据步骤 5, 可以进一步的求出具体的最优矩阵.

**注 8** 根据定理 2, 当系统方程退化成  $\dot{x}(t) = -Lx(t)$ , 并且控制器退化成  $u(t) = -Lx(t)$  时, 考虑 (32) 所示的总能量  $J$ , 则对应的优化拉普拉斯矩阵  $L$  的特征值  $\lambda_i$  为

$$\lambda_i = \left(\frac{p_i^T x(0)}{2}\right)^{2/3}, \quad (50)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.3162 & -0.3162 & -0.3162 & -0.3162 & -0.3162 & -0.3162 & -0.3162 & -0.3162 & -0.3162 & -0.3162 \\ 0.3162 & 0.9240 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 \\ 0.3162 & -0.0760 & 0.9240 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 \\ 0.3162 & -0.0760 & -0.0760 & 0.9240 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 \\ 0.3162 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & 0.9240 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 \\ 0.3162 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & 0.9240 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 \\ 0.3162 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & 0.9240 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 \\ 0.3162 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & 0.9240 & -0.0760 & -0.0760 \\ 0.3162 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & 0.9240 & -0.0760 \\ 0.3162 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & -0.0760 & 0.9240 \end{bmatrix}.$$

根据定理 2 可以计算矩阵  $L$  所对应的特征值, 这里给定了一组满足最优控制器获取条件的参数, 其中  $a = 1, b = 1, r = 1, e = 0, c = 4, d = 4$ , 相应的拓扑优化性能指标参数  $\alpha = \beta = 0.5$ , 分别代入方程 (35)–(37) 可得到如下的方程

$$\lambda_{i1} = \left\{ \left( \frac{1}{16}\sigma_i^2 + \frac{1}{216} \right) + \left[ \left( \frac{1}{16}\sigma_i^2 + \frac{1}{216} \right)^2 + \left( -\frac{1}{36} \right)^{3/2} \right]^{1/3} + \left\{ \left( \frac{1}{16}\sigma_i^2 + \frac{1}{216} \right) - \left[ \left( \frac{1}{16}\sigma_i^2 + \frac{1}{216} \right)^2 - \left( \frac{1}{36} \right)^{3/2} \right]^{1/3} \right\}, \quad (51)$$

$$\lambda_{i2} = w \left\{ \left( \frac{1}{16}\sigma_i^2 + \frac{1}{216} \right) + \left[ \left( \frac{1}{16}\sigma_i^2 + \frac{1}{216} \right)^2 - \left( \frac{1}{36} \right)^{3/2} \right]^{1/3} + w^2 \left\{ \left( \frac{1}{16}\sigma_i^2 + \frac{1}{216} \right) - \left[ \left( \frac{1}{16}\sigma_i^2 + \frac{1}{216} \right)^2 - \left( \frac{1}{36} \right)^{3/2} \right]^{1/3} \right\}, \quad (52)$$

$$\lambda_{i3} = w^2 \left\{ \left( \frac{1}{16}\sigma_i^2 + \frac{1}{216} \right) + \left[ \left( \frac{1}{16}\sigma_i^2 + \frac{1}{216} \right)^2 + \left( \frac{1}{36} \right)^{3/2} \right]^{1/3} + w \left\{ \left( \frac{1}{16}\sigma_i^2 + \frac{1}{216} \right) - \left[ \left( \frac{1}{16}\sigma_i^2 + \frac{1}{216} \right)^2 - \left( \frac{1}{36} \right)^{3/2} \right]^{1/3} \right\}, \quad (53)$$

其中  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . 此时与文献 [15] 结果一致, 说明定理 2 的结论具有一般性, 可适用于更广泛的一类系统.

### 5 仿真分析

考虑由 10 个智能体所组成的多智能体系统, 并设其初始状态为

$$x(0) = [10 \ 15 \ 20 \ 26 \ 23 \ 9 \ 12 \ 18 \ 28 \ 30]^T.$$

因为矩阵  $S$  最小特征值所对应的特征向量为

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} I_{10} = 0.3162 I_{10}.$$

根据特征向量  $p_1$ , 可以求出  $p_1$  所对应的零式空间, 记为  $[p_2 \ p_3 \ \dots \ p_n] \in N(p_1)$ , 计算可得所取的线性无关特征向量  $P$  为

$$\left( -\frac{1}{36} \right)^{3/2} \left. \right\}^{1/3} + w \left\{ \left( \frac{1}{16}\sigma_i^2 + \frac{1}{216} \right) - \left[ \left( \frac{1}{16}\sigma_i^2 + \frac{1}{216} \right)^2 - \left( \frac{1}{36} \right)^{3/2} \right]^{1/3} \right\}, \quad (53)$$

其中  $\sigma_i = p_i^T x(0)$ .

