

# 基于微分平滑的四旋翼运输系统轨迹跟踪控制

梁晓<sup>†</sup>, 胡欲立

(西北工业大学 航海学院, 水下航行器研究所, 陕西 西安 710072)

**摘要:** 四旋翼系绳运输系统是一种具有8个自由度和4个控制输入的欠驱动、强耦合、多变量的非线性系统。为建立系统模型, 将系统解耦为双质点系绳连接子系统和四旋翼姿态控制子系统, 基于广义拉格朗日方程推导出系统的动力学模型。然后利用微分平滑理论证明了系统是以载荷位置和四旋翼偏航角为平滑输出的微分平滑系统。进而在等式限制条件下对平滑输出轨迹进行规划, 获得前馈开环控制律。为抑制系统扰动并使跟踪误差收敛于原点, 利用微分平滑特性推导出动态内反馈控制器。仿真实验验证了所提方法的有效性。

**关键词:** 四旋翼; 运输; 控制; 平滑; 动态反馈

**引用格式:** 梁晓, 胡欲立. 基于微分平滑的四旋翼运输系统轨迹跟踪控制, 2019, 36(4): 525 – 532

DOI: 10.7641/CTA.2018.80146

## Trajectory control of a quadrotor with a cable-suspended load based on differential flatness

LIANG Xiao<sup>†</sup>, HU Yu-li

(School of Marine Science and Technology, Institute of Underwater Vehicle, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shaanxi 710072, China)

**Abstract:** A quadrotor with a cable-suspended load is considered, which has 8 degrees of freedom and 4 degrees controls. This system is decoupled into 2 subsystem: quadrotor attitude control subsystem and double points link subsystem. Based on Lagrange equation, dynamical model is obtained. The quadrotor-load system is proved to be a differential flat system with the load position and the quadrotor yaw serving as the flat outputs. Trajectory in the output space is planned with equality constraints. Then open loop control law is obtained. In order to depress system disturbances and ensure the trajectory errors converge to origin, a nonlinear controller which is named endogenous dynamic feedback is conducted. Simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** quadrotor; transport; control; flatness; dynamic feedback

**Citation:** LIANG Xiao, HU Yuli. Trajectory control of a quadrotor with a cable-suspended load based on differential flatness. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(4): 525 – 532

### 1 引言

四旋翼飞行器作为一种便捷的航空运输工具, 在军用和民用领域具有重要应用前景。比如物资补给, 应急救援, 快递投送等。目前, 亚马逊、谷歌以及国内的顺丰都已经实施无人机快递项目。它可以有效解决偏远地区配送问题, 提高配送效率, 减少人力成本。但由于运输可靠性和飞行安全性方面面临的困难, 目前这些项目都还处于小范围试用阶段。因此, 设计稳定可靠的四旋翼运输控制系统具有重要的理论和应用价值。

四旋翼运输系统具有欠驱动、强耦合、非线性的特点, 近年来针对该类系统的控制进行了大量研究。文献[1]为飞行器设计了一种抓取装置, 研究结果验证

了四旋翼运输载荷的可行性, 但是抓取装置将载荷与飞行器固连后, 载荷的附加惯性会影响飞行器姿态操作的灵活性。一种替代的方法是使用绳取代抓取装置, 当绳系于飞行器质心时, 载荷的质量与飞行器姿态控制解耦, 这种结构保证了飞行器在完成运输任务的同时不影响其姿态操作性能。文献[2]把运输系统等效为2个转动关节和1个移动关节的组合进行建模, 然后将轨迹跟踪问题转化成互补约束条件下的数学优化问题, 使用二次规划算法获得最优解。但这种算法耗时较长且对控制硬件性能要求高。文献[3]基于欧拉-拉格朗日方法研究了载荷振荡情况下四旋翼运输系统的动力学特性, 并设计了一种滑动模块控制器, 对模型不确定性和载荷振荡有较好的鲁棒性, 但载荷

的振荡仅限于小范围内. 文献[4]将四旋翼系绳运输系统进行分解, 利用系统的微分平滑性建立子系统之间状态的映射关系, 在二维平面内推导出几何非线性控制律, 但推导的控制律结构复杂, 对模型精度要求较高. 微分平滑方法利用原非线性系统的微分结构, 将状态空间映射到低维的平滑输出空间, 使设计的控制律结构更简单, 同时避免了大量的运算, 因此本文基于这种方法设计四旋翼运输系统轨迹跟踪控制律.

微分平滑方法是处理欠驱动非线性系统的有效方法, 它由Fliess及其合作者在1980年研究2个控制系统等价时首次提出<sup>[5]</sup>. 该方法主要应用于两方面: 一是系统轨迹生成和优化. 文献[6]针对高超声速滑翔飞行器再入滑翔过程中的轨迹优化问题, 提出一种基于微分平滑理论的数值方法, 将初始优化问题转换到平滑输出空间中, 避免积分运算的同时降低了设计维度. 文献[7]基于微分平滑方法研究了多约束条件下四旋翼无人机轨迹规划问题, 把输入空间高维规划问题转化为输出空间低维规划问题, 降低了直接求解最优控制问题的难度; 二是提供了非线性系统的反馈线性化方法. 如果一个非线性系统是微分平滑的, 那么它可通过一种称为“内反馈”(endogenous feedback)的特殊动态反馈实现线性化<sup>[8]</sup>. 文献[9]研究了升力式再入飞行器控制问题, 基于系统的微分平滑特性将原非线性模型转换为二阶线性模型, 然后基于极点配置设计了误差反馈控制律. 文献[10]针对吸气式高超音速飞行器的强耦合性和非线性特点, 利用微分平滑方法对飞行器模型进行线性化, 设计了状态反馈控制律, 实现轨迹跟踪控制.

