

# 线性/非线性切换扩张状态观测器

陈志翔, 高钦和<sup>†</sup>

(火箭军工程大学 二系, 陕西 西安 710025)

**摘要:** 为了解决非线性扩张状态观测器(NLESO)对大幅度扰动估计能力有限的问题, 本文提出一种线性/非线性切换扩张状态观测器. 首先分析了非线性扩张状态观测器对大幅度扰动估计能力有限的原因, 然后提出在NLESO的非线性区间引入一段线性扩张状态观测器(LESO)弥补NLESO的缺陷, 其次从理论上证明了提出的线性/非线性切换扩张状态观测器的收敛性. 最后, 通过数值仿真验证了提出的线性/非线性切换扩张状态观测器的可行性.

**关键词:** 自抗扰控制; 扩张状态观测器; 非线性系统

**引用格式:** 陈志翔, 高钦和. 线性/非线性切换扩张状态观测器. 控制理论与应用, 2019, 36(6): 902 – 908

DOI: 10.7641/CTA.2018.80078

## Linear/nonlinear switching extended state observer

CHEN Zhi-xiang, GAO Qin-he<sup>†</sup>

(The 2nd Department, The Rocket Force University of Engineering, Xi'an Shaanxi 710025, China)

**Abstract:** In order to solve the problem that nonlinear extended state observer is limited to large amplitude perturbation estimation, we propose a linear/nonlinear switching extended state observer (L/NL-SESO). Firstly, we analyze the reasons for the limited ability of the nonlinear extended state observer to the large amplitude disturbance estimation. Then a linear extended state observer is introduced in nonlinear intervals of nonlinear extended state observers. Thirdly, the convergence of the proposed L/NL-SESO is proved theoretically. Finally, numerical simulation results verify the feasibility of the proposed L/NL-SESO.

**Key words:** active disturbance rejection control; extended state observer; nonlinear systems

**Citation:** CHEN Zhixiang, GAO Qinhe. Linear/nonlinear switching extended state observer. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(6): 902 – 908

## 1 引言

自抗扰控制技术(active disturbance rejection control, ADRC)是一种几乎不依靠数学模型来处理非线性, 大不确定性和外部扰动的控制方法<sup>[1]</sup>. ADRC的核心技术是动态补偿线性化, 基本思想是将系统未建模动态和外部扰动定义为总和扰动, 有效地估计该扰动并在闭环反馈中消除该扰动对闭环系统动态特性的影响. 扩张状态观测器(extended state observer, ESO)是实现扰动在线估计和补偿的关键.

近年来, ADRC在理论上取得了许多突破性的进展<sup>[2-7]</sup>, 为非线性自抗扰控制在工程上的应用打下坚实的基础. 薛文超老师在文献[5]中解决了离散时间域自抗扰控制设计的参数调节问题, 给出了系统采样率, ADRC参数, 系统的不确定性和闭环系统性能之间的关系, 这对于工程上设计既满足性能指标要求又切实

可行的自抗扰控制器具有重要的意义. 赵志良老师在文献[6]中解决了韩京清先生提出的非线性扩张状态观测器(nonlinear extended state observer, NLESO)的收敛性问题, 并在文献[7]中将结果推广至含有零动态非匹配干扰的多输入多输出闭环控制系统.

为了进一步提高ADRC的控制性能, 文献[8-9]在分析线性扩张状态观测器(linear switching extended state observer, LADRC)和非线性扩张状态观测器(nonlinear switching extended state observer, NLADRC)各自特点的基础上对两者取长补短, 提出了线性/非线性自抗扰切换控制策略. 借鉴此思想, 为了提高NLESO估计状态和扰动的性能, 本文提出了一种线性/非线性切换扩张状态观测器(linear/nonlinear switching extended state observer, L/NL-SESO). 第2部分分析了NLESO对大幅扰动估计能力有限的缺陷. 在第3部分, 提

收稿日期: 2018-01-24; 录用日期: 2018-07-31.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: gao202@189.cn; Tel.: +86 15353728169 或 13805192436.

本文责任编辑: 夏元清.

国家自然科学基金项目(51475462)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (51475462).

出了在NLESO的非线性区间内引入一段LESO弥补NLESO的缺陷. 第4部分从理论上证明提出的L/NL-SESO的收敛性. 第5部分通过数值仿真验证L/NL-SESO对大幅度扰动的鲁棒性.

### 2 非线性扩张状态观测器的局限

本文讨论的 $n$ 阶系统为

$$\begin{cases} \dot{x}^{(n)}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) + w(t) + bu(t), \\ y(t) = x(t), \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $(x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \in \mathbb{R}^n$  是系统的状态,  $u \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  是控制输入,  $b$  是控制增益,  $y$  是可测量的系统输出,  $f \in C(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$  是已知或未知的系统动态,  $w(t)$  是系统受到的外界干扰.