因为  $\lambda_i$  为无向图的拉普拉斯矩阵  $L$  所对应的特征值, 因此满足  $\lambda_i > 0$  的特点, 通过式 (51)–(53) 可以求解出图拉普拉斯矩阵  $L$  所对应的特征值, 因为式 (52) 和式 (53) 所对应的根在给定的初始条件以及所求出的特征向量的情况下, 不满足特征值  $\lambda_i > 0$  的特点, 因此通过式 (51) 可以求得满足条件的特征根为

$$[\lambda_2 \ \lambda_3 \ \dots \ \lambda_{10}] = [0.8116 \ 1.0888 \ 2.1906 \ 1.6845 \ 2.0004 \ 1.4658 \ 0.5906 \ 2.4976 \ 2.7870].$$

那么, 根据已求的转换矩阵  $P$ , 对角矩阵  $\Lambda$ , 其中  $\lambda_1 = 0$ , 并根据线性矩阵相关知识, 可以得出拉普拉斯矩阵  $L$ . 由优化的矩阵  $L$  和转换矩阵  $P$ , 可以得出式 (39) 中优化特征值所对应的最小能耗为  $J = 38.4851$ , 其中

$$L = \begin{bmatrix} 1.5117 & 0.1065 & 0.0189 & -0.3295 & -0.1695 & -0.2694 & -0.1003 & 0.1764 & -0.4266 & -0.5181 \\ 0.1065 & 0.7756 & -0.0571 & -0.1408 & -0.1024 & -0.1264 & -0.0858 & -0.0193 & -0.1642 & -0.1861 \\ 0.0189 & -0.0571 & 1.0106 & -0.1619 & -0.1234 & -0.1474 & -0.1068 & -0.0403 & -0.1852 & -0.2072 \\ -0.3295 & -0.1408 & -0.1619 & 1.9450 & -0.2072 & -0.2311 & -0.1905 & -0.1240 & -0.2689 & -0.2909 \\ -0.1695 & -0.1024 & -0.1234 & -0.2072 & 1.5158 & -0.1927 & -0.1521 & -0.0856 & -0.2305 & -0.2525 \\ -0.2694 & -0.1264 & -0.1474 & -0.2311 & -0.1927 & 1.7837 & -0.1761 & -0.1096 & -0.2545 & -0.2765 \\ -0.1003 & -0.0858 & -0.1068 & -0.1905 & -0.1521 & -0.1761 & 1.3303 & -0.0690 & -0.2139 & -0.2358 \\ 0.1764 & -0.0193 & -0.0403 & -0.1240 & -0.0856 & -0.1096 & -0.0690 & 0.5881 & -0.1474 & -0.1694 \\ -0.4266 & -0.1642 & -0.1852 & -0.2689 & -0.2305 & -0.2545 & -0.2139 & -0.1474 & 2.2054 & -0.3142 \\ -0.5181 & -0.1861 & -0.2072 & -0.2909 & -0.2525 & -0.2765 & -0.2358 & -0.1694 & -0.3142 & 2.4508 \end{bmatrix}$$

**注9** 上述给出的拉普拉斯矩阵 $L$ 每个元素小数点后仅保留了四位有效数字. 仿真计算过程中, 拉普拉斯矩阵 $L$ 的行和误差为

$$\text{row\_sum} = 1.0e-15 * [0 \ 0 \ 0 \ -0.2220 \ -0.0555, \\ -0.2220 \ -0.1665 \ 0.1110 \ 0.1110 \ 0]^T.$$

显然, 计算结果 $L$ 满足行和为零的性质.