本文首先根据运输系统物理特点, 将系统分解为双质点连接子系统和四旋翼姿态控制子系统, 基于广义拉格朗日方程建立了系统动力学模型. 在此基础上, 引入微分平滑的定义, 证明了本系统是微分平滑的, 并推导出平滑输出的显式表达. 在等量约束下, 对平滑输出进行规划, 得到开环控制律. 为抑制系统扰动并使跟踪误差收敛, 利用平滑输出进行变量代换, 推导出内反馈控制律, 实现原非线性系统的反馈线性化. 最后, 针对典型运输轨迹进行仿真, 仿真结果验证了所提方法在四旋翼运输系统轨迹跟踪控制中的有效性.

## 2 系统模型建立

四旋翼系绳运输系统由四旋翼飞行器、系绳和运输载荷组成, 如图1.

数学模型的推导基于以下假设:

- 1) 四旋翼飞行器是四轴对称结构, 其质心位于两轴交叉点;
- 2) 绳悬挂点为四旋翼质心;
- 3) 绳的重量忽略不计;
- 4) 绳不可伸缩;

5) 绳上张力大于0.

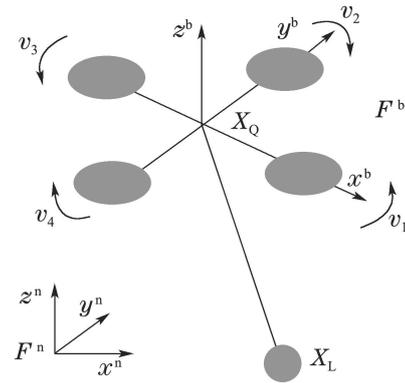


图1 四旋翼系绳运输系统

Fig. 1 A quadrotor with a cable suspended load

由于绳系于四旋翼质心, 绳上拉力相对四旋翼质心的转动扭矩为零. 四旋翼绕质心的姿态运动不受绳转动影响. 整个运输系统可以分解为四旋翼姿态控制子系统 $\Sigma_1$ 和双质点系绳连接子系统, 四旋翼姿态运动涉及地面坐标系 $F^n$ 和机体坐标系 $F^b$ , 其动力学模型<sup>[11]</sup>为

$$J_Q \dot{\Omega} + \Omega \times J_Q \Omega = M, \quad (1)$$

其中:  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  是四旋翼转动角速度在 $F^b$ 系下的描述,  $J_Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  是四旋翼在 $F^b$ 系下的惯性矩阵,  $M \in \mathbb{R}^3$  是力矩矢量.

系统的控制力来自于4个螺旋桨的旋转, 设 $u_1 \in \mathbb{R}^3$  表示飞行器合升力, 方向沿 $z^b$ 轴, 其数学定义参考文献[12]. 在子系统 $\Sigma_2$ 中,  $u_1$ 为唯一的控制输入, 控制质心平动和系绳转动. 设 $u_1$ 投影到地面系的力为 $u_o$ , 则

$$u_o = [u_{ox} \quad u_{oy} \quad u_{oz}]^T = Qu_1, \quad (2)$$

其中 $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  为四旋翼姿态旋转矩阵.

以子系统 $\Sigma_2$ 质心 $O$ 为原点, 建立与地面坐标系同向的运动系 $Ox'y'z'$ , 如图2. 其中:  $m_q, m_1$  分别为飞行器和运输载荷质量,  $l_1, l_2$  分别是飞行器与载荷到质心的距离. 当系绳张紧时, 系统质心位于绳上某点(位置可根据质心定义求得).

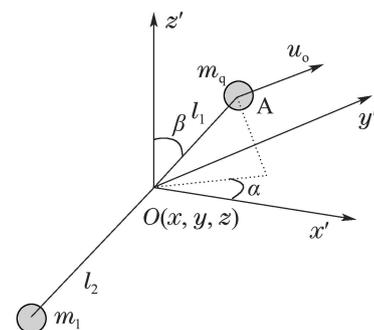


图2 双质点系绳连接子系统

Fig. 2 Double points subsystem linked with a cable

对子系统 $\Sigma_2$ , 在绳张紧的情况下( $T > 0$ ), 它的自由度为5. 选取广义坐标 $q(x, y, z, \alpha, \beta)$ , 其中:  $X = [x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^3$ 是质心 $O$ 在地面系中的位置坐标,  $\alpha$ 是绳在 $x'Oy'$ 平面的投影与 $Ox'$ 轴正向的夹角,  $\beta$ 是绳与 $Oz'$ 轴正向的夹角.

**注1** 选取系统质心位置相较于选择 $X_L, X_Q$ 位置作为研究对象, 可以有效地将子系统 $\Sigma_2$ 的平动和转动解耦. 简化了动力学方程, 方便后续系统的分析.

当选取质心 $O$ 为参考点时,  $m_q, m_1$ 的重力相对 $O$ 点的力矩大小相等, 方向相反, 彼此抵消. 绳绕 $O$ 点的转动力矩由 $u_o$ 产生.