令  $x_{n+1}(t) = f(\cdot) + w(t)$ , 定义为系统(1)的总和扰动, 则系统(1)可重写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = x_{n+1}(t) + bu(t), \\ \dot{x}_{n+1}(t) = \dot{L}(t), \\ y(t) = x_1(t), \end{cases} \quad (2)$$

式中  $L(t) = f(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) + w(t)$ .

设计的NLESO为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t; r) = \hat{x}_2(t; r) + \frac{k_1}{r^{n-1}} g_1(r^n(x_1(t) - \hat{x}_1(t; r))), \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_n(t; r) = \hat{x}_{n+1}(t; r) + k_n g_n(r^n(x_1(t) - \hat{x}_1(t; r)) + bu(t)), \\ \dot{\hat{x}}_{n+1}(t; r) = rk_{n+1} g_{n+1}(r^n(x_1(t) - \hat{x}_1(t; r))), \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $r \in \mathbb{R}^+$  是ESO的增益, 参数  $k_i (i=1, 2, \dots, n+1)$  需使得矩阵

$$K = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -k_n & 0 & \cdots & 1 \\ -k_{n+1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -k_1 \delta_1^{\theta_1-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -k_n \delta_1^{\theta_n-1} & 0 & \cdots & 1 \\ -k_{n+1} \delta_1^{\theta_{n+1}-1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

为Hurwitz矩阵, 函数  $g_i(\tau) (i=1, 2, \dots, n+1)$  定义为

$$g_i(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau}{\delta_1^{1-\theta_i}}, & |\tau| \leq \delta_1, \\ |\tau|^{\theta_i} \operatorname{sgn} \tau, & \delta_1 \leq |\tau|, \end{cases} \quad (6)$$

式中  $\delta_1$  表示线性区间, 引入的目的是避免高频颤振现象的出现. 当  $\theta_i \in (0, 1)$  时, 函数  $g_i(\tau)$  具有“大误差, 小增益; 小误差, 大增益”的特性. 这里, 增益<sup>[8-9]</sup>可定义为

$$\lambda_i(\tau) \triangleq \frac{g_i(\tau)}{|\tau|}. \quad (7)$$

根据增益的定义可得

$$\lambda_i(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\delta_1^{1-\theta_i}}, & |\tau| \leq \delta_1, \\ |\tau|^{\theta_i-1} \operatorname{sgn} \tau, & \delta_1 \leq |\tau|. \end{cases} \quad (8)$$

计算结果表明, 在  $g_i(\tau)$  的线性区间里, 增益为定值. 在非线性区间里, 增益是关于变量  $\tau$  的单调减函数, 并且有

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \lambda_i(\tau) = 0. \quad (9)$$

当系统(2)受到大幅扰动时, 即  $L(t)$  变化较大时, 变量  $\tau$  会偏离零点较大值, 此时增益  $\lambda_i(\tau)$  很小, NLESO虽然避免了LESO的峰化现象, 但其观测性能也会严重下降, 因此非线性扩张状态观测器对大幅度扰动估计能力有限.

### 3 线性/非线性切换扩张状态观测器

为了解决NLESO对大幅度扰动估计能力有限的问题, 在NLESO的非线性区间  $|\tau| \geq \delta_1$  中引入一段小增益的LESO, 从而可以保证观测器的增益下降至一定值后保持不变, 观测器性能不会下降得很严重.

提出的线性/非线性切换扩张状态观测器与式(3)结构相同, 但是参数  $k_i (i=1, 2, \dots, n+1)$  需使得矩阵

$$K = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -k_n & 0 & \cdots & 1 \\ -k_{n+1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$K_j|_{j=1,2} = \begin{bmatrix} -k_1 \delta_j^{\theta_1-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -k_n \delta_j^{\theta_n-1} & 0 & \cdots & 1 \\ -k_{n+1} \delta_j^{\theta_{n+1}-1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

为Hurwitz矩阵.

函数  $g_i(\tau) (i=1, 2, \dots, n+1)$  修正为

$$g_i(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau}{\delta_1^{1-\theta_i}}, & |\tau| \leq \delta_1, \\ |\tau|^{\theta_i} \operatorname{sgn} \tau, & \delta_1 \leq |\tau| \leq \delta_2, \\ \frac{\tau}{\delta_2^{1-\theta_i}}, & |\tau| \geq \delta_2, \end{cases} \quad (12)$$

式中  $\theta_i \in (0, 1), 0 < \delta_1 < \delta_2$ . 当观测误差  $\tau$  绝对值大于  $\delta_2$  时, NLESO切换为小增益LESO, 即有  $\delta_2^{\theta_i-1} < \delta_1^{\theta_i-1}$ . 函数  $g_i(\tau)$  的示意图如图1所示.

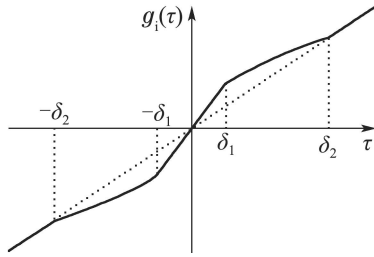


图1 函数 $g_i(\tau)$ 的示意图

Fig. 1 Schematic diagram of  $g_i(\tau)$

在给式(3)表示的L/NL-SESO收敛性之前, 首先做如下假设.

