

倾转式三旋翼无人机的有限时间收敛控制设计

王征宇, 鲜 斌[†]

(天津大学 电气自动化与信息工程学院, 天津 300072)

摘要: 倾转式三旋翼无人机是一种多旋翼无人机的特殊构型, 其兼具单旋翼无人机与普通多旋翼无人机的特点. 目前对于此类无人机的鲁棒控制设计研究成果较少, 多数已有的控制方法未考虑模型参数的不确定性与外界扰动对此类无人机控制的影响. 为此本文针对倾转式三旋翼无人机动力学模型存在的转动惯量未知, 以及飞行中受到未知外界扰动影响的情况, 基于super-twisting算法, 设计了一种新型非线性鲁棒控制方法. 通过基于Lyapunov的稳定性分析方法, 证明了闭环系统的稳定性, 并得到在有限时间内三旋翼无人机的姿态跟踪误差收敛的结果. 本文中提出的控制算法, 在倾转式三旋翼无人机实验平台上进行了实时飞行控制实验, 取得了较好的控制效果.

关键词: 倾转式三旋翼无人机; 鲁棒控制; 有限时间收敛; 模型参数未知; 外界扰动

引用格式: 王征宇, 鲜斌. 倾转式三旋翼无人机的有限时间收敛控制设计. 控制理论与应用, 2019, 36(9): 1442 – 1452

DOI: 10.7641/CTA.2018.80034

Finite time convergence control design of the tilt tri-rotor unmanned aerial vehicle

WANG Zheng-yu, XIAN Bin[†]

(School of Electrical and Information Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: Tilt tri-rotor unmanned aerial vehicle (UAV) is a special configuration of multi-rotor UAV, which possess common characteristics with single rotor helicopter UAV and multi-rotor UAV. However, not much work has focuses on the robust control design for the tilt tri-rotor UAV, most of existing works do not consider the effects associated with modeling uncertainties and unknown external disturbances. In this paper, a new nonlinear robust control strategy based on the super-twisting algorithm is proposed to control the tilt tri-rotor UAV which is subjected to unknown inertial tensor and unknown external disturbances. Lyapunov based stability is employed to prove the stability of the closed loop system, the finite-time convergence of the attitude control error is also achieved. The proposed control strategy is validated on the self-built tilt tri-rotor UAV test bed.

Key words: tilt tri-rotor UAV; robust control; convergence in finite time; modeling uncertainties; disturbance

Citation: WANG Zhengyu, XIAN Bin. Finite time convergence control design of the tilt tri-rotor unmanned aerial vehicle. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(9): 1442 – 1452

1 引言

旋翼飞行器的自主飞行技术近年来一直是科研领域的研究热点, 并且在实际应用中存在着大量的需求^[1]. 相对于固定翼飞行器, 旋翼飞行器具有垂直起降、自主悬停、机动性能良好、便于操作等优点^[2-3]. 相比于其他多旋翼无人机, 三旋翼无人机由于电机数量少, 具有较为紧凑的机体结构、较轻的机体重量、较

低的飞行功耗, 因此有较长的续航时间、较高的悬停效率、以及较强飞行机动性能等^[4], 具备较好的研究价值和应用前景. 但由于三旋翼无人机仅有三个无刷直流电机, 难以保证无人机偏航方向的力矩平衡, 针对这一问题, 研究人员尝试了不同的方案, 利用不同的机体构型来解决力矩平衡与欠驱动问题, 如共轴式三旋翼无人机^[5]、倾转式三旋翼无人机^[6]、固定翼与

收稿日期: 2018-01-12; 录用日期: 2018-12-03.

[†]通信作者. E-mail: xbin@tju.edu.cn; Tel.: +86 22-27400897.

本文责任编辑: 胡跃明.

国家自然科学基金项目(91748121, 90916004), 天津市应用基础与前沿技术研究计划重点项目(14JCZDJC31900), 天津市科技支撑计划重点项目(15ZCZDZX00810)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (91748121, 90916004), the Key Project of Tianjin Application and Research Program in Cutting-Edge Technology (14JCZDJC31900) and the Key Project of Tianjin Science and Technology Support Program (15ZCZDZX00810).

三旋翼结合的无人机^[7]等结构. 本文主要的研究对象为倾转式三旋翼无人机, 即在尾电机部分增加一个可以倾转的舵机, 控制尾桨相对于垂直方向的倾角, 使得尾部螺旋桨产生的拉力可以在水平方向产生分力. 倾转式三旋翼无人机动力学模型的非线性复杂程度较高, 各通道之间的转矩耦合较为复杂, 并且在实际的应用场景中, 通常存在未知外界扰动以及不确定机体参数的影响^[8], 这对倾转式三旋翼无人机的控制器的设计提出了更高的要求.

国内外相关高校与研究机构针对于三旋翼无人机的动力学模型及其控制策略已进行了一定的研究工作. 法国贡比涅大学对三旋翼无人机的姿态与位置动力学模型进行了初步的研究, 利用非线性控制算法实现了对倾转式三旋翼无人机的姿态控制^[6], 并随后的研究中将飞机的陀螺效应以及电机的反扭矩考虑到模型中^[9]. 文献[10]则考虑到舵机转动对机体造成的力矩干扰, 设计出基于饱和函数的控制器, 使飞行系统具备了一定的抗干扰能力. 此外, 文献[11]中利用PID控制器, 实现了对倾转式三旋翼无人机的姿态控制与跟踪. 文献[12]针对三旋翼无人机中不可测的状态变量, 构造了状态观测器来进行估计, 提高了控制算法的实用性. 文献[13]中则是将三旋翼无人机的三轴均设计为可倾转的机臂, 提高了无人机的机动性, 同时也导致动力学模型较为复杂, 研究人员在建立的较为精确的动力学模型基础上, 针对三旋翼无人机进行了轨迹跟踪与吊挂实验, 实现了较好的控制效果.

针对非线性控制系统有限时间稳定的控制算法研究也有较多的研究成果. 常见的有终端滑模控制算法^[14]与Super-Twisting二阶滑模控制算法等. 终端滑模控制算法可以使得在系统到达滑模面后, 系统状态在有限时间内稳定至期望位置^[15]. 其在无人机的飞行控制中得到了应用, 如文献[16]中采用了终端滑模控制实现了对四旋翼无人机姿态与位置的有限时间收敛控制. Super-Twisting二阶滑模控制算法可以在系统的不确定参数上界已知的情况下, 实现系统滑模面及其导数在有限时间内收敛至0^[19]. 其在无人机的飞行控制中也得到了应用, 如文献[17]中, 研究人员利用Super-Twisting控制算法实现了对四旋翼无人机姿态角的鲁棒跟踪控制. 而文献[18]利用Super-Twisting控制算法对四旋翼无人机的姿态角与高度位置进行了鲁棒跟踪控制, 考虑到了外界的风力扰动, 并对闭环系统的有限时间稳定进行了证明, 最后进行了全自由度的四旋翼实时飞行验证实验. 但目前, 尚未有针对本文中所研究的倾转式三旋翼无人机的姿态误差有限时间收敛的控制方法研究.

综合上述相关文献, 目前三旋翼无人机研究领域依然有一些不足之处: 上述对于三旋翼无人机的控制研究均未对外界风力扰动进行充分考虑并进行实验

验证, 控制算法的鲁棒性不足, 难以满足三旋翼无人机应用中的复杂飞行任务和控制要求; 上述文献中设计的非线性鲁棒控制算法均未考虑控制器控制增益未知的情况, 对应于三旋翼无人机的动力学模型, 即未考虑无人机转动惯量未知的情况; 上述文献中针对三旋翼无人机姿态角的控制算法设计, 未实现姿态角误差的有限时间收敛与证明. 为了使得三旋翼无人机在具有外界扰动的环境下拥有更好的鲁棒性与控制性能, 本文完成的工作与创新点包括: 1) 基于Super-Twisting的鲁棒控制策略, 设计了一种用于三旋翼无人机姿态控制的新型非线性鲁棒控制器^[20], 在三旋翼无人机外界有未知扰动力矩以及机体转动惯量未知的情况下, 仍具有良好的姿态控制性能; 2) 基于Lyapunov稳定性分析方法证明了闭环控制系统的稳定性, 证明了姿态控制误差的有限时间收敛性能, 并求出了对应的收敛时间; 3) 基于自主搭建的倾转式三旋翼无人机实验平台对文中设计的鲁棒控制算法进行了实时的飞行控制实验, 验证了算法在外界扰动下的鲁棒性与稳定性.