矩阵 $S$ 特征值 $\lambda_{si} = \frac{bd}{2\sqrt{rc}} + b\sqrt{r^{-1}c}\lambda_i$ , 其中 $i =$

$$S = \begin{bmatrix} 4.0234 & 0.2131 & 0.0378 & -0.6591 & -0.3390 & -0.5388 & -0.2007 & 0.3529 & -0.8533 & -1.0363 \\ 0.2131 & 2.5511 & -0.1143 & -0.2817 & -0.2048 & -0.2528 & -0.1715 & -0.0386 & -0.3283 & -0.3723 \\ 0.0378 & -0.1143 & 3.0212 & -0.3238 & -0.2469 & -0.2949 & -0.2137 & -0.0807 & -0.3704 & -0.4144 \\ -0.6591 & -0.2817 & -0.3238 & 4.8900 & -0.4143 & -0.4623 & -0.3811 & -0.2481 & -0.5379 & -0.5818 \\ -0.3390 & -0.2048 & -0.2469 & -0.4143 & 4.0316 & -0.3854 & -0.3042 & -0.1712 & -0.4610 & -0.5049 \\ -0.5388 & -0.2528 & -0.2949 & -0.4623 & -0.3854 & 4.5673 & -0.3522 & -0.2192 & -0.5090 & -0.5529 \\ -0.2007 & -0.1715 & -0.2137 & -0.3811 & -0.3042 & -0.3522 & 3.6607 & -0.1380 & -0.4277 & -0.4717 \\ 0.3529 & -0.0386 & -0.0807 & -0.2481 & -0.1712 & -0.2192 & -0.1380 & 2.1762 & -0.2947 & -0.3387 \\ -0.8533 & -0.3283 & -0.3704 & -0.5379 & -0.4610 & -0.5090 & -0.4277 & -0.2947 & 5.4108 & -0.6285 \\ -1.0363 & -0.3723 & -0.4144 & -0.5818 & -0.5049 & -0.5529 & -0.4717 & -0.3387 & -0.6285 & 5.90160 \end{bmatrix}$$

则对于(8), 利用所求取的优化通信拓扑矩阵 $S$ , 给出系统状态的变化曲线如图1所示. 而利用随机生成的拓扑图, 如图2所示, 在相同的参数和相同的初始状态下, 设其边权重统一为0.53, 保证随机拓扑图与优化拓扑图具有相同的连通度. 在满足上述条件的情况下, 随机拓扑对应(8)中状态的变化曲线, 如图3所示.

图1中的拓扑是在最小化系统性能指标的情况下得出的, 即得出的拓扑图使得系统相应的通信能量以及控制能量最小, 相应的最小能量 $J = 38.4851$ . 从收敛速度的角度而言, 图1中各多智能体状态在1.2s左右达到了一致性收敛, 而对于随机拓扑而言, 相应的状态收敛如图3所示, 其中各多智能体状态在2.5s左右达到了一致性收敛. 从单纯的收敛速度角度而言, 对应的优化控制器与优化拓扑的结合能够提升一致性的收敛速度, 而从整体的性能指标而言, 拓扑本身

$1, 2, \dots, n$ . 因为所选取的满足最优控制器获取的参数条件为 $a=1, b=1, r=1, e=0, c=4, d=4$ 且

$$[\lambda_{s1} \ \lambda_{s2} \ \dots \ \lambda_{s10}] = \\ [1.000 \ 2.6233 \ 3.1775 \ 5.3812 \ 4.3690 \ 5.0070 \\ 3.9316 \ 2.1812 \ 5.9953 \ 6.5740].$$

根据设计步骤5, 可以得出优化的矩阵 $S$ 为

的获得使得相应的指标最优.

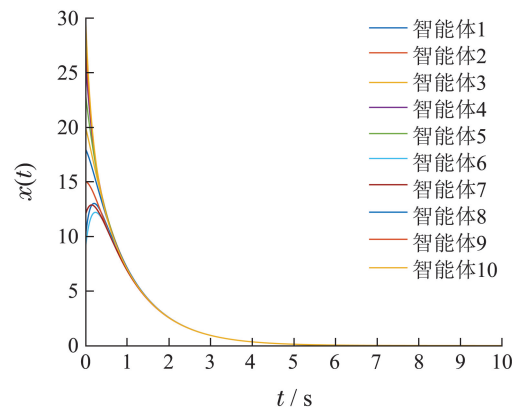


图1 拓扑优化与控制器优化下的一致性曲线  
Fig. 1 Consensus achieved by the optimal topology and optimal controller