下面根据拉格朗日方程建立子系统 $\Sigma_2$ 动力学模型. 首先写出系统的拉格朗日函数

$$L = \frac{1}{2}m\dot{X}^T\dot{X} + \frac{1}{2}I[(\sin \beta)^2(\dot{\alpha})^2 + (\dot{\beta})^2] - mgX^Te_3, \quad (3)$$

其中:  $m = m_1 + m_q$ 表示系统的总质量;  $I$ 是绕质心的转动惯量, 且 $I = m_q l_1^2 + m_1 l_2^2 = m_1 l_2 l$ ;  $e_3$ 为重力方向单位矢量, 且 $e_3 = [0 \ 0 \ -1]^T$ . 其次, 根据广义力矩定义, 求得外力 $u_o$ 对 $\alpha, \beta$ 的广义力矩为

$$\begin{cases} \tau_\alpha = (-u_{ox}S_\alpha + u_{oy}C_\alpha)l_1S_\beta, \\ \tau_\beta = (u_{ox}C_\alpha C_\beta + u_{oy}S_\alpha C_\beta - u_{oz}S_\beta)l_1, \end{cases} \quad (4)$$

其中:  $S_x$ 表示 $\sin x$ ,  $C_x$ 表示 $\cos x$ , 代入拉格朗日动力学方程, 得子系统 $\Sigma_2$ 关于广义坐标的微分方程如下:

$$\begin{cases} m\ddot{X} - mge_3 = u_o, \\ I\ddot{\alpha} = \tau_\alpha, \\ I\ddot{\beta} = \tau_\beta. \end{cases} \quad (5)$$

联立式(4)–(5)得

$$\begin{cases} \ddot{X} = \frac{1}{m}u_o + ge_3, \\ \ddot{\alpha} = \frac{-u_{ox}S_\alpha + u_{oy}C_\alpha}{m_q l S_\beta} - \frac{2\dot{\alpha}\dot{\beta}C_\beta}{S_\beta}, \\ \ddot{\beta} = \frac{u_{ox}C_\beta C_\alpha + u_{oy}S_\beta C_\alpha - u_{oz}S_\beta}{m_q l} + \dot{\alpha}^2 S_\beta C_\beta, \end{cases} \quad (6)$$

式(6)即为双质点系绳连接子系统 $\Sigma_2$ 的动力学微分方程, 求出 $X$ 与 $\alpha, \beta$ 后, 载荷的运动轨迹为

$$X_L = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - l_2 S_\beta C_\alpha \\ y - l_2 S_\beta S_\alpha \\ z - l_2 C_\beta \end{bmatrix}. \quad (7)$$

四旋翼的运动轨迹为

$$X_Q = \begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + l_1 S_\beta C_\alpha \\ y + l_1 S_\beta S_\alpha \\ z + l_1 C_\beta \end{bmatrix}. \quad (8)$$

由于四旋翼姿态控制已在相关文献中进行了讨论, 如文献[12], 所以子系统 $\Sigma_1$ 的控制不是本文研究重点. 本文控制的目的是设计合适的 $u_o$ , 使子系统 $\Sigma_2$ 悬挂载荷跟踪期望轨迹.  $u_o$ 的方向对应四旋翼的俯仰角和横滚角,  $u_o$ 的大小通过式(2)反映到四旋翼的合升力 $u_1$ 上, 形成整个系统的闭环控制.

### 3 控制系统设计

#### 3.1 微分平滑

微分平滑的定义<sup>[13]</sup>如下:

**定义1** 对于系统

$$\dot{\xi} = f(\xi, u), \quad (9)$$

其中: 状态变量 $\xi \in \mathbb{R}^n$ , 控制输入 $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $f$ 是光滑向量场. 如果存在变量 $g = [g_1 \ g_2 \ \cdots \ g_m] \in \mathbb{R}^m$ , 由下面形式的方程给出:

$$g = h(\xi, \dot{u}, \cdots, u^{(r)}), \quad (10)$$

使原系统状态变量 $\xi$ 和控制输入 $u$ 均可以由 $g$ 下面的形式( $g$ 及 $g$ 的导数)得到

$$\begin{cases} \xi = \phi(g, \dot{g}, \cdots, g^{(q)}), \\ u = \alpha(g, \dot{g}, \cdots, g^{(q)}), \end{cases} \quad (11)$$

其中 $h, \phi, \alpha$ 是光滑函数. 则称原系统是微分平滑的(简称平滑), 且 $g$ 称为平滑输出.

上面的定义给出了原系统在新变量 $g_i (i=1, \cdots, m)$ 下的描述, 描述方程为(11). 定义表明平滑系统的状态变量和控制输入均可表示成平滑输出及其有限阶导数的函数. 反过来, 平滑输出也可表示成原系统状态变量和控制变量及其有限阶导数的函数. 需要注意的是,  $g$ 的维度与原系统独立控制变量的维度相同(均为 $m$ ).

微分平滑是对原系统在微分同胚意义下的动态扩展, 扩展后的系统其维度小于原系统. 平滑输出可以看成是从原系统状态空间到低维空间的映射, 映射由 $\phi, \alpha$ 给出. 平滑性提供了一种控制系统轨迹的相对容易的方法, 即将系统状态变量的控制要求转换成对平滑输出的控制要求.

**定理1** 由模型(6)决定的系统是微分平滑的, 且其平滑输出为 $X_L$ .

**证**

**步骤1** 设系绳上张力为 $T$  ( $T$ 为矢量, 且 $T = [T_x \ T_y \ T_z]^T$ ), 在地面系, 对 $m_1$ 应用牛顿第2定律有

$$T = m_1 \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{z}_1 + g \end{bmatrix}. \quad (12)$$

根据假设(5),  $T$ 所在方向即绳的方向, 因此, 2个方位角 $\alpha, \beta$ 可以根据下式求得:

$$\beta = \operatorname{arccot}\left(\frac{\ddot{z}_1 + g}{\sqrt{(\ddot{x}_1)^2 + (\ddot{y}_1)^2}}\right), \quad (13)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\ddot{y}_1}{\ddot{x}_1}\right), \quad (14)$$

上式表明,  $\alpha, \beta$ 可以表示成 $\ddot{X}_L$ 的函数.