**假设 1** 系统(2)中所有的函数, 包括系统状态  $x_i(t)$ , 系统动态  $f$ , 干扰  $w(t)$ , 控制输入  $u(t)$ , 及其导数都是关于时间一致有界的.

根据假设, 存在  $M$  满足  $\sup_{t \in [t_0, \infty)} |\dot{x}_{n+1}(t)| \leq M$ .

**定理 1** 定义式(12)中

$$\theta_i = i\theta - (i - 1), \quad i = 1, 2, \dots, n + 1.$$

存在  $r^* > 0$  以及  $t_r > 0$ , 使得对于任意的  $r > r^*$ ,  $t > t_r$ ,  $\theta \in (\frac{n}{n+1}, 1)$ , ESO的估计误差满足

$$|x_i(t) - \hat{x}_i(t; r)| \leq \Gamma \left(\frac{1}{r}\right)^{n+2-i}, \quad (13)$$

式中  $t_r$  是与  $r$  相关的正常数, 且  $\lim_{r \rightarrow \infty} t_r = 0$ . 参数  $\Gamma$  是与  $r$  无关的正常数

$$\Gamma = \frac{2\lambda_{\max}^2(P_1)M}{\lambda_{\min}(P_1)}, \quad (14)$$

其中  $P_1$  满足  $K_1^T P_1 + P_1 K_1 = -I$ . 同时, 若定义式(10)中  $k_i$  为

$$k_i = \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (15)$$

则式(10)–(11)的条件可简化为只需矩阵

$$K = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -k_n & 0 & \cdots & 1 \\ -k_{n+1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

为Hurwitz矩阵即可.

#### 4 定理1的证明

**引理 1**<sup>[10]</sup> 假设  $V_1, V_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  是连续的具有相同权数  $\{r_i > 0\}_{i=1}^{n+1}$  的加权齐次函数, 其度数分别是  $l_1 > 0, l_2 > 0$ . 并且  $V_1$  同时也是正定函数. 那么对任意的  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} & \left( \min_{y \in V_1^{-1}(1)} V_2(y) \right) (V_1(x))^{\frac{l_2}{l_1}} \leq V_2(x) \leq \\ & \left( \max_{y \in V_1^{-1}(1)} V_2(y) \right) (V_1(x))^{\frac{l_2}{l_1}}, \end{aligned} \quad (17)$$

式中  $V_1^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{R}^n | V_1(x) = 1\}$ .

定理证明的难点在于ESO会在线性区间和非线性区间之间切换, 同时很难计算出切换的次数<sup>[6-7]</sup>.

证明的主要过程可分为以下几步:

1) 系统变换. 令

$$\eta_i(t; r) = r^{n+1-i} (x_i(t) - \hat{x}_i(t; r)), \quad (18)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, n + 1$ .

经计算可知,

$$\eta(t; r) = (\eta_1(t; r), \eta_2(t; r), \dots, \eta_{n+1}(t; r))$$

满足方程

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}_1(t; r) \\ \dot{\eta}_2(t; r) \\ \vdots \\ \dot{\eta}_n(t; r) \\ \dot{\eta}_{n+1}(t; r) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \eta_2(t; r) - k_1 g_1(\eta_1) \\ \eta_3(t; r) - k_2 g_2(\eta_1) \\ \vdots \\ \eta_{n+1}(t; r) - k_n g_n(\eta_1) \\ -k_{n+1} g_{n+1}(\eta_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dot{x}_{n+1}(t) \end{pmatrix}. \quad (19)$$

2) 根据ESO包含的分数幂函数和两段线性函数, 分别构造3个Lyapunov函数  $V_{L_1}(\cdot), V_\theta(\cdot), V_{L_2}(\cdot)$ . 令

$$\mathcal{D}_1 = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | |z_1| \geq \delta_2\}, \quad (20)$$

$$\mathcal{D}_2 = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \delta_1 \leq |z_1| \leq \delta_2\}, \quad (21)$$

$$\mathcal{D}_3 = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | |z_1| \leq \delta_1\}, \quad (22)$$

其中:  $V_{L_2}(\cdot)$  对应于  $\mathcal{D}_1$  上的线性函数,  $V_\theta(\cdot)$  对应于  $\mathcal{D}_2$  上的分数幂函数,  $V_{L_1}(\cdot)$  对应于  $\mathcal{D}_3$  上的线性函数.

3) 通过分析沿误差方程(19)的  $V_{L_2}(\cdot)$  的导数, 可推得式(19)的状态会进入  $\mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3$ .

4) 通过分析沿误差方程(19)的  $V_\theta(\cdot)$  的导数, 可推得式(19)的状态会进入  $\mathcal{D}_3$ .