本文组织如下: 第2节针对倾转式三旋翼无人机的动力学模型进行了分析; 第3节设计了基于Super-Twisting策略的鲁棒控制器, 并对闭环控制系统进行了稳定性分析; 第4节给出了基于倾转式三旋翼无人机实验平台的实验结果与分析; 第5节为对本文主要内容的总结.

2 倾转式三旋翼无人机动力学模型

2.1 坐标系定义

本文采用的倾转式三旋翼无人机机体结构及对应的坐标系与参数定义如图1所示.

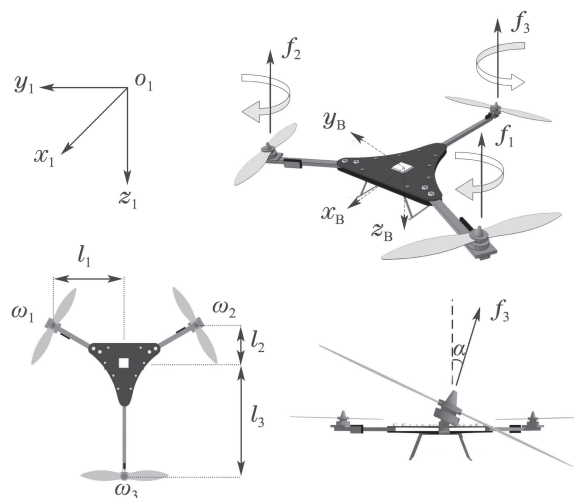


图1 倾转式三旋翼无人机结构简图

Fig. 1 Tilt tri-rotor UAV structure

为便于对无人机运动进行描述, 定义惯性坐标系 $\{I\} = \{x_I, y_I, z_I\}$ 为固定在大地的参考坐标系; 定义机体坐标系 $\{B\} = \{x_B, y_B, z_B\}$ 为原点固定在三旋翼

无人机质心上并满足右手定则的直角坐标系. $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 为三旋翼无人机3个电机的转速, 对应转向如图1所示, f_1, f_2, f_3 分别为3个电机转动产生的升力, l_1, l_2, l_3 为3个姿态通道控制量对应的力臂, α 为舵机的倾转角.

2.2 姿态系统动力学模型

对倾转式三旋翼无人机进行力学分析, 利用牛顿-欧拉方程来描述其模型, 得到姿态系统的动力学模型为^[21]

$$\begin{cases} \tau = J(t)\dot{\Omega} + \Omega \times J(t)\Omega + d_\tau(t), \\ \Omega = R \cdot \dot{\eta}. \end{cases} \quad (1)$$

在式(1)中: $\eta = [\phi(t) \ \theta(t) \ \psi(t)]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ 是惯性坐标系下的姿态向量, $\phi(t), \theta(t), \psi(t)$ 分别表示滚转角、俯仰角与偏航角,

$$\Omega = [\Omega_1(t) \ \Omega_2(t) \ \Omega_3(t)]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$$

是惯性坐标系下的角速度向量, $\Omega_1(t), \Omega_2(t), \Omega_3(t)$ 分别表示惯性坐标系 $\{I\}$ 的轴 x_1, y_1, z_1 对应的角速度. $\tau(t) = [\tau_\phi(t) \ \tau_\theta(t) \ \tau_\psi(t)]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ 是3个姿态通道的控制力矩, 其中 $\tau_\phi(t), \tau_\theta(t), \tau_\psi(t)$ 分别是滚转、俯仰和偏航通道对应的力矩.

$$J(t) = \text{diag}\{[J_\phi(t) \ J_\theta(t) \ J_\psi(t)]^T\} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

是机体的转动惯量, 且为未知的时变函数.

$$d_\tau(t) = [d_\phi(t) \ d_\theta(t) \ d_\psi(t)]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$$

为未知的时变扰动力矩. $R(t)$ 是惯性坐标系下角速度到体坐标系下角速度的旋转矩阵:

$$R(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (2)$$

将式(1)中的第2部分代入第1部分得

$$\ddot{\eta} = -M^{-1}C_m\dot{\eta} + J^{-1}R^{-1}\tau + d_\eta, \quad (3)$$

其中: $M(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, C_m(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, d_\eta(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ 的定义分别为

$$\begin{cases} M(t) = J(t)R(t), \\ C_m(t) = J(t)\dot{R}(t) + R(t)\dot{\eta} \times J(t)R(t), \\ d_\eta(t) = -M^{-1}(t)d_\tau(t). \end{cases} \quad (4)$$

为便于后续控制设计及稳定性分析, 这里提出如下假设:

假设 1 模型中的未知转动惯量 $J(t)$ 及其导数 $\dot{J}(t)$ 均为有界函数, 且对于 $J(t)$ 中的任意一项 $J_i(t)$ ($i = \phi, \theta, \psi$)均有

$$0 < k_{J_m} < J_i(t) < k_{J_M}, \quad (5)$$

其中 $k_{J_m}, k_{J_M} \in \mathbb{R}^+$. 故 $M(t), C_m(t)$ 均有界.

假设 2 模型中的未知项 $d_\tau(t)$ 为有界函数, 且

有 $\dot{d}_\tau(t) \in \mathcal{L}_\infty$, 故有 $d_\eta(t), \dot{d}_\eta(t) \in \mathcal{L}_\infty$.

对于三旋翼无人机, 其3个姿态通道的控制力矩 $[\tau_\phi \ \tau_\theta \ \tau_\psi]$ 与3个电机所产生的升力 $[f_1 \ f_2 \ f_3]$ 以及舵机的转角 $\alpha(t)$ 的关系可以表示为

$$\begin{cases} \tau_\phi = (f_1 - f_2)l_1, \\ \tau_\theta = (f_1 + f_2) - l_3f_3 \cos \alpha, \\ \tau_\psi = -l_3f_3 \sin \alpha + c(f_1 + f_2 - f_3 \cos \alpha), \end{cases} \quad (6)$$

其中 c 为反力矩系数^[22]. 由文献[23]可知升力 f 与电机转速 ω 的关系为

$$f = k_\omega \omega^2, \quad (7)$$

其中 k_ω 为升力系数.

3 非线性鲁棒控制算法设计

3.1 跟踪误差与滑模面构造

为实现对倾转式三旋翼无人机姿态通道的控制, 定义跟踪误差向量 $e(t) = [e_\phi(t) \ e_\theta(t) \ e_\psi(t)]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ 为

$$e(t) = \eta(t) - \eta_d(t), \quad (8)$$

其中 $e_\phi(t), e_\theta(t), e_\psi(t)$ 分别是滚转角、俯仰角和偏航角的跟踪误差. 对式(8)求导可得

$$\dot{e}(t) = \dot{\eta}(t) - \dot{\eta}_d(t). \quad (9)$$

构建滑模面 $s(t) = [s_\phi(t) \ s_\theta(t) \ s_\psi(t)]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ 为

$$s(t) = \dot{e}(t) + \Lambda e(t), \quad (10)$$

其中: $s_\phi(t), s_\theta(t)$ 与 $s_\psi(t)$ 分别是滚转、俯仰和偏航通道的滑模面; $\Lambda = \text{diag}\{[\lambda_\phi \ \lambda_\theta \ \lambda_\psi]^T\} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 为一正对角常数系数矩阵. 对式(10)求导, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \ddot{e} + \Lambda \dot{e} = \\ &(-M^{-1}C_m\dot{\eta} - \ddot{\eta}_d + \Lambda \dot{e}) + J^{-1}R^{-1}\tau + d_\eta(t). \end{aligned} \quad (11)$$

定义辅助控制输入信号 $u(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ 为 $u = R^{-1}\tau$, 则式(11)可以写为

$$\dot{s} = J^{-1}u - M^{-1}C_m\dot{\eta} - \ddot{\eta}_d + \Lambda \dot{e} + d_\eta(t). \quad (12)$$

3.2 控制器的设计

针对式(12)中所示的倾转式三旋翼无人机动态特性, 设计控制器输入 $u(t)$ 为^[24]

$$\begin{cases} u = -K_1\zeta_1(s) + v, \\ \dot{v} = -K_2\zeta_2(s). \end{cases} \quad (13)$$