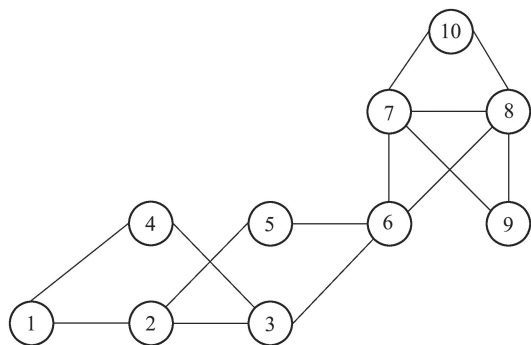


图2 随机拓扑图

Fig. 2 Random topological graph

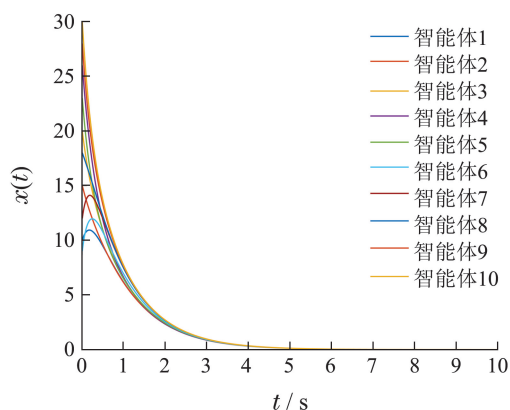


图3 随机拓扑与优化控制器下的一致性曲线

Fig. 3 Consensus achieved by random topology and optimal controller

## 6 总结

本文在优化的控制器的基础上,进一步考虑拓扑的优化设计.在拓扑设计的过程中,使提出的性能指标最小,通过运用矩阵本身的特点以及线性代数相关知识,得出了优化的拓扑矩阵,实现了拓扑优化与相应的控制器优化的结合.仿真有效的验证了拓扑优化更有效地在控制器优化的基础上进一步提升系统性能.本文工作主要研究无向图的拓扑设计问题,对于有向图的拓扑优化和控制器协同设计的方法将是后续需要思考的一个问题.

## 参考文献:

- [1] MA Jingying, ZHENG Yuanshi, WANG Long. Performance optimization of multi-agent systems. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2015, 35(3): 270 – 286.  
(马婧瑛, 郑元世, 王龙. 多智能体系统的性能优化. *系统科学与数学*, 2015, 35(3): 270 – 286.)
- [2] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [3] SUN Y G, WANG L, XIE G M. Average consensus in networks of dynamic agents with switching topologies and multiple time-varying delays. *System and Control Letters*, 2008, 57(2): 175 – 183.
- [4] LI T, ZHANG J F. Consensus conditions of multi-agent systems with time-varying topologies and stochastic interaction noises. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2010, 55(9): 2043 – 2057.
- [5] LI T, FU M Y, XIE L H, et al. Distributed consensus with limited communication data rate. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(2): 279 – 292.
- [6] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655 – 661.
- [7] KIM Y, MESBAHI M. On maximizing the second smallest eigenvalue of a state-dependent graph Laplacian. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2006, 51(1): 116 – 120.
- [8] KIM Y. Bisection algorithm of increasing algebraic connectivity by adding an edge. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 55(1): 170 – 174.
- [9] BAMIEH B, PAGANINI F, DAHLEH M. Distributed control of spatially invariant systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(7): 1091 – 1107.
- [10] SHAMMA J, ARSLAN G. A decomposition approach to distributed control of spatially invariant systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(4): 701 – 707.
- [11] MOTEE N, JADBABAIE A. Optimal control of spatially distributed systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(7): 1616 – 1629.
- [12] ROGGE J A, SUYKENS J A K, AEYELS D. Consensus over ring networks as a quadratic optimal control problem. *The 4th IFAC Symposium on System, Structure and Control, UniversitàPolitecnicadelle MarcheAncona*. Italy: IEEE, 2010: 317 – 323, 15 – 17.
- [13] MA J Y, ZHENG Y S, WANG L. LQR-based optimal topology of leader-following consensus. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2015, 25(17): 3404 – 3421.
- [14] ZHANG F F, WANG W, ZHANG H S. Design and analysis of distributed optimal controller for identical multi-agent systems. *Asian Journal of Control*, 2015, 17(1): 265 – 373.
- [15] YUAN Wangui, QU Baida. The optimal design for interaction topology of multi-agent systems. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(2): 228 – 232.  
(袁玩贵, 屈百达. 多智能体系统通信拓扑最优设计. *控制理论与应用*, 2016, 33(2): 228 – 232.)

## 作者简介:

马丹 副教授,研究方向为多智能体系统及基于网络的控制、切换系统、时滞系统等, E-mail: madan@mail.neu.edu.cn;

张宝峰 硕士研究生,研究方向为多智能体系统一致性性能优化, E-mail: baofenglw123@163.com;

王璐瑶 硕士研究生,研究方向为多智能体系统一致性性能优化, E-mail: wangluyaoq\_q@163.com.