**步骤2** 下面寻找状态 $X$ 关于 $X_L$ 的函数. 首先, 设对 $T$ 进行归一化后得到的单位矢量为 $T^*$ , 则

$$T^* = [T_x^* \ T_y^* \ T_z^*]^T = \left[ \frac{T_x}{\sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2}} \ \frac{T_y}{\sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2}} \ \frac{T_z}{\sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2}} \right]^T. \quad (15)$$

根据几何关系有

$$X = X_L + l_2 T^*. \quad (16)$$

将式(12)(15)代入式(16), 即得到系统质心位置关于 $X_L$ 和 $\ddot{X}_L$ 的表达式.

**步骤3** 控制力 $u_o$ 与 $X$ 的二阶导数有关, 对 $X$ 求二阶导数得

$$\ddot{X} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 & x_1^{(3)} & x_1^{(4)} \\ \ddot{y}_1 & y_1^{(3)} & y_1^{(4)} \\ \ddot{z}_1 & z_1^{(3)} & z_1^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2 d_2 + 1 \\ 2l_2 d_1 \\ l_2 d_0^{-0.5} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

其中 $d_0, d_1, d_2$ 是关于 $X_L$ 及其导数的标量函数.

根据质心的运动方程有

$$u_o = m(\ddot{X} - g \cdot e_3), \quad (18)$$

因此, 控制力 $u_o$ 也可表示成 $\ddot{X}_L, X_L^{(3)}, X_L^{(4)}$ 的函数.

综上, 模型(6)表示的系统中, 状态变量与控制输入均可由 $X_L$ 及其导数表示. 其次, 由式(7)可知,  $X_L$ 可表示成状态变量的函数. 因此根据定义1系统是微分平滑的, 且 $X_L$ 是其平滑输出. 证毕.

式(17)–(18)描述了控制力 $u_o$ 与 $X_L$ 及其导数的关系, 可用于设计系统开环控制律. 需要说明的是, 平滑输出并不一定对应实际的物理含义, 它可能是某个虚拟变量. 只是在本系统中, 载荷位置坐标正好满足既是实际系统输出又是平滑输出.

**注2** 整个四旋翼运输系统也是微分平滑的, 平滑输出为 $(X_L, \psi)$ ,  $\psi$ 为飞行器偏航角, 参考文献[14].

### 3.2 运动规划

微分平滑将系统状态空间映射到输出空间. 对一条期望的状态演化曲线和控制曲线, 在微分同胚的意义下对应一条平滑输出曲线. 这意味着只要规划一条满足初末时刻系统状态要求的输出曲线, 原系统的控制曲线就可以从平滑输出直接得到, 而不用求解原微分方程[15–16].

设原系统在 $[t_0, t_f]$ 时间内的状态曲线 $\xi(t_0) \rightarrow \xi(t_f)$ 映射到平滑输出空间为 $g(t_0) \rightarrow g(t_f)$ . 在平滑空间,

对 $m$ 个平滑输出参数化定义如下:

$$g_i(t) = \zeta_i(\xi(t)) = \sum_{j=1}^N a_{i,j} \lambda_j(t), \quad (19)$$

其中:  $\lambda_j(t)$ 是基函数,  $a_{i,j}$ 为待求系数. 式(19)将无限维空间寻找函数的问题转化成确定有限个参数值. 给出初末时刻边界条件后, 这等效于求解下面的方程[13–14]:

$$\begin{bmatrix} \Lambda(t_0) \\ \Lambda(t_f) \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} \bar{g}(t_0) \\ \bar{g}(t_f) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

其中:

$$\Lambda(t_0) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t_0) & \lambda_2(t_0) & \cdots & \lambda_n(t_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{(k)}(t_0) & \lambda_2^{(k)}(t_0) & \cdots & \lambda_n^{(k)}(t_0) \end{bmatrix},$$

$$\Lambda(t_f) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t_f) & \lambda_2(t_f) & \cdots & \lambda_n(t_f) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{(k)}(t_f) & \lambda_2^{(k)}(t_f) & \cdots & \lambda_n^{(k)}(t_f) \end{bmatrix}$$

是基函数在 $t_0, t_f$ 时刻0到 $k$ 阶导数值组成的矩阵;

$$A = [a_{i,1} \ a_{i,2} \ \cdots \ a_{i,n}]^T$$

是 $n$ 维列向量;

$$\bar{g}(t_0) = \begin{bmatrix} g(t_0) \\ \vdots \\ g^{(k)}(t_0) \end{bmatrix}, \quad \bar{g}(t_f) = \begin{bmatrix} g(t_f) \\ \vdots \\ g^{(k)}(t_f) \end{bmatrix}$$

是输出轨迹在 $t_0, t_f$ 时刻0到 $k$ 阶导数的期望值.

下面以子系统 $\Sigma_2$ 平滑输出 $x_1$ 为例说明这一过程. 要控制系统从起飞点 $X_{t_0}(x_0, y_0, z_0, \alpha_0, \beta_0)$ 到降落点 $X_{t_f}(x_f, y_f, z_f, \alpha_f, \beta_f)$ , 边界条件满足

$$x_1(t_0) = x_0 - l_2 \sin \beta_0 \cos \alpha_0,$$

$$x_1(t_f) = x_f - l_2 \sin \beta_f \cos \alpha_f,$$

$$x_1^{(1)}(t_0) = x_1^{(2)}(t_0) = x_1^{(3)}(t_0) = x_1^{(4)}(t_0) = 0,$$

$$x_1^{(1)}(t_f) = x_1^{(2)}(t_f) = x_1^{(3)}(t_f) = x_1^{(4)}(t_f) = 0.$$

**注3** 从一点起飞到另一点降落对应的轨迹称为rest-to-rest轨迹, 这种轨迹下飞行器初末时刻位置坐标发生了变化, 而位置坐标的各阶导数均为0, 参考文献[5].

上面给出10个边界条件, 多项式曲线的最高次数选择9, 以幂函数作为基函数, 设

$$x_1(t) = \sum_{j=0}^9 a_j t^j, \quad (21)$$

代入边界条件, 通过求解10个系数的方程, 即得到对应输出曲线.