在式(13)中:

$$\begin{cases} \zeta_1(s) = |s|^{\frac{1}{2}} \text{sgn } s + \beta s, \\ \zeta_2(s) = \frac{1}{2} \text{sgn } s + \frac{3}{2} \beta |s|^{\frac{1}{2}} \text{sgn } s + \beta^2 s, \end{cases} \quad (14)$$

$K_1, K_2, \beta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, 定义为

$$\begin{aligned} K_1 &= \text{diag}\{[k_{1\phi}(t) \ k_{1\theta}(t) \ k_{1\psi}(t)]\}, \\ K_2 &= \text{diag}\{[k_{2\phi}(t) \ k_{2\theta}(t) \ k_{2\psi}(t)]\}, \end{aligned}$$

$$\beta = \text{diag}\{[\beta_\phi(t) \ \beta_\theta(t) \ \beta_\psi(t)]\}.$$

在式(14)中: $|s|^{\frac{1}{2}} \text{sgn } s$ 的定义为

$$|s|^{\frac{1}{2}} \text{sgn } s = \begin{bmatrix} |s_\phi|^{\frac{1}{2}} \text{sgn } s_\phi \\ |s_\theta|^{\frac{1}{2}} \text{sgn } s_\theta \\ |s_\psi|^{\frac{1}{2}} \text{sgn } s_\psi \end{bmatrix},$$

其中 $\text{sgn}(\ast)$ 为符号函数, 定义为

$$\text{sgn } s = \begin{cases} -1, & s < 0, \\ 0, & s = 0, \\ 1, & s > 0. \end{cases}$$

为便于后续表达, 将式(12)改写为

$$\dot{s} = \gamma(t)u + \varphi(t), \quad (15)$$

其中: $\gamma(t) = [\gamma_\phi(t) \ \gamma_\theta(t) \ \gamma_\psi(t)]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ 为时变的控制输入系数; $\varphi(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ 为时变的未知项, 包含有外界的时变扰动力矩:

$$\gamma(t) = J^{-1}(t), \quad (16)$$

$$\varphi(t) = -M^{-1}C_m \dot{\eta} - \ddot{\eta}_d + \Lambda \dot{e} + d_\eta(t). \quad (17)$$

由假设1可以得出 $\gamma(t)$ 中的3个元素 $\gamma_i(t) (i = \phi, \theta, \psi)$ 均满足

$$0 < k_m < \gamma_i(t) < k_M, \quad (18)$$

其中 $k_m, k_M \in \mathbb{R}^+$. 同时为了便于后续控制设计, 把未知向量 $\varphi(t)$ 改写为^[25]

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t), \quad (19)$$

其中 $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ 定义分别为

$$\varphi_1(t) = (\Lambda - M^{-1}C_m)\dot{e}, \quad (20)$$

$$\varphi_2(t) = -M^{-1}C_m \dot{\eta}_d - \ddot{\eta}_d + d_\eta(t). \quad (21)$$

未知向量 $\varphi_1(t)$ 中的任一元素满足在初始状态时 $\varphi_{1i}(0) = 0$.

根据无人机的飞行情况, 对其作出合理假设:

假设 3 在惯性坐标系下, 无人机飞行的滚转角与俯仰角满足 $|\phi| \neq \frac{\pi}{2}, |\theta| \neq \frac{\pi}{2}$ ^[3].

由假设3、式(14)以及式(20)可得: 在 $t \geq 0$ 时, 存在 $\rho \in \mathbb{R}^+$ 使得 $\varphi_1(t)$ 中的任一元素满足

$$|\varphi_{1i}(t)| \leq \rho |\zeta_1(s_i)|. \quad (22)$$

4 稳定性分析

对于倾转式三旋翼无人机控制系统的稳定性分析可以分为3个通道, 即滚转角通道、俯仰角通道与偏航角通道. 本文以滚转角通道为例, 稳定性分析如下.

由式(13)(15), 得到对应的滚转通道滑模面导数 $\dot{s}_\phi(t)$ 可表示为

$$\dot{s}_\phi = -k_{1\phi} \gamma_\phi(t) \zeta_1(s_\phi) + \varphi_{1\phi}(t) +$$

$$\gamma_\phi(t) \left(v_\phi + \frac{\varphi_{2\phi}(t)}{\gamma_\phi(t)} \right). \quad (23)$$

为了便于后续对稳定性证明过程的表达, 设两个中间变量 $s_1(t), s_2(t)$ 为

$$\begin{cases} s_1 = s_\phi, \\ s_2 = v_\phi + \frac{\varphi_{2\phi}(t)}{\gamma_\phi(t)}, \end{cases} \quad (24)$$

则其对应的导数为

$$\dot{s}_1 = \gamma_\phi(t) \left(-k_{1\phi} \zeta_1(s_1) + \frac{\varphi_{1\phi}(t)}{\gamma_\phi(t)} + s_2 \right), \quad (25)$$

$$\dot{s}_2 = -k_{2\phi} \zeta_2(s_1) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\varphi_{2\phi}(t)}{\gamma_\phi(t)} \right). \quad (26)$$

为简化式(25), 定义

$$\tilde{k}_1 = k_{1\phi} - \frac{\varphi_{1\phi}(t)}{\gamma_\phi(t) \zeta_1(s_1)}, \quad (27)$$

则式(25)可改写为

$$\dot{s}_1 = \gamma_\phi(t) \left(-\tilde{k}_1 \zeta_1(s_1) + s_2 \right). \quad (28)$$

同时, 由式(14)可以得到

$$\zeta_2(s_1) = \zeta_1'(s_1) \zeta_1(s_1), \quad (29)$$

其中 $\zeta_1'(s_1)$ 定义为

$$\zeta_1'(s_1) = \frac{d\zeta_1(s_1)}{ds_1} = \frac{1}{2|s_1|^{\frac{1}{2}}} + \beta. \quad (30)$$

为简化式(26), 定义 $\delta(t)$ 为

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\varphi_{2\phi}(t)}{\gamma_\phi(t)} \right) = \frac{1}{\gamma_\phi} \frac{d\varphi_{2\phi}}{dt} - \frac{\varphi_{2\phi}}{\gamma_\phi^2} \frac{d\gamma_\phi}{dt}. \quad (31)$$

由假设1与假设2可知, 式(31)中的 $\delta(t)$ 有界, 设 $\delta(t)$ 满足条件:

$$|\delta(t)| \leq \bar{\delta}, \quad (32)$$

其中 $\bar{\delta} \in \mathbb{R}^+$. 由式(29)可以将式(26)改写为

$$\dot{s}_2 = \gamma_\phi(t) \zeta_1'(s_1) \left(-\frac{k_{2\phi}}{\gamma_\phi(t)} \zeta_1(s_1) + \frac{\delta(t)}{\gamma_\phi(t) \zeta_1'(s_1)} \right). \quad (33)$$

定理 1 针对式(12)所示的闭环动力学系统, 设计如式(13)所示的控制器, 得到的闭环控制系统全局渐进稳定且姿态误差有限时间收敛, 状态 $s_1(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} s_1(t) = 0$, 故 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

证 选择Lyapunov候选函数 $V(t)$ 为^[24]

$$V = \xi^T P \xi, \quad (34)$$

其中 $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 为一对称正定矩阵, 定义为^[19]

$$P = \begin{bmatrix} 4\lambda + \varepsilon^2 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$\lambda \in \mathbb{R}^+, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ 为正常数; $\xi(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ 定义为

$$\xi^T = [\zeta_1 \ s_2]. \quad (36)$$

对Lyapunov候选函数 $V(t)$ 求导可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \xi^T P \xi + \xi^T P \dot{\xi} = \\ & 2\gamma_\phi(t)\zeta_1'(s_1)((-4\tilde{k}_1\lambda - \varepsilon^2\tilde{k}_1 + \frac{\varepsilon k_{2\phi}}{\gamma_\phi(t)}) \cdot \\ & \zeta_1^2(s_1) + (4\lambda + \varepsilon\tilde{k}_1 + \varepsilon^2 - \frac{k_{2\phi}}{\gamma_\phi(t)})\zeta_1(s_1)s_2 - \\ & \varepsilon s_2^2 + \frac{\delta(t)}{\gamma_\phi(t)\zeta_1'(s_1)}s_2 - \frac{\varepsilon\delta(t)}{\gamma_\phi(t)\zeta_1'(s_1)}\zeta_1(s_1)). \end{aligned} \quad (37)$$