5) 最后分析沿误差方程(19)的  $V_{L_1}(\cdot)$  的导数, 可推得式(19)的状态最终会留在  $\mathcal{D}_3$  中.

第2)步中构造的Lyapunov函数将在第3)步至第5)步的证明过程中详细叙述.

**步骤 1** 首先证明第3)步.

构造的Lyapunov函数  $V_{L_2}(\cdot)$  可表示为

$$V_{L_2}(z) = z^T P_2 z, \quad z \in \mathcal{D}_1, \quad (23)$$

式中由于式(11)中  $K_2$  为Hurwitz矩阵,  $P_2$  满足

$$K_2^T P_2 + P_2 K_2 = -I.$$

同时, Lyapunov函数  $V_{L_2}(\cdot)$  满足

$$\lambda_{\min}(P_2) \|z\|^2 \leq V_{L_2}(z) \leq \lambda_{\max}(P_2) \|z\|^2. \quad (24)$$

分析沿误差方程(19)的 $V_{L_2}(\cdot)$ 对时间的导数:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV_{L_2}(\eta(t; r))}{dt} \right|_{(19)} &\leq \\ -r\|\eta(t; r)\|^2 + 2\lambda_{\max}(P_2)M\|\eta(t; r)\| &\leq \\ -\frac{r}{\lambda_{\max}(P_2)}V_{L_2}(\eta(t; r)) + & \\ \frac{2\lambda_{\max}(P_2)M}{\sqrt{\lambda_{\min}(P_2)}}\sqrt{V_{L_2}(\eta(t; r))}, & \end{aligned} \quad (25)$$

这意味着

$$\begin{aligned} \frac{d\sqrt{V_{L_2}(\eta(t; r))}}{dt} &\leq \\ -\frac{r}{2\lambda_{\max}(P_2)}\sqrt{V_{L_2}(\eta(t; r))} + \frac{\lambda_{\max}(P_2)M}{\sqrt{\lambda_{\min}(P_2)}}. & \end{aligned} \quad (26)$$

根据式(24), 有

$$\begin{aligned} \|\eta(t; r)\| &\leq \sqrt{\frac{V_{L_2}(\eta(t; r))}{\lambda_{\min}(P_2)}} \leq \\ &\sqrt{\frac{V_{L_2}(\eta(t_0; r))}{\lambda_{\min}(P_2)}} e^{-\frac{r}{2\lambda_{\max}(P_2)}(t-t_0)} + \\ &\frac{\lambda_{\max}(P_2)M}{\lambda_{\min}(P_2)} \int_{t_0}^t e^{-\frac{r}{2\lambda_{\max}(P_2)}(t-\tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (27)$$

接着可推得

$$\begin{aligned} \|\eta_1(t; r)\| &\leq \|\eta(t; r)\| \leq \\ &\left( \sqrt{\frac{V_{L_2}(\eta(t_0; r))}{\lambda_{\min}(P_2)}} - \frac{2\lambda_{\max}^2(P_2)M}{r\lambda_{\min}(P_2)} \right) e^{-\frac{r}{2\lambda_{\max}(P_2)}(t-t_0)} + \\ &\frac{2\lambda_{\max}^2(P_2)M}{r\lambda_{\min}(P_2)}. \end{aligned} \quad (28)$$

根据式(28), 可得: 当 $r \rightarrow \infty$ , 对任意正数 $a$ , 在区间 $[a, \infty)$ 上, 有

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|\eta_1(t; r)\| = 0 \quad (29)$$

一致成立.

同时, 对任意正数 $\delta_2$ , 必存在 $r_1^* > 0, t_1^* > 0$ , 对任意的 $r \geq r_1^*, t \geq t_1^*$ , 有

$$\sup_{t \in [t_1^*, \infty)} \|\eta_1(t; r)\| \leq \delta_2. \quad (30)$$

第3)步得证.

**步骤 2** 接着证明第4)步.

首先, 引入一个辅助的矢量场和对应的系统:

$$F(z) = (z_2 - k_1[z_1]^{\theta_1}, \dots, -k_{n+1}[z_1]^{\theta_{n+1}})^T, \quad (31)$$

$$\dot{z} = F(z(t)), \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_{n+1})^T \in \mathcal{D}_2. \quad (32)$$

根据文献[10], 系统(32)是 $d = \theta - 1$ 度具权数 $\{r_i = (i-1)\theta - (i-2)\}_{i=1}^{n+1}$ 齐次的. 由于式(10)中矩阵 $K$

为Hurwitz矩阵, 由文献[11]可知, 对任意的 $\theta \in (\frac{n}{n+1}, 1)$ , 系统(32)是有限时间稳定的.

据文献[10-12], 存在一个正定的, 径向无界的Lyapunov函数 $V_\theta: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , 且 $V_\theta$ 是 $\gamma > 1$ 度具权数 $\{r_i\}_{i=1}^{n+1}$ 的加权齐次函数. 根据 $V_\theta$ 的齐次性可知,  $L_F(V_\theta(z))$ 和 $\frac{\partial V_\theta(z)}{\partial z_i}$ 也是加权齐次函数. 同时,  $V_\theta$ 沿矢量场 $F(z)$ 的李导数是负定的.