其它平滑输出分量在等式约束下的规划方法与之类似.

### 3.3 动态反馈

理论上, 根据动态规划得到 $X_L$ 的期望轨迹后, 利用式(17)–(18)可以显式计算出控制力 $u_o$ , 获得系统前

向开环控制律. 然而, 这样的控制不能抑制系统扰动并使跟踪误差收敛, 解决的途径是引入动态反馈. 对微分平滑系统, 有下面的引理<sup>[5,13,17]</sup>:

**引理 1** 一个系统是局部微分平滑的, 则它是可局部动态反馈线性化的.

**定义 2** 对于式(9)表示的系统, 如果其开环动态等价于下面的闭环动态 $\dot{\xi} = f(\xi, \kappa(\xi, \eta, v))$ ,  $\dot{\eta} = \alpha(\xi, \eta, v)$ , 则反馈 $u = \kappa(\xi, \eta, v)$ , 称为内反馈(endogenous feedback).

**引理 2** 一个系统是微分平滑的, 则存在一个动态内反馈, 使原系统微分同胚于一个线性可控系统.

下面基于这一理论设计子系统 $\Sigma_2$ 的动态反馈控制律, 控制律的推导限于 $x'Oz'$ 平面, 重写式(6)表示的系统如下:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{u_{ox}}{m}, \\ \ddot{z} = \frac{u_{oz}}{m} + g, \\ \ddot{\beta} = \frac{u_{ox} \cos \beta - u_{oz} \sin \beta}{m_q l}, \end{cases} \quad (22)$$

其平滑输出为 $(x_1, z_1) = (x - l_2 \sin \beta, z - l_2 \cos \beta)$  由于系统状态和控制变量关于平滑输出函数的最高阶为4, 则等价的线性反馈系统为4阶, 存在动态内反馈与变量代换将系统(22)变形为下面的闭环系统

$$x_1^{(4)} = v_1, \quad z_1^{(4)} = v_2, \quad (23)$$

其中 $v_1, v_2$ 是新的控制输入.

为求内反馈和变量代换, 对平滑输出求1到4阶导数

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dot{x} - l_2 \dot{\beta} \cos \beta, \\ z_1^{(1)} = \dot{z} + l_2 \dot{\beta} \sin \beta, \\ x_1^{(2)} = \frac{\sin^2 \beta}{m} u_{ox} + \frac{\sin \beta \cos \beta}{m} u_{oz} + l_2 (\dot{\beta})^2 \sin \beta, \\ z_1^{(2)} = \frac{\sin \beta \cos \beta}{m} u_{ox} + \frac{\cos^2 \beta}{m} u_{oz} + l_2 (\dot{\beta})^2 \cos \beta + g. \end{cases} \quad (24)$$

令 $\eta_1 = \frac{\sin \beta}{m} u_{ox} + \frac{\cos \beta}{m} u_{oz} + l_2 (\dot{\beta})^2$ 和 $\dot{\eta}_1 = \eta_2$ , 有

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \eta_1 \sin \beta, \quad z_1^{(2)} = \eta_1 \cos \beta, \\ x_1^{(3)} &= \eta_2 \sin \beta + \eta_1 \dot{\beta} \cos \beta, \\ z_1^{(3)} &= \eta_2 \cos \beta - \eta_1 \dot{\beta} \sin \beta. \end{aligned}$$

进一步, 有

$$\begin{aligned} x_1^{(4)} &= \dot{\eta}_2 \sin \beta + 2\eta_2 \dot{\beta} \cos \beta + \eta_1 (\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) = v_1, \\ z_1^{(4)} &= \dot{\eta}_2 \cos \beta - 2\eta_2 \dot{\beta} \sin \beta - \end{aligned}$$

$$(\eta_1 \ddot{\beta} \sin \beta + \dot{\beta}^2 \cos \beta) = v_2,$$

得到动态反馈控制模型为

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = v_1 \sin \beta + v_2 \cos \beta + \eta_1 \dot{\beta}^2, \\ u_{ox} = \frac{m_q l \cos \beta \zeta}{\eta_1} + m \sin \beta (\eta_1 - l_2 \dot{\beta}^2), \\ u_{oz} = \frac{-m_q l \sin \beta \zeta}{\eta_1} + m \cos \beta (\eta_1 - l_2 \dot{\beta}^2), \end{cases} \quad (25)$$

其中 $\zeta = v_1 \cos \beta - v_2 \sin \beta - 2\eta_2 \dot{\beta}$ .

将式(25)中 $u_{ox}, u_{oz}$ 的表达式代入式(22), 得到新的扩展系统. 新系统增加了状态变量 $\eta_1, \eta_2$ , 控制变量由 $u_{ox}, u_{oz}$ 变为 $v_1, v_2$ . 这2个控制量正是线性反馈系统(23)的控制输入, 于是, 式(22)-(23)(25)就构成以 $v_1, v_2$ 为控制输入的新闭环系统. 这样, 原非线性系统的反馈线性化就完成了. 利用式(25), 设计轨迹跟踪控制就变得简单了.