由式(29), 式(37)可进一步写为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\gamma_\phi(t)\zeta_1'(s_1)((-4\tilde{k}_1\lambda - \varepsilon^2\tilde{k}_1 + \frac{\varepsilon k_{2\phi}}{\gamma_\phi(t)} - \\ & \frac{\varepsilon\delta(t)}{\gamma_\phi(t)\zeta_2(s_1)})\zeta_1^2(s_1) + (4\lambda + \varepsilon\tilde{k}_1 + \varepsilon^2 - \\ & \frac{k_{2\phi}}{\gamma_\phi(t)} + \frac{\delta(t)}{\gamma_\phi(t)\zeta_2(s_1)})\zeta_1(s_1)s_2 - \varepsilon s_2^2). \end{aligned} \quad (38)$$

为简化式(38), 定义 \tilde{k}_2 :

$$\tilde{k}_2 = \frac{1}{\gamma_\phi(t)}(k_{2\phi} - \frac{\delta(t)}{\zeta_2(s_1)}), \quad (39)$$

从而可以将式(38)写为

$$\dot{V}(t) = -2\gamma_\phi(t)\zeta_1'(s_1)\xi^T Q(t)\xi, \quad (40)$$

其中定义 $Q(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$Q(t) = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

在式(41)中, $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$ 及 $q_4(t)$ 的定义如下:

$$\begin{cases} q_1 = p_1\tilde{k}_1 - \varepsilon\tilde{k}_2, \\ q_2 = \frac{1}{2}(\tilde{k}_2 - \varepsilon\tilde{k}_1 - p_1), \\ q_3 = \frac{1}{2}(\tilde{k}_2 - \varepsilon\tilde{k}_1 - p_1), \\ q_4 = \varepsilon, \end{cases} \quad (42)$$

其中 p_1 的定义为 $p_1 = 4\lambda + \varepsilon^2$. 为使得矩阵 $Q(t)$ 正定, 需要满足下列条件:

$$\det(Q(t)) > 0, \quad (43)$$

$\det(Q(t))$ 可以表示为

$$\det(Q(t)) = a_{p_1}p_1^2 + b_{p_1}p_1 + c_{p_1}. \quad (44)$$

式(44)中 a_{p_1}, b_{p_1} 及 c_{p_1} 的定义如下:

$$\begin{cases} a_{p_1} = -\frac{1}{4}, \\ b_{p_1} = \frac{1}{2}(\varepsilon\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2), \\ c_{p_1} = -\frac{1}{4}(\varepsilon\tilde{k}_1 - \tilde{k}_2)^2 - \varepsilon^2\tilde{k}_2. \end{cases} \quad (45)$$

由式(44)–(45)可知函数 $\det(Q(t))$ 为一条开口向下的抛物线, 为保证 $\det(Q(t)) > 0$, 函数 $\det(Q(t))$ 需要满

足 $\Delta_{p_1} > 0$ 且自变量 p_1 的取值在一定范围内. 对式(44)进行分析可知

$$\Delta_{p_1} = b_{p_1}^2 - 4a_{p_1}c_{p_1} = \varepsilon\tilde{k}_2(\tilde{k}_1 - \varepsilon). \quad (46)$$

由式(18)与式(22)可以得到

$$\left| \frac{\varphi_{1\phi}(t)}{\gamma_\phi(t)\zeta_1(s_1)} \right| \leq \frac{\rho}{\gamma_\phi(t)} \frac{|\zeta_1(s_1)|}{\zeta_1(s_1)} \leq \frac{\rho}{k_m}. \quad (47)$$

则由式(27)(47)(32)(39)得到 \tilde{k}_1 与 \tilde{k}_2 的取值范围为

$$\tilde{k}_1 \in [\underline{k}_1, \bar{k}_1] = [k_{1\phi} - \frac{\rho}{k_m}, k_{1\phi} + \frac{\rho}{k_m}], \quad (48)$$

$$\tilde{k}_2 \in [\underline{k}_2, \bar{k}_2] = [\frac{1}{k_M}(k_{2\phi} - 2\bar{\delta}), \frac{1}{k_m}(k_{2\phi} + 2\bar{\delta})]. \quad (49)$$

由此得到 $k_{1\phi}, k_{2\phi}$ 的取值满足

$$k_{1\phi} > \varepsilon + \frac{\rho}{k_m}, \quad (50)$$

$$k_{2\phi} > 2\bar{\delta} \quad (51)$$

时方程 $\det(Q(t)) = 0$ 有解, 且方程的解为

$$p_1^+ = (\varepsilon\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2) + 2\sqrt{\varepsilon\tilde{k}_2(\tilde{k}_1 - \varepsilon)}, \quad (52)$$

$$p_1^- = (\varepsilon\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2) - 2\sqrt{\varepsilon\tilde{k}_2(\tilde{k}_1 - \varepsilon)}. \quad (53)$$

故 p_1 满足 $p_1 \in (p_{1\max}^-, p_{1\min}^+)$ 时, $\det(Q(t)) > 0$, 其中 $p_{1\max}^-, p_{1\min}^+$ 为

$$p_{1\max}^- = \varepsilon\bar{k}_1 + \bar{k}_2 - 2\sqrt{\varepsilon k_2(\bar{k}_1 - \varepsilon)}, \quad (54)$$

$$p_{1\min}^+ = \varepsilon\underline{k}_1 + \underline{k}_2 + 2\sqrt{\varepsilon k_2(\underline{k}_1 - \varepsilon)}. \quad (55)$$

为了防止 p_1 为空集, $p_{1\max}^-, p_{1\min}^+$ 还需要满足下列条件 $p_{1\min}^+ > p_{1\max}^-$, 即

$$\begin{aligned} \varepsilon\underline{k}_1 + \underline{k}_2 + 2\sqrt{\varepsilon k_2(\underline{k}_1 - \varepsilon)} > \\ \varepsilon\bar{k}_1 + \bar{k}_2 - 2\sqrt{\varepsilon k_2(\bar{k}_1 - \varepsilon)}. \end{aligned} \quad (56)$$

为了便于式(56)进行分析, 设中间变量 χ 为

$$\chi^2 = \underline{k}_2, \quad (57)$$

则式(56)可以化简为

$$\begin{aligned} (1 - \frac{k_M}{k_m})\chi^2 + 4\sqrt{\varepsilon(k_{1\phi} - \frac{\rho}{k_m} - \varepsilon)}\chi - \\ \frac{1}{k_m}(2\varepsilon\rho + 4\bar{\delta}) > 0. \end{aligned} \quad (58)$$

式(58)为关于 χ 的一元二次不等式方程, 定义 a_χ, b_χ, c_χ 为

$$\begin{cases} a_\chi = 1 - \frac{k_M}{k_m}, \\ b_\chi = 4\sqrt{\varepsilon(k_{1\phi} - \frac{\rho}{k_m} - \varepsilon)}, \\ c_\chi = -\frac{1}{k_m}(2\varepsilon\rho + 4\bar{\delta}). \end{cases} \quad (59)$$

则式(58)简化为

$$a_\chi \chi^2 + b_\chi \chi + c_\chi > 0. \quad (60)$$

为使得式(60)成立, 需满足条件 $\Delta_\chi \geq 0$ 且 χ 在一定范围内可得

$$k_{1\phi} \geq \frac{1}{4\varepsilon k_m} (2\varepsilon\alpha + 4\bar{\delta}) \left(\frac{k_M}{k_m} - 1 \right) + \frac{\alpha}{k_m} + \varepsilon, \quad (61)$$

结合式(50)可得: 当 $k_{1\phi}$ 满足式(61)时, $\Delta_\chi \geq 0$, 方程

$$a_\chi \chi^2 + b_\chi \chi + c_\chi = 0$$

有解, 且其对应的解为

$$\chi = -\frac{2}{a_\chi} \sqrt{\varepsilon(k_{1\phi} - \frac{\rho}{k_m} - \varepsilon)} \pm \frac{\sqrt{\Delta_\chi}}{2a_\chi}. \quad (62)$$

因此由式(57)与式(62)得到 k_2 的取值范围为

$$\begin{aligned} & \left(k_M \left(-\frac{2}{a_\chi} \sqrt{\varepsilon(k_{1\phi} - \frac{\rho}{k_m} - \varepsilon)} + \frac{\sqrt{\Delta_\chi}}{2a_\chi} \right)^2 + 2\bar{\delta}, \right. \\ & \left. k_M \left(-\frac{2}{a_\chi} \sqrt{\varepsilon(k_{1\phi} - \frac{\rho}{k_m} - \varepsilon)} - \frac{\sqrt{\Delta_\chi}}{2a_\chi} \right)^2 + 2\bar{\delta} \right). \end{aligned} \quad (63)$$