根据式(17), 结合 $L_F(V_\theta(z))$ ,  $\frac{\partial V_\theta(z)}{\partial z_i}$ 的齐次性, 有

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial V_\theta(z)}{\partial z_i} \right| \leq B_1(V_\theta(z))^{\frac{\gamma-r_i}{\gamma}}, \\ L_F(V_\theta(z)) \leq -B_2(V_\theta(z))^{\frac{\gamma+d}{\gamma}}, \quad z \in \mathcal{D}_2, \quad B_i > 1. \end{cases} \quad (33)$$

根据 $V_\theta$ 的性质, 存在Kamke函数 $\kappa_{\theta i}(i=1, 2): [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 使得

$$\kappa_{\theta 1}(\|z\|) \leq V_\theta(z) \leq \kappa_{\theta 2}(\|z\|), \quad z \in \mathcal{D}_2. \quad (34)$$

分析沿误差方程(19)的 $V_\theta(\cdot)$ 关于时间 $t$ 的导数, 有

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV_\theta(\eta(t; r))}{dt} \right|_{(19)} &= \\ rL_F(V_\theta(\eta(t; r))) + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial V_\theta}{\partial \eta_i}(\eta(t; r))\phi_i(t; r). & \end{aligned} \quad (35)$$

根据式(33)可得

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV_\theta(\eta(t; r))}{dt} \right|_{(19)} &\leq -rB_2(V_\theta(\eta(t; r)))^{\frac{\gamma+d}{\gamma}} + \\ &B_1M(V_\theta(\eta(t; r)))^{\frac{\gamma-r_{n+1}}{\gamma}}. \end{aligned} \quad (36)$$

由于 $-r_{n+1} - d \in (-1, 0)$ , 令

$$r_2^* = \frac{2B_1M}{B_2}(\kappa_{\theta 1}(\delta_1))^{\frac{-r_{n+1}-d}{\gamma}},$$

那么, 对任意 $r > r_2^*$ , 若 $V_\theta(\cdot) \geq \kappa_{\theta 1}(\delta_1)$ , 有

$$\left. \frac{dV_\theta(\eta(t; r))}{dt} \right|_{(12)} \leq -\frac{r}{2}B_2(V_\theta(\eta(t; r)))^{\frac{\gamma+d}{\gamma}} < 0. \quad (37)$$

由式(37)可知, 对任意的

$$\theta \in (\frac{n}{n+1}, 1), \quad r > \max\{r_1^*, r_2^*\}, \quad V_\theta(\eta(t; r))$$

在 $\mathcal{D}_2$ 上严格单调递减. 因此, 存在 $t_2^* > 0$ , 当 $t > t_2^*$ 时,  $V_\theta(\eta(t; r)) < \kappa_{\theta 1}(\delta_1)$ .

根据式(34), 当 $t > t_2^*$ , 推得

$$\sup_{t \in [t_2^*, \infty)} \|\eta_1(t; r)\| \leq \delta_1. \quad (38)$$

第4)步得证.

**步骤 3** 最后证明第5)步.

构造的Lyapunov函数 $V_{L_1}(\cdot)$ 可表示为

$$V_{L_1}(z) = z^T P_1 z, \quad z \in \mathcal{D}_3, \quad (39)$$

式中由于式(11)中 $K_1$ 为Hurwitz矩阵,  $P_1$ 满足

$$K_1^T P_1 + P_1 K_1 = -I.$$

同时, Lyapunov函数 $V_{L_1}(\cdot)$ 满足

$$\lambda_{\min}(P_1)\|z\|^2 \leq V_{L_1}(z) \leq \lambda_{\max}(P_1)\|z\|^2. \quad (40)$$

分析沿误差方程(19)的 $V_{L_1}(\cdot)$ 对时间的导数的思路与证明过程第3)步的思路类似, 这里不再赘述. 根据式(28), 有

$$\|\eta(t; r)\| \leq \left( \sqrt{\frac{V_{L_1}(\eta(t_0; r))}{\lambda_{\min}(P_1)}} - \frac{2\lambda_{\max}^2(P_1)M}{r\lambda_{\min}(P_1)} \right) \times e^{-\frac{r}{2\lambda_{\max}(P_1)}(t-t_0)} + \frac{2\lambda_{\max}^2(P_1)M}{r\lambda_{\min}(P_1)}. \quad (41)$$

令

$$r_3^* = \frac{4\lambda_{\max}^2(P_1)M}{\delta_1\lambda_{\min}(P_1)},$$

那么, 对任意的 $r > \max\{r_1^*, r_2^*, r_3^*\}$ , 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\eta(t; r)\| = \frac{2\lambda_{\max}^2(P_1)M}{r\lambda_{\min}(P_1)} \leq \frac{\delta_1}{2}. \quad (42)$$

根据式(42), 存在 $t_3^* > 0$ , 当 $t > t_3^*$ , 有

$$\sup_{t \in [t_3^*, \infty)} |\eta_i(t; r)| \leq \frac{\delta_1}{2}. \quad (43)$$

第5)步得证.