设 $(x_1^*, z_1^*)$ 表示运输系统载荷的期望轨迹, 轨迹误差为 $e_1^{(j)} = x_1^{(j)} - (x_1^*)^{(j)}, e_2^{(j)} = z_1^{(j)} - (z_1^*)^{(j)}$ , 令

$$\begin{cases} v_1 = (x_1^*)^{(4)} - \sum_{i=0}^3 k_{1,i} (x_1^{(i)} - (x_1^*)^{(i)}), \\ v_2 = (z_1^*)^{(4)} - \sum_{i=0}^3 k_{2,i} (z_1^{(i)} - (z_1^*)^{(i)}). \end{cases} \quad (26)$$

$\{k_{1,0}, k_{1,1}, k_{1,2}, k_{1,3}\}$ 和 $\{k_{2,0}, k_{2,1}, k_{2,2}, k_{2,3}\}$ 是待选择的系数集, 如果它使多项式

$$\begin{cases} p(s) = s^4 + k_{1,3}s^3 + k_{1,2}s^2 + k_{1,1}s + k_{1,0}, \\ q(s) = s^4 + k_{2,3}s^3 + k_{2,2}s^2 + k_{2,1}s + k_{2,0} \end{cases} \quad (27)$$

满足Hurwitz多项式(例如选择位于复平面左半平面的根), 则原系统是跟踪误差指数收敛的.

### 4 仿真实验

为验证本文所提方法的有效性, 在MATLAB环境下对载荷做圆周运动时飞行器轨迹的演化情况进行仿真, 并验证了控制律跟踪圆形, 抛物线等典型期望轨迹时的跟踪效果. 仿真中使用参数如表1所示.

表 1 仿真中使用的模型参数

Table 1 Model parameters in the simulations

变量	参数	单位
$m_q$	0.5	kg
$m_1$	0.1	kg
$l_1$	0.8	m
$l_2$	0.2	m
$g$	9.8	m/s <sup>2</sup>

#### 4.1 载荷圆周运动

由于四旋翼运输系统是微分平滑的, 可以直接在平滑输出空间研究飞行器轨迹与载荷轨迹的对应关系. 下面考察载荷跟踪 $x'Oy'$ 平面内圆周曲线过程中,

飞行器对应轨迹的演化特征. 特别的, 选择如下期望轨迹:

$$X_L = \begin{bmatrix} \cos(\frac{2\pi}{T}t) \\ \sin(\frac{2\pi}{T}t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

式中 $T$ 是载荷圆周运动的周期. 利用微分平滑性, 可以获得对应飞行器的轨迹. 进一步, 改变载荷运动周期, 得到飞行器轨迹演化情况如下图所示.

图3-4是载荷圆周运动的频率从0.5 Hz到5 Hz过程中, 飞行器轨迹演化情况. 图3(a)是三维空间的轨迹, 图3(b)-3(d)分别是 $x'Oy'$ 平面,  $x'Oz'$ 平面和 $y'Oz'$ 平面观察到的系统轨迹演化情况. 从图中可以看出, 载荷在同样半径圆形轨迹下, 随着周期减小(频率增大), 飞行器轨道半径和竖直方向坐标也逐渐减小. 这是因为载荷运动角速度越大, 所需向心力越大, 这个更大的向心力通过增加绳与竖直方向夹角来提供.

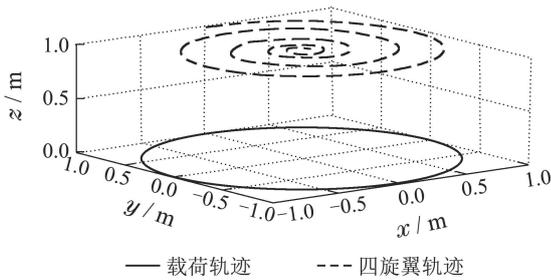


图 3(a) 三维空间圆曲线跟踪情况

Fig. 3(a) Track a circle curve in the three-dimensional space

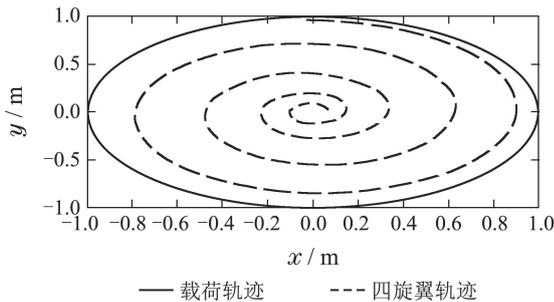


图 3(b)  $x'Oy'$ 平面圆曲线跟踪情况

Fig. 3(b) Track a circle curve in the  $x'Oy'$  plane

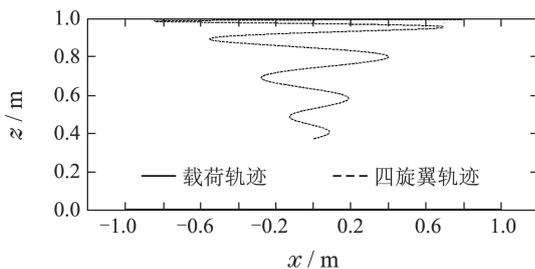


图 3(c)  $x'Oz'$ 平面圆曲线跟踪情况

Fig. 3(c) Track a circle curve in the  $x'Oz'$  plane

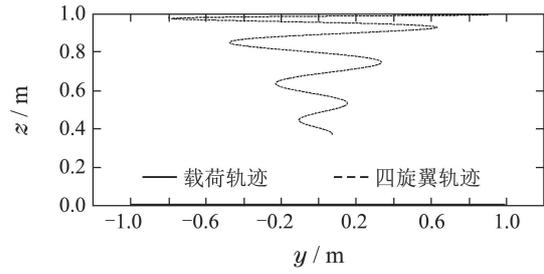


图 3(d)  $y'Oz'$ 平面圆曲线跟踪情况

Fig. 3(d) Track a circle curve in the  $y'Oz'$  plane

图4反映了此演化过程, 图中 $z$ 坐标逐渐减小,  $x, y$ 坐标是幅度逐渐减小的正余弦曲线, 对应着逐渐减小的飞行器飞行半径. 需要注意的是, 载荷的运动半径始终大于飞行器的飞行半径, 与实际情形一致.