由上可知, 若 $k_{1\phi}, k_{2\phi}$ 取值满足下列条件:

$$k_{1\phi} \geq \frac{1}{4\varepsilon k_m} (2\varepsilon\rho + 4\bar{\delta}) \left(\frac{k_M}{k_m} - 1 \right) + \frac{\rho}{k_m} + \varepsilon,$$

$$k_{2\phi} \in (k_{2\phi \min}, k_{2\phi \max}),$$

则 $p_{1 \min}^+ > p_{1 \max}^-$. 其中, 变量 $k_{2\phi \min}, k_{2\phi \max}, \Delta_\chi, a_\chi, d_\chi$ 的定义分别为

$$\begin{cases} k_{2\phi \min} = k_M \left(-\frac{2}{a_{K_2}} \sqrt{\varepsilon d_\chi} + \frac{\sqrt{\Delta_\chi}}{2a_\chi} \right)^2 + 2\bar{\delta}, \\ k_{2\phi \max} = k_M \left(-\frac{2}{a_{K_2}} \sqrt{\varepsilon d_\chi} - \frac{\sqrt{\Delta_\chi}}{2a_\chi} \right)^2 + 2\bar{\delta}, \\ \Delta_\chi = 16\varepsilon d_\chi + \frac{4}{k_m} a_\chi (2\varepsilon\rho + 4\bar{\delta}), \\ a_\chi = 1 - \frac{k_M}{k_m}, \\ d_\chi = k_{1\phi} - \frac{\rho}{k_m} - \varepsilon, \end{cases}$$

即函数 $\det(Q(t)) > 0$ 的解 $p_1 \in (p_{1 \max}^-, p_{1 \min}^+)$ 非空, 矩阵 $Q(t)$ 正定, Lyapunov 候选函数的导数 $\dot{V}(t)$ 为负定, 此时状态向量 $\xi(t)$ 与 $\dot{\xi}(t)$ 满足 $\xi(t) \in \mathcal{L}_2, \dot{\xi}(t) \in \mathcal{L}_\infty$, 由Barbalat引理可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} s_1 = 0,$$

故 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}(t) = 0$. 因此闭环系统渐进稳定, 跟踪误差 $e(t)$ 及其导数 $\dot{e}(t)$ 渐进收敛于0, 稳定性证明完成. 证毕.

为进行闭环系统有限时间稳定的证明, 进行如下的分析. 定义矩阵 P 的最小特征值与最大特征值分别为 $\lambda_{\min}\{P\}$ 与 $\lambda_{\max}\{P\}$. 则由式(34)可得不等式

$$\lambda_{\min}\{P\} \|\xi\|_2^2 \leq \xi^T P \xi \leq \lambda_{\max}\{P\} \|\xi\|_2^2, \quad (64)$$

且 $\|\xi\|_2^2$ 可以表示为

$$\|\xi\|_2^2 = \zeta_1^2 + s_2^2 = |s_1| + 2\beta|s_1|^{\frac{3}{2}} + \beta^2 s_1^2 + s_2^2, \quad (65)$$

其中 ξ 的欧式范数又满足不等式

$$|s_1|^{\frac{1}{2}} \leq \|\xi\|_2 \leq \frac{V^{\frac{1}{2}}(s_1, s_2)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{P\}}. \quad (66)$$

根据前面的分析可知 $Q(t)$ 为正定矩阵, 且其元素均有界, 将 $Q(t)$ 的最小特征值用 $\lambda_{\min}\{Q\}$ 表示. 因此, 式(40)可以写为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -2\gamma_\phi(t) \zeta_1'(s_1) \xi^T Q(t) \xi \leq \\ & -\mu_1 V^{\frac{1}{2}}(s_1, s_2) - \mu_2 V(s_1, s_2), \end{aligned} \quad (67)$$

其中定义 $\mu_1(t), \mu_2(t)$ 为

$$\mu_1 = \frac{\lambda_{\min}\{Q\} k_m \varepsilon \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{P\}}{\lambda_{\max}\{P\}}, \quad (68)$$

$$\mu_2 = \beta_\phi \frac{2\lambda_{\min}\{Q\} k_m \varepsilon}{\lambda_{\max}\{P\}}, \quad (69)$$

可得 μ_1, μ_2 满足 $\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0$.

由比较引理, 定义函数 v 及其导数 \dot{v} 为

$$\begin{cases} \dot{v} = -\mu_1 v^{\frac{1}{2}}(s_1, s_2) - \mu_2 v(s_1, s_2), \\ v(0) = v_0 \geq 0. \end{cases} \quad (70)$$

式(70)为微分方程, 其对应的解为

$$v(t) = \exp(-\mu_2 t) \left(v_0^{\frac{1}{2}} + \frac{\mu_1}{\mu_2} (1 - \exp(\frac{\mu_2}{2} t)) \right)^2.$$

设 $V(t)$ 的初始值 $V(s_1(0), s_2(0))$ 满足

$$V(s_1(0), s_2(0)) \leq v_0. \quad (71)$$

从而得到 $V(t)$ 始终满足 $V(t) \leq v(t)$. 综上所述, 可以得到闭环控制系统在有限时间内渐进稳定, 且姿态角误差收敛至0, 相应的收敛时间为

$$T = \frac{2}{\mu_2} \ln \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} V^{\frac{1}{2}}(s_1(0), s_2(0)) + 1 \right). \quad (72)$$

俯仰角与偏航角通道的稳定性证明及有限时间收敛证明与滚转角通道证明过程相同, 因此, 在控制器(13)作用下, 可实现无人机的姿态跟踪误差在有限时间内收敛至0.

5 飞行控制实验

5.1 实验平台介绍

为了更好的验证文中设计控制算法的控制效果与鲁棒性能, 本文通过课题组自主设计并搭建的倾转式三旋翼无人机实验平台, 进行了实时镇定以及抗扰飞行实验. 实验平台如图2所示, 该实验平台主要利用 MATLAB RTW 工具箱作为实时控制软件, 将倾转式三旋翼无人机固定在阻尼较小的万向球上, 通过课题组自主设计的飞控板上所携带的惯性测量单元与陀螺仪传感器获取无人机的姿态角以及各个通道的加速度信息. 实验平台测量俯仰角和滚转角的测量精度

为 0.1° , 偏航角的测量精度为 1° .

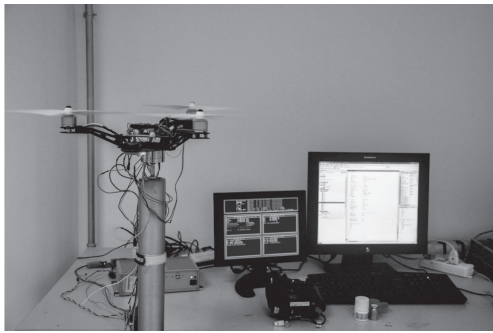


图2 倾转式三旋翼无人机实验平台

Fig. 2 Test bed of tilt tri-rotor UAV

5.2 飞行控制实验验证

本章实验中采用的实验参数值如表1所示.

表1 实验参数

Table 1 experiment parameters

增益名称	增益值	增益名称	增益值	增益名称	增益值
k_{11}	0.3	k_{21}	0.005	β_1	0.3
k_{12}	0.3	k_{22}	0.005	β_2	0.45
k_{13}	0.35	k_{23}	0.002	β_3	0.5
Γ_1	0.1	Λ_1	25	l_1	0.06 m
Γ_2	0.3	Λ_2	32	l_2	0.14 m
Γ_3	0.05	Λ_3	25	l_3	0.19 m

5.2.1 镇定飞行实验

在无外界干扰的情况下, 利用非线性鲁棒算法控制倾转式三旋翼无人机镇定飞行的姿态角信息如图3所示.