根据式(18)和式(43), 有

$$\sup_{t \in [t_3^*, \infty)} |x_i(t) - \hat{x}_i(t; r)| \leq \Gamma \left(\frac{1}{r}\right)^{n+2-i}. \quad (44)$$

式中 $\Gamma \triangleq \frac{2\lambda_{\max}^2(P_1)M}{\lambda_{\min}(P_1)}$ .

**步骤4** 下面讨论定理中式(16)成立的合理性. 在文献[13-14]中, 当参数 $k_i$ 取

$$k_i = \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!}, \quad (45)$$

即可保证矩阵

$$K = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -k_n & 0 & \cdots & 1 \\ -k_{n+1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

为Hurwitz矩阵. 参数 $\theta_i$ 如何取值可以保证在 $K$ 为Hurwitz矩阵的基础上, 矩阵 $K_j|_{j=1,2}$ 也是Hurwitz矩阵是个需要解决的问题. 若

$$\theta_i = i\theta - (i-1), \quad i = 1, 2, \dots, n+1,$$

就可以解决这个问题.

令

$$\kappa \triangleq \theta - 1 \in \left(-\frac{1}{n+1}, 0\right), \quad (47)$$

那么有

$$\theta_i - 1 = \kappa i. \quad (48)$$

将式(48)代入 $K_j|_{j=1,2}$ , 可得

$$K_j|_{j=1,2} = \begin{bmatrix} -k_1\delta_j^\kappa & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -k_n\delta_j^{\kappa n} & 0 & \cdots & 1 \\ -k_{n+1}\delta_j^{\kappa(n+1)} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (49)$$

与 $K_j|_{j=1,2}$ 对应的LESO的特征多项式为

$$\lambda_j(s)|_{j=1,2} = \lambda^{n+1} + k_1 r \delta_j^\kappa s^n + k_2 r^2 \delta_j^{2\kappa} s^{n-1} + \cdots + k_{n+1} r^{n+1} \delta_j^{\kappa(n+1)} s = (s + \delta_j^\kappa r)^{n+1}. \quad (50)$$

由于 $\delta_j > 0, r > 0$ 且 $\kappa < 0$ , 因此LESO特征多项式的所有特征根均具有负实部, 即证得 $K_j|_{j=1,2}$ 亦为Hurwitz矩阵. 证毕.

**注1** 上述的定理证明过程充分说明参数 $\theta_i, k_i$ 选取方法的合理性, 这也是其他参数选取方法(如文献[8-9, 15])不具备的优势.

### 5 数值仿真

通过设置系统真实值与ESO初始估计值的偏差大小, 对比LESO, NLESO与L/NL-SESO的估计性能, 验证提出的线性/非线性切换扩张状态观测器对大幅度扰动具有鲁棒性. 考虑如下二阶系统<sup>[16]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_2^3(t) + b_0 u(t) + d(t), \\ y(t) = x_1(t), \end{cases} \quad (51)$$

式中:  $b_0$ 为控制增益的标称值,  $u(t)$ 为控制输入,  $x_2^3(t)$ 为系统的已知动态,  $d(t)$ 为系统的总和扰动, 包括内部模型不确定性和外部扰动,  $y(t) = x_1(t)$ 是系统的可测量输出.

在设计的线性/非线性切换扩张状态观测器(3)中:  $n = 2, k_1 = k_2 = 3, k_3 = 1, \theta_1 = 0.8, \theta_2 = 0.6, \theta_3 = 0.4, \delta_1 = 10, \delta_2 = 100, r = 100$ . 若去掉 $\delta_2$ 表示的线性段, 可得NLESO, 同时若令 $g_i(\tau) = \tau$ , 可得LESO. 为了将系统状态 $(x_1, x_2)$ 调节至原点 $(0, 0)$ , 控制输入 $u(t)$ 设计为

$$u(t) = \text{Sat}_M\left(\frac{-\hat{x}_2^3 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2 - \hat{x}_3}{b_0}\right), \quad (52)$$

式中 $\text{Sat}_M$ 定义为

$$\text{Sat}_M(\tau) \triangleq \begin{cases} \tau, & |\tau| \leq M, \\ M \text{sgn } \tau, & |\tau| > M. \end{cases}$$

数值仿真采用欧拉积分法, 仿真步长为0.001. 系统的初值状态为 $(0.3, 0.6)$ , 各状态观测器初值皆为 $(0, 0, 0)$ . 3种状态观测器的对比仿真结果如图2-3所

示.