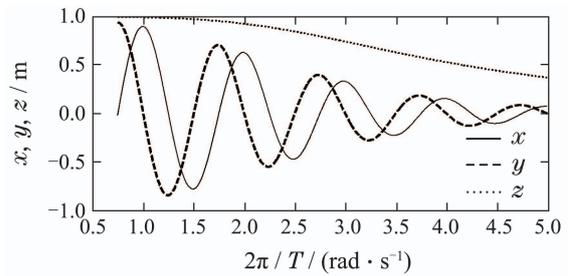


图 4 飞行器轨迹演化曲线

Fig. 4 Trajectory evolution of the quadrotor

### 4.2 基于运动规划的轨迹跟踪

轨迹规划如第3.2节所述, 首先将 $(t_0, t_f)$ 内的参考轨迹分成等时间间隔的 $m + 1$ 段 $(t_0, t_1, \dots, t_m, t_f)$ , 对每一段 $(t_i, t_{i+1})$ , 取初末时刻轨迹坐标的0到2阶导数值, 得到6个边界条件. 设平滑输出为

$$g_i(t) = \sum_{j=0}^5 a_{i,j}t^j, \quad i = 0, 1, \quad (29)$$

代入边界条件, 求得5次多项式的系数. 将规划的多项式曲线作为期望轨迹, 代入式(17)-(18), 得到系统控制输入. 图5是圆周曲线跟踪轨迹, 图6是抛物线跟踪轨迹和误差曲线.

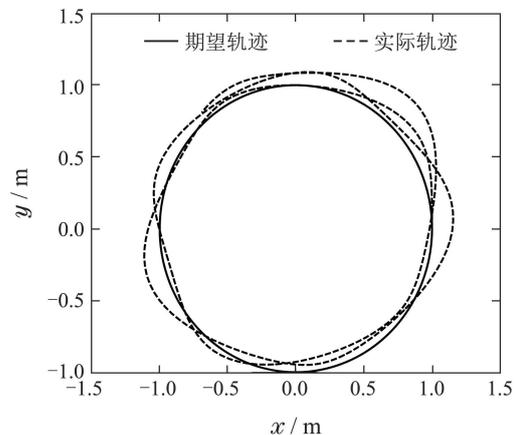


图 5 圆曲线开环控制跟踪轨迹

Fig. 5 Track a circle curve based on loop forward control

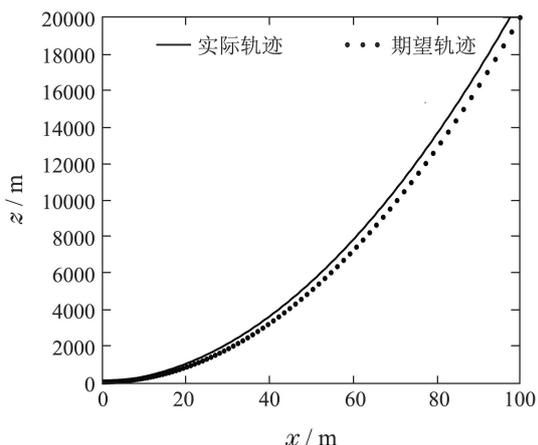


图 6(a) 抛物线开环控制跟踪轨迹

Fig. 6(a) Track a parabola based on loop forward control

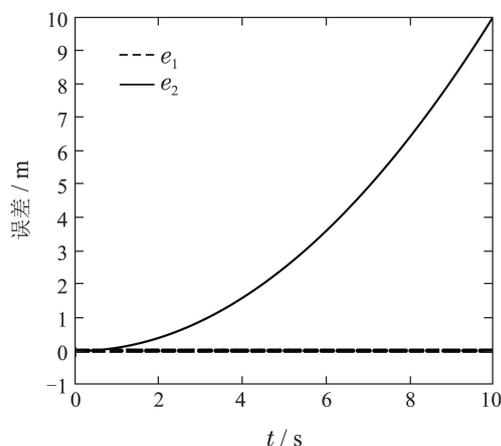


图 6(b) 抛物线曲线轨迹跟踪误差

Fig. 6(b) Trajectory error during parabolic tracking

从图5-6中可以看出, 基于运动规划的前馈开环控制虽然能实现跟踪效果, 但不能使误差收敛. 要实现稳定跟踪, 需要在系统中引入反馈.

### 4.3 基于动态反馈的轨迹跟踪

动态反馈应用式(22)(25)-(26), 仿真中选择下面一组Hurwitz多项式:

$$\begin{cases} p(s) = (s + 1)^4, \\ q(s) = (s + 1)^2(s + 2)^2, \end{cases} \quad (30)$$

展开上式得反馈系数集为

$$\begin{cases} k_{1,0}, k_{1,1}, k_{1,2}, k_{1,3} = \{1, 4, 6, 4\}, \\ k_{2,0}, k_{2,1}, k_{2,2}, k_{2,3} = \{4, 12, 13, 6\}, \end{cases} \quad (31)$$

载荷初始状态为 $(x_1, z_1, \alpha_1, \beta_1) = (1, 0, 0, 0)$ , 步长为 0.01 s. 将第4.2节中规划轨迹作为期望值, 采集 $X_L$ 的 0到3 阶导数作为实际值代入式(26), 求得 $v_1, v_2$ . 再将 $v_1, v_2$ , 系统状态 $\eta_1, \eta_2$ 代入式(22)(25), 解算一次微分方程, 即得到下一时刻的控制输入. 为验证动态反馈控制方法的效果, 将本文所用方法与文献[2]中方法进行比较, 仿真结果见图7-8所示.