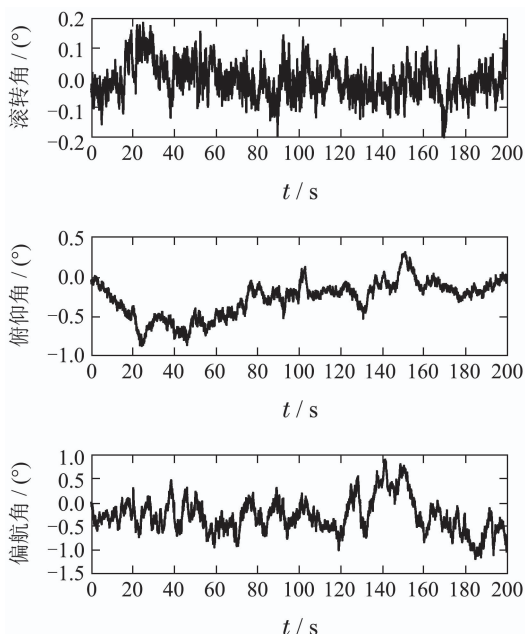


图3 鲁棒控制器: 镇定飞行姿态角变化曲线

Fig. 3 Robust controller: Attitude in stable flight

由图3可知, 非线性鲁棒控制算法在倾转式三旋翼无人机的镇定飞行过程中, 可以将其滚转角误差控制在 0.2° 以内, 俯仰角误差控制在 0.3° 以内, 偏航角误差控制在 1° 以内, 控制效果良好. 对应的控制输入如图4所示.

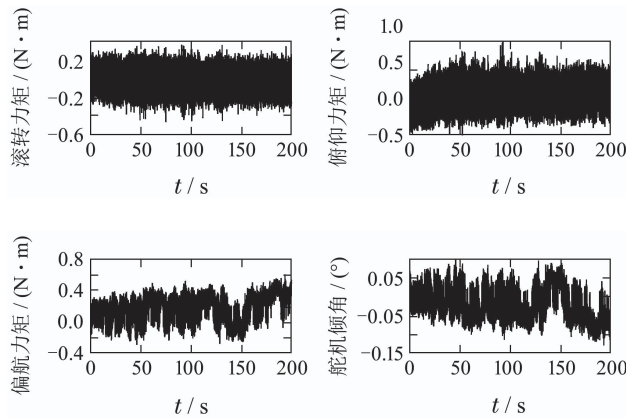


图4 鲁棒控制器: 镇定飞行控制输入变化曲线

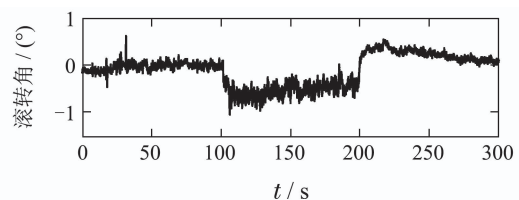
Fig. 4 Robust controller: Controller input in stable flight

为了更好的验证本文所设计控制算法的鲁棒性, 在倾转式三旋翼无人机镇定飞行的基础上, 人为的增加外界扰动或改变三旋翼无人机体参数, 观察三旋翼无人机的在外界扰动与参数不确定影响下的控制效果. 本文所设计的鲁棒性测试实验主要分为两部分:

- 1) 外界扰动影响下的倾转式三旋翼无人机镇定实验, 即利用风扇产生风力扰动, 观察三旋翼无人机在风力扰动下姿态通道的控制效果;
- 2) 参数不确定影响下的倾转式三旋翼无人机镇定实验, 即改变机体未知的转动惯量, 产生三旋翼机体参数变化, 观察三旋翼无人机在转动惯量变化影响下的姿态通道控制效果.

5.2.2 风扰下飞行实验

首先, 利用文中所设计的非线性鲁棒控制器控制三旋翼无人机在无外界扰动的情况下稳定飞行100 s, 然后利用风扇从其右后侧添加风力扰动, 在200 s时停止风扰, 恢复到镇定飞行状态, 在飞行300 s后停止飞行实验. 其中由风扇产生的风速在一定范围内随机变化: ω_1 处对应的风速为 $2.1\sim 2.6$ m/s; ω_2 处对应的风速为 $3.4\sim 4.1$ m/s; ω_3 处对应的风速为 $2.4\sim 3.5$ m/s; 质心处对应风速为 $2.5\sim 3.2$ m/s. 基于上述强度的风力扰动, 倾转式三旋翼无人机的姿态变化曲线如图5所示.



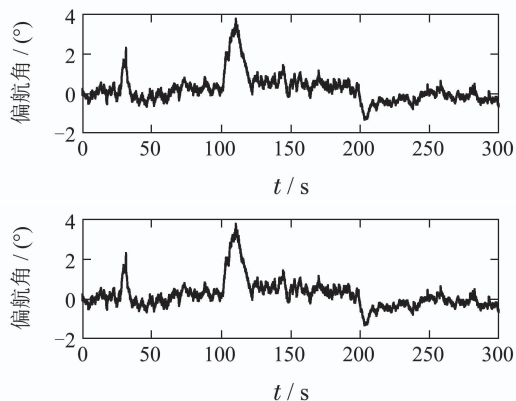


图5 鲁棒控制器: 持续风扰时姿态变化曲线

Fig. 5 Robust controller: Attitude in wind disturbance

由图5可知, 在外界有较大的风力扰动情况下, 非线性鲁棒控制算法仍然能将三旋翼无人机的滚转、俯仰角误差控制在 1° 以内, 而偏航通道除了加扰动的瞬间有较大的超调, 非线性鲁棒控制算法仍很快能将偏航角误差控制在 1° 以内, 控制效果良好. 其中对应的控制输入如图6所示.

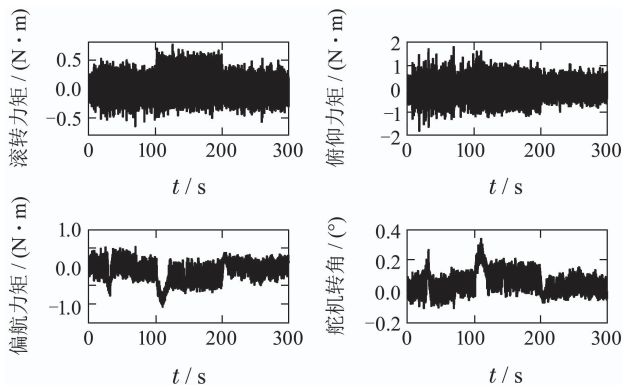


图6 鲁棒控制器: 持续风扰时控制输入变化曲线

Fig. 6 Robust controller: Controller input in wind disturbance

5.2.3 转动惯量变化下飞行控制实验

为了验证本文算法在控制器增益未知且机体参数发生变化时对三旋翼无人机姿态通道的控制效果, 本节将通过人为改变实验条件来改变三旋翼无人机的机体参数. 由式(16)可知, 未知的控制输入系数 $\gamma(t)$ 与未知的机体转动惯量相关, 故可通过增加负载来改变三旋翼无人机的转动惯量, 从而改变控制器增益. 本次实验中, 以在3号机臂上绑上100 g的砝码来改变三旋翼无人机的转动惯量为例, 观察非线性鲁棒控制器在未知控制器增益变化下对三旋翼无人机姿态角的控制效果. 倾转式三旋翼无人机在转动惯量改变影响下的姿态变化曲线如图7所示. 由图7可知, 在3号机臂绑有100 g砝码的情况下, 三旋翼无人机仍能滚转角误差控制在 0.2° 以内, 俯仰角误差控制在 1° 以内, 偏航角通道误差控制在 1° 以内, 姿态控制效果良好. 其对应的控制输入如图8所示.