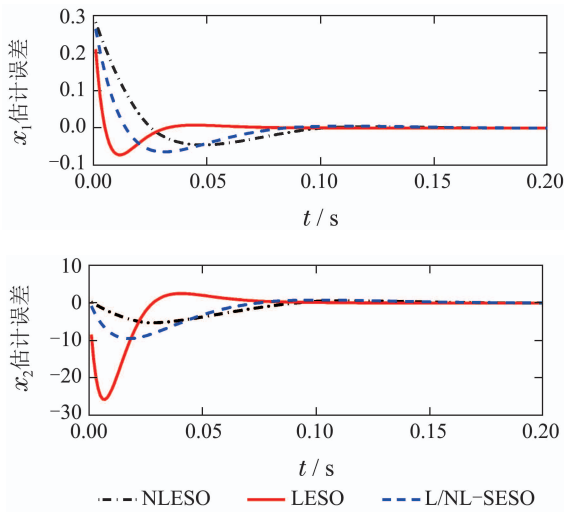


图 2  $x_1$ 和 $x_2$ 的估计误差

Fig. 2 Estimation error of  $x_1$  and  $x_2$

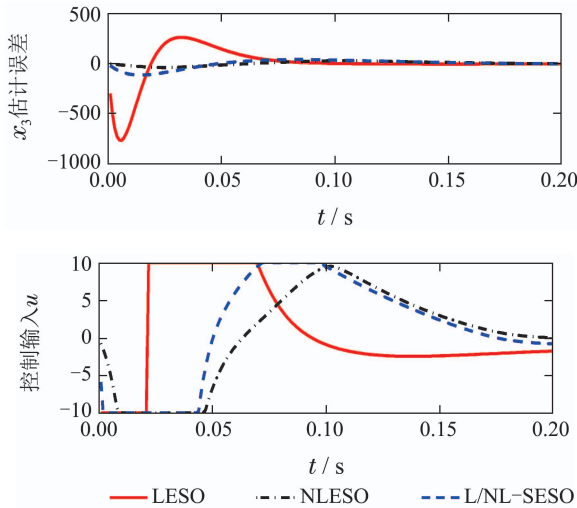


图 3  $x_3$ 的估计误差和控制律

Fig. 3 Estimation error of  $x_3$  and control input

由图2-3可知, 在大幅度扰动下, NLESO虽然避免了LESO状态估计的峰化现象以及峰化现象导致的控制律变化剧烈的问题, 但是其估计效率却大大降低. 提出的L/NL-SESO不但有效地提高了NLESO的估计效率, 而且抑制了LESO固有的峰化现象, 控制律变化相对平缓.

当可测量输出 $y(t)$ 在反馈回路中引入噪声时, 不妨设 $y(t) = x_1(t) + 0.002\mathcal{N}(t)$ ,  $\mathcal{N}(t)$ 是标准高斯白噪声, 仿真方法和仿真参数保持不变, 3种状态观测器的仿真结果如图4-5所示.

根据图4-5的仿真结果, LESO对噪声敏感度较高, 状态估计误差波动明显, 尤其是进入稳态后, 控制律发生了大范围的波动, 并且稳态精度较低. NLESO和L/NL-SESO对噪声的敏感度远低于LESO, 且稳态精度高于LESO, 控制律变化较平缓. 同时, L/NL-SESO的状态估计效率高于NLESO.

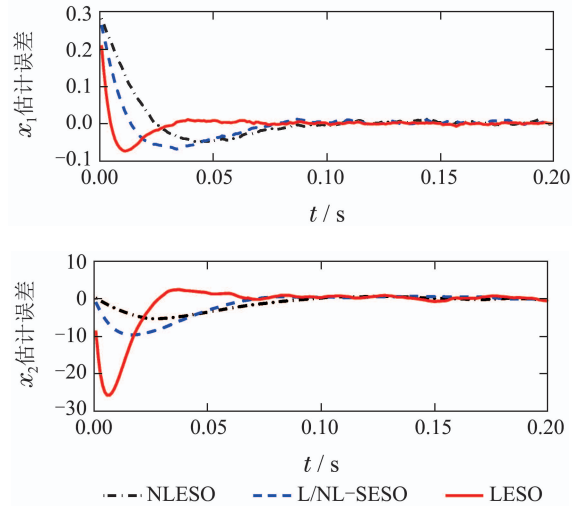


图 4 受随机噪声污染时 $x_1$ 和 $x_2$ 的估计误差

Fig. 4 Estimation error of  $x_1$  and  $x_2$  contaminated by random noise

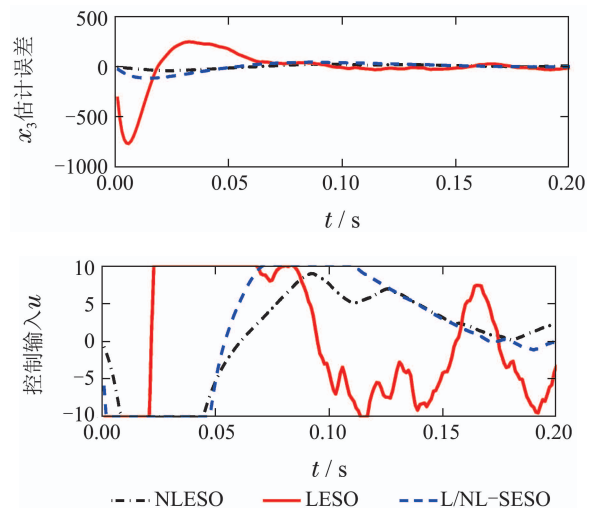


图 5 受随机噪声污染时 $x_3$ 的估计误差和控制律

Fig. 5 Estimation error of  $x_3$  and control input contaminated by random noise