图7-8分别是2种控制方法下的跟踪轨迹和轨迹误差, 从图8中可以看出, 相比优化控制方法, 动态反馈方法误差收敛更快, 大约是1 s, 而优化控制方法收敛时间大约是3 s. 另外, 在同样配置的笔记本电脑(惠普446-G3)上, 动态反馈方法运算时间为7 s, 而优化控制方法运算时间为25 s.

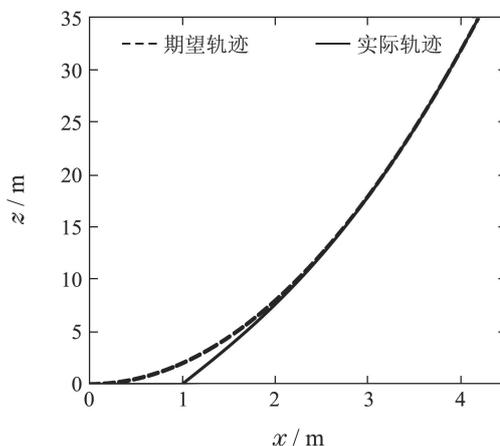


图 7(a) 动态反馈控制跟踪轨迹

Fig. 7(a) Tracking based on dynamical feedback control

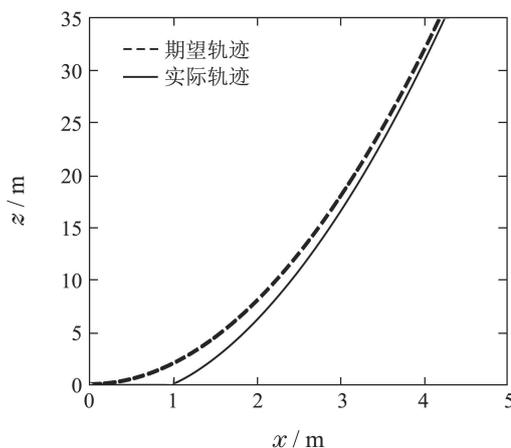


图 7(b) 优化控制算法跟踪轨迹

Fig. 7(b) Tracking based on optimal control

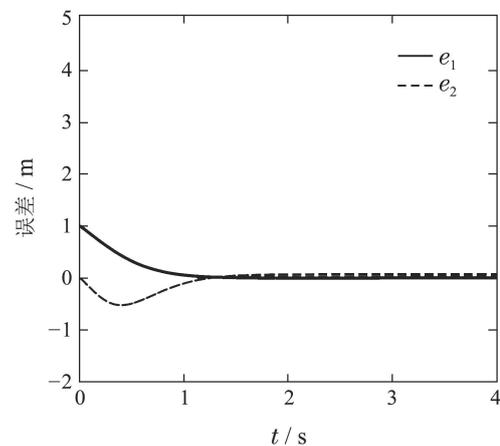


图 8(a) 动态反馈控制轨迹误差

Fig. 8(a) Trajectory error in dynamical feedback control

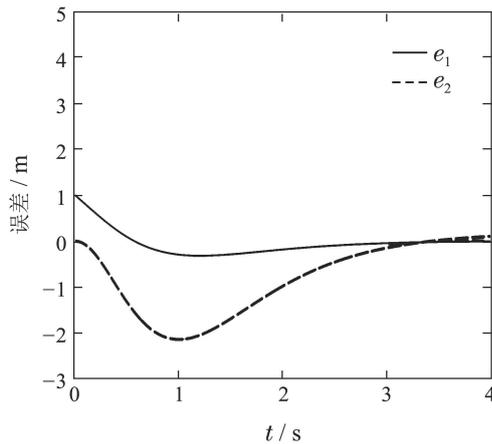


图 8(b) 优化控制轨迹误差

Fig. 8(b) Trajectory error in optimal control

仿真结果表明了动态反馈控制方法的优越性, 它的代价是系统中引入了新状态变量 $\eta_1, \eta_2$ , 它们对应原控制量 $u_{ox}, u_{oy}$ 及其一阶导数值. 这意味着跟踪过程中要不断采集控制变量本身的值及其一阶导数值. 控制变量不仅依赖系统此刻的状态, 还依赖它的历史数据, 它本身受微分方程控制. 这就是动态反馈的特点.

## 5 结论

本文在推导出系统拉格朗日动力学模型的基础上, 提出一种微分平滑控制方法, 较好地实现了四旋翼系绳运输系统轨迹跟踪控制. 微分平滑方法在处理此问题中的应用体现在2个方面: 一是将系统状态和控制变量映射到平滑输出上, 提供了轨迹规划的途径. 二是通过“内反馈”和变量代换, 实现原非线性模型的反馈线性化, 从而推导出跟踪误差指数收敛的轨迹跟踪控制律. 仿真验证了控制律的效果.

针对四旋翼系绳运输系统轨迹跟踪控制问题, 未来的研究工作主要集中在平滑输出的运动规划和系统模型扩展上. 对于轨迹跟踪问题, 输出轨迹的规划直接影响控制效果, 本文只考虑了等式约束, 对于不等式约束情况下的轨迹规划问题, 还需要进一步研究. 另外, 本文建立模型时将系绳近似为直线, 这在系绳较短时是合理的, 当系绳较长时, 运输过程中系绳会发生弯曲, 需要利用有限元分析的方法进行分段处理.

## 参考文献:

- [1] MELLINGER D, LINDSEY Q, SHOMIN M, et al. Design, modeling, estimation and control for aerial grasping and manipulation. *International Conference on Intelligent Robots and Systems*. San Francisco: IEEE, 2011: 2668 – 2673.
- [2] FALANGA D, FOEHN P, SCARAMUZZA D, et al. Fast trajectory optimization for agile quadrotor maneuvers with a cable-suspended payload. *