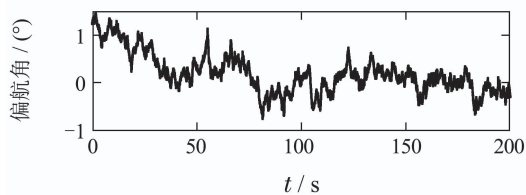
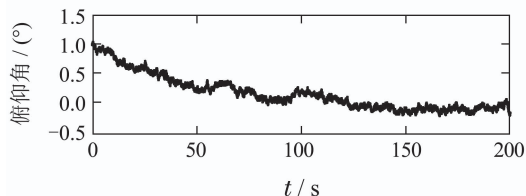
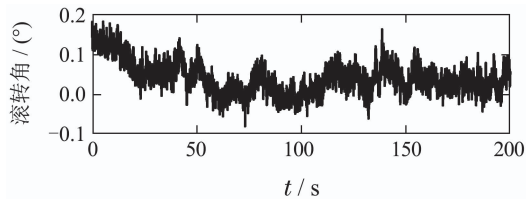


图7 鲁棒控制器: 转动惯量改变下姿态变化曲线

Fig. 7 Robust controller: Attitude in inertia changed

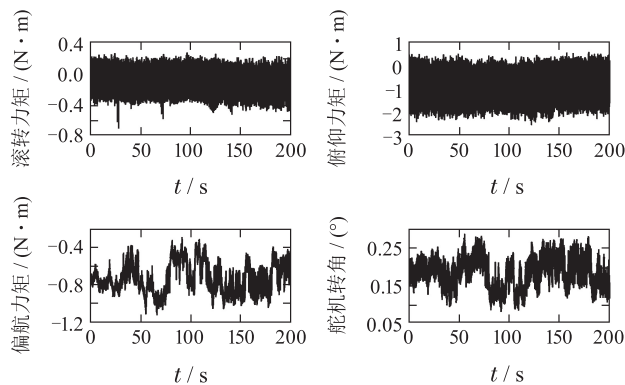


图8 鲁棒控制器: 转动惯量改变下控制输入曲线

Fig. 8 Robust controller: Controller input in inertia changed

5.3 对比实验

为了突出文中非线性鲁棒算法的鲁棒性, 本节在相同的外界扰动以及参数变化条件下, 利用PID控制算法与文中设计的控制算法进行了对比试验. 对比试验同样分为两组, 一组为外界扰动下的三旋翼无人机镇定飞行实验, 一组为机体参数改变影响下的三旋翼无人机镇定飞行实验.

5.3.1 PID风扰对比实验

实验条件与非线性鲁棒控制算法的风扰实验相同, 首先将三旋翼无人机在无扰动的条件下镇定飞行100 s, 验证PID控制器的有效性, 然后通过风扇在其右后侧添加风力扰动, 在200 s时停止风扰, 恢复镇定飞行状态. 由风扇产生的风速同样在一定范围内随机变化, 具体风速见鲁棒控制器实验部分. 在PID控制器控制作用下的倾转式三旋翼无人机的姿态变化曲线如图9所示. 由图9可知, PID控制器在无外界干扰的情况下,

能够保持对三旋翼无人机姿态的有效控制, 滚转与俯仰通道误差均能保持在 1° 以内, 偏航通道误差保持在 2° 以内; 但是在有较大的风力扰动下, PID控制器虽能将三旋翼无人机控制在平衡点附近不分散, 但滚转、俯仰角误差始终在 2° 左右, 偏航通道误差始终在 4° 左右. PID控制器不能有效的克服外界的风扰消除误差, 控制性能较差. 对应的控制输入如图10所示.

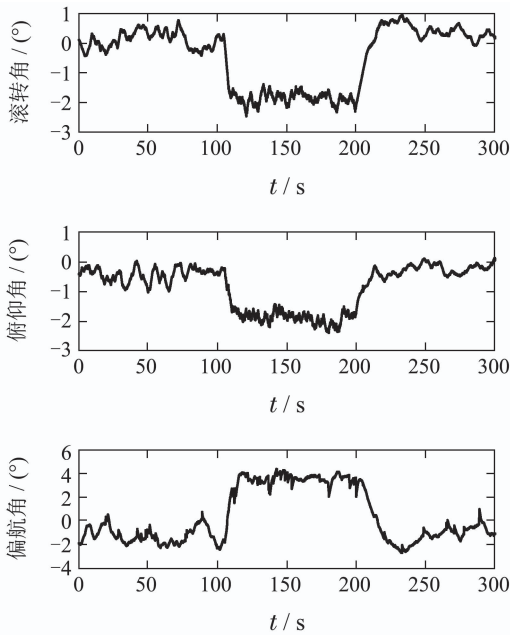


图9 PID: 持续风扰时姿态变化曲线

Fig. 9 PID controller: Attitude in wind disturbance

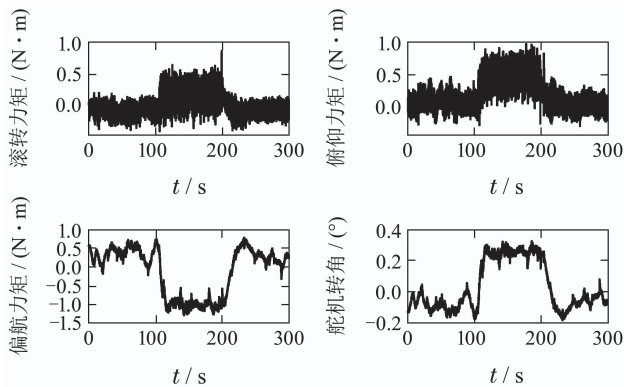


图10 PID: 持续风扰时控制输入变化曲线

Fig. 10 PID controller: Controller input in wind disturbance

PID对比实验组与本文非线性鲁棒控制算法抗风力扰动实验误差数据分析如表2所示. 从表中可得非线性鲁棒控制器显著的提高了三旋翼无人机在较强的风力扰动下的姿态控制效果, 相比PID控制方法, 姿态的控制误差均降低了50%以上.

5.3.2 PID算法转动惯量变化影响对比实验

与非线性鲁棒控制算法的转动惯量变化下飞行控制实验条件相同, 在三旋翼无人机3号机臂上绑上100 g

的砝码以改变转动惯量与对应的控制器增益. 在有未知参数变化影响与PID控制器作用下的三旋翼无人机的姿态变化曲线如图11所示. 由图11可知, 在3号机臂绑有100 g砝码的情况下, 三旋翼无人机稳定飞行一段时间后, PID控制器能将三旋翼无人机的滚转角误差控制在 1° 以内, 俯仰角误差控制在 2° 以内, 偏航角通道误差控制在 4° 以内, 控制效果较差, 误差偏大. 其对应的控制输入如图12所示.

表2 抗风力扰动实验误差数据分析

Table 2 Analysis of wind disturbance experiment

控制器	非线性鲁棒控制器	PID控制器
$\phi(t)$ 最大误差/ $^\circ$	1.05	2.47
$\phi(t)$ 均方根误差/ $^\circ$	0.35	1.11
$\theta(t)$ 最大误差/ $^\circ$	1.34	2.40
$\theta(t)$ 均方根误差/ $^\circ$	0.24	1.11
$\psi(t)$ 最大误差/ $^\circ$	3.78	4.39
$\psi(t)$ 均方根误差/ $^\circ$	0.73	2.33

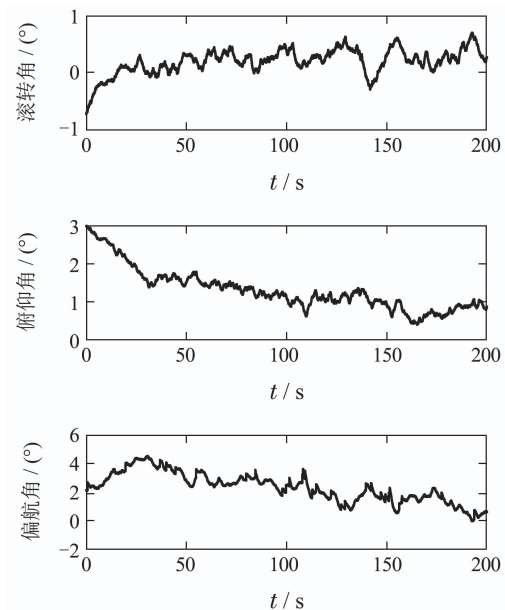


图11 PID: 转动惯量改变下姿态变化曲线

Fig. 11 PID controller: Attitude in inertia changed

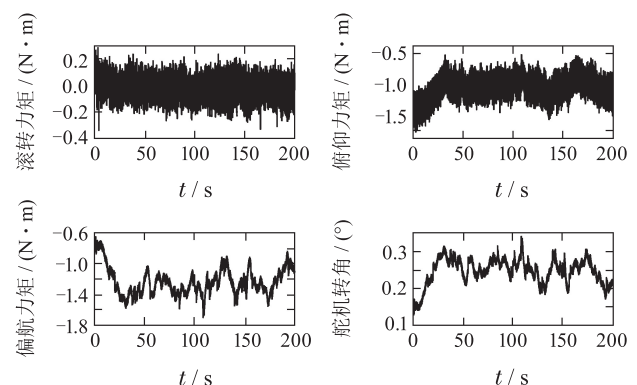


图12 PID: 转动惯量改变下控制输入变化曲线

Fig. 12 PID controller: Controller input in inertia changed

在三旋翼机体转动惯量发生变化的情况下, PID控制算法与本文设计的非线性鲁棒控制算法在未知转动惯量变化影响下的实验误差数据分析如表3所示。从表中可得非线性鲁棒控制器显著地提高了三旋翼无人机在较强的转动惯量变化下的控制效果, 相比PID控制方法, 姿态的控制误差均降低了50%以上。本文设计的非线性鲁棒控制算法在较大的未知参数变化影响下表现出较好的控制效果和鲁棒性能。