综合上述仿真结果, 本文提出的L/NL-SESO继承了NLESO峰化现象弱、对噪声敏感度低的优点, 同时弥补了NLESO对大幅度扰动估计能力弱的不足.

## 6 结论

为了提高非线性扩张状态观测器的估计性能, 本文提出了一种线性/非线性切换扩张状态观测器, 并给出了对应的收敛性定理和严格的证明过程. 定理的证明过程借鉴了文献[6-7]的证明思路, 考虑了 $\delta \neq 1$ 的情况, 简化了证明过程, 给出了扩张状态观测器的参数 $\theta_i, k_i$ 合理的选取方法.

虽然数值仿真结果验证了本文提出的线性/非线性切换扩张状态观测器优越的性能, 但其工程可行性仍然需要进一步验证. 针对具体的系统以及系统的工作环境, 参数 $\delta_1, \delta_2$ 如何选取可以实现对LESO和NLESO两者扬长避短, 参数 $\theta_i$ 如何选取可以平衡系统的

性能指标和系统对噪声的敏感性都是未来需要解决的问题。

### 参考文献:

- [1] HAN J. From PID to active disturbance rejection control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, 56(3): 900 – 906.
- [2] ZHAO Zhiliang. *Convergence of nonlinear active disturbance rejection control*. Hefei: University of Science and Technology of China, 2012.  
(赵志良. 非线性自抗扰控制的收敛性. 合肥: 中国科学技术大学, 2012.)
- [3] GUO B Z, ZHAO Z L. On the convergence of an extended state observer for nonlinear systems with uncertainty. *Systems & Control Letters*, 2011, 60(6): 420 – 430.
- [4] XUE W. *On theoretical analysis of active disturbance rejection control*. Beijing: Academy of Mathematic and System Science, Chinese Academy of Sciences, 2012.  
(薛文超. 自抗扰控制的理论研究. 中国科学院研究生院中国科学院大学, 2012.)
- [5] XUE W, HUANG Y. Tuning of sampled-data ADRC for nonlinear uncertain systems. *Journal of Systems Science & Complexity*, 2016, 29(5): 1187 – 1211.
- [6] ZHAO Z L, GUO B Z. A nonlinear extended state observer based on fractional power functions. *Automatica*, 2017, 81: 286 – 296.
- [7] ZHAO Z L, GUO B Z. A novel extended state observer for output tracking of MIMO systems with mismatched uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(1): 211 – 218.
- [8] LI Jie, QI Xianhui, XIA Yuanqing, et al. On linear/nonlinear active disturbance rejection switching control. *Acta Automatica Sinica*, 2016, 42(2): 202 – 212.  
(李杰, 齐晓慧, 夏元清, 等. 线性/非线性自抗扰切换控制方法研究. 自动化学报, 2016, 42(2): 202 – 212.)
- [9] LI J, XIA Y, QI X, et al. On the necessity, scheme and basis of the linear-nonlinear switching in active disturbance rejection control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, 64(2): 1425 – 1435.
- [10] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Mathematics of Control Signals & Systems*, 2005, 17(2): 101 – 127.
- [11] PERRUQUETTI W, FLOQUET T, MOULAY E. Finite-time observers: application to secure communication. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(1): 356 – 360.
- [12] ROSIER L. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field. *Systems & Control Letters*, 1992, 19(6): 467 – 473.
- [13] ZHENG Q, GAO L Q, GAO Z. On stability analysis of active disturbance rejection control for nonlinear time-varying plants with unknown dynamics. *IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, LA: IEEE, 2008: 3501 – 3506.
- [14] GAO Z. Scaling and bandwidth parameterization based controller tuning. *American Control Conference*. New York: IEEE, 2003: 4989 – 4996.
- [15] HAN J. *Active Disturbance Rejection Control Technique — The Technique for Estimating and Compensating the Uncertainties*. Beijing: National Defense Industry Press, 2008.  
(韩京清. 自抗扰控制技术: 估计补偿不确定因素的控制技术. 北京: 国防工业出版社, 2008.)
- [16] KHALIL H K. *Nonlinear Systems*. The 3rd ed. Engle-wood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall, 2002.

### 作者简介:

- 陈志翔** 博士研究生, 目前研究方向为自抗扰控制理论与应用, E-mail: czx91154@163.com;
- 高钦和** 教授, 博士生导师, 目前研究方向为导弹发射理论与技术, E-mail: gao202@189.cn.