表3 抗转动惯量变化实验误差数据分析
Table 3 Analysis of inertia change experiment

控制器	非线性鲁棒控制器	PID控制器
$\phi(t)$ 最大误差/ $^\circ$	0.18	0.73
$\phi(t)$ 均方根误差/ $^\circ$	0.06	0.30
$\theta(t)$ 最大误差/ $^\circ$	1.04	3.00
$\theta(t)$ 均方根误差/ $^\circ$	0.34	1.41
$\psi(t)$ 最大误差/ $^\circ$	1.49	4.59
$\psi(t)$ 均方根误差/ $^\circ$	0.46	2.58

综上所述, 在倾转式三旋翼无人机机体转动惯量未知且存在有外界扰动的情况下, 本文所设计的非线性鲁棒控制器能够将无人机的姿态误差有效的控制在较小的范围内, 相比于PID的控制, 有更好的鲁棒性能与更好的控制效果。

6 结论

本文针对倾转式三旋翼无人机姿态系统存在未知扰动力矩与未知时变转动惯量的问题, 提出了一种基于Super-Twisting滑模控制算法的非线性鲁棒控制器。该方法可以对存在未知外界扰动力矩, 且控制器控制增益未知时的倾转式三旋翼无人机姿态系统有很好的控制作用, 并利用基于Lyapunov稳定性的分析方法对系统的稳定性进行了分析, 证明了倾转式三旋翼无人机姿态误差可以在有限时间收敛至0, 并求出了对应的收敛时间。最后利用倾转式三旋翼无人机实验平台对该控制算法进行了实时的飞行控制实验, 实验验证了控制算法在较强的风力扰动下以及无人机自身未知的转动惯量变化情况下有较好的鲁棒性, 可将倾转式三旋翼无人机的姿态控制在良好的范围内。

参考文献:

- [1] FANG Yongchun, SHEN Hui, SUN Xiuyun, et al. Active disturbance rejection control for heading of unmanned helicopter. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(2): 238 – 243. (方勇纯, 申辉, 孙秀云, 等. 无人直升机航向自抗扰控制. 控制理论与应用, 2014, 31(2): 238 – 243.)
- [2] XIAN Bin, GU Xun, LIU Xiang, et al. Nonlinear robust attitude control for a miniature unmanned helicopter. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(4): 409 – 416. (鲜斌, 古训, 刘祥, 等. 小型无人直升机姿态非线性鲁棒控制设计. 控制理论与应用, 2014, 31(4): 409 – 416.)
- [3] SUN Xiuyun, FANG Yongchun, SUN Ning. Backstepping-based adaptive attitude and height control of a small-scale unmanned helicopter. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(3): 381 – 388. (孙秀云, 方勇纯, 孙宁. 小型无人直升机的姿态与高度自适应反步控制. 控制理论与应用, 2012, 29(3): 381 – 388.)
- [4] ESCARENO J, SANCHEZ A, GARCIA O, et al. Triple tilting rotor mini-uav: Modeling and embedded control of the attitude. *American Control Conference*. Seattle: IEEE, 2008: 3476 – 3481.
- [5] CHEN Z, PENG Z, ZHANG F. Attitude control of coaxial tri-rotor uav based on linear extended state observer. *Control and Decision Conference*. Changsha, Chinese: IEEE, 2014: 4204 – 4209.
- [6] SALAZAR-CRUZ S, LOZANO R. Stabilization and nonlinear control for a novel trirotor mini-aircraft. *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Barcelona: IEEE, 2005: 2612 – 2617.
- [7] AN C, ZHANG D, Zhang J, et al. A new structural configuration of tilting rotor unmanned aerial vehicle modeling. *Control Conference*. Chengdu, Chinese: IEEE, 2016: 2120 – 2125.
- [8] HE Yuebang, PEI Hailong, ZHOU Hongbo, et al. Adaptive backstepping-based robust tracking control of unmanned helicopters with disturbances. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(7): 834 – 843. (贺跃帮, 裴海龙, 周洪波, 等. 干扰下的无人直升机自适应反步法鲁棒跟踪控制. 控制理论与应用, 2013, 30(7): 834 – 843.)
- [9] SALAZAR-CRUZ S, KENDOU F, LOZANO R, et al. Real-time control of a small-scale helicopter having three rotors. *International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Beijing: IEEE, 2006: 2924 – 2929.
- [10] SALAZAR-CRUZ S, KENDOU F, LOZANO R, et al. Real-time stabilization of a small three-rotor aircraft. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2008, 44(2): 783 – 794.
- [11] RYS A, CZYBA R, SZAFRANSKI G. Development of control system for an unmanned single tilt tri-rotor aerial vehicle. *International Conference on Unmanned Aircraft Systems*. Orlando: IEEE, 2014: 1091 – 1098.
- [12] FAROOQI M A A, MALIK F M, ANWAR J, et al. Sampled data output feedback control of tri rotor unmanned aerial vehicle. *Science International*, 2016, 28(1): 111 – 117.
- [13] SERVAIS E, D'ANDREA-NOVEL B, MOUNIER H. Ground control of a hybrid tri-copter. *International Conference on Unmanned Aircraft Systems*. Denver: IEEE, 2015: 940 – 950.
- [14] MAN Z, PAPLINSKI A, WU H. A robust MIMO terminal sliding mode control scheme for rigid robotic manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(12): 2464 – 2469.
- [15] YU X, MAN Z. Fast terminal sliding-mode control design for nonlinear dynamical systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2002, 49(2): 261 – 264.
- [16] LIAO Weizhong, ZONG Qun, MA Yali. Modeling and finite-time control for quad-rotor mini unmanned aerial vehicles. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(10): 1343 – 1350. (廖卫中, 宗群, 马亚丽. 小型四旋翼无人机建模与有限时间控制. 控制理论与应用, 2015, 32(10): 1343 – 1350.)
- [17] DERAFA L, BENALLEGUE A, FRIDMAN L. Super twisting control algorithm for the attitude tracking of a four rotors UAV. *Journal of the Franklin Institute*, 2012, 349(2): 685 – 699.
- [18] ZHENG G, XIAN B. Nonlinear robust control of a quadrotor helicopter with finite time convergence. *Control Theory and Technology*, 2018, 16(2): 133 – 144.
- [19] SHTESSEL Y, TALEB M, PLESTAN F. A novel adaptive-gain super-twisting sliding mode controller: Methodology and application. *Automatica*, 2012, 48(5): 759 – 769.

- [20] MORENO J A. A linear framework for the robust stability analysis of a generalized super-twisting algorithm. *International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control*. Toluca: IEEE, 2009: 1 – 6.
- [21] JIN Xin, XIAN Bin. Nonlinear robust control of a tilt tripple-rotor unmanned aerial vehicle with experimental verification. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(10): 1303 – 1310.
(金鑫, 鲜斌. 倾转式三旋翼无人机非线性鲁棒控制设计与实验验证. *控制理论与应用*, 2017, 34(10): 1303 – 1310.)
- [22] HAMEL T, MAHONY R, LOZANO R, et al. Dynamic modelling and configuration stabilization for an x4-flyer. *IFAC Proceedings Volumes*, 2002, 35(1): 217 – 222.
- [23] HOFFMANN G, HUANG H, WASLANDER S, et al. Quadrotor helicopter flight dynamics and control: Theory and experiment. *Guidance, Navigation, and Control Conference*. Hilton Head: AIAA, 2007: 1 – 20.
- [24] CASTILLO I, FRIDMAN L, MORENO J A. Super-Twisting algorithm in presence of time and state dependent perturbations. *International Journal of Control*, 2018, 91(11): 1 – 14.
- [25] GONZALEZ T, MORENO J A, FRIDMAN L. Variable gain Super-Twisting sliding mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(8): 2100 – 2105.

作者简介:

王征宇 硕士研究生, 目前研究方向为倾转式三旋翼无人机的非线性控制, E-mail: wzycloud@tju.edu.cn;

鲜斌 教授, 博士生导师, 主要研究方向为非线性系统控制、无人机系统、实时控制系统等, E-mail: xbin@tju.edu.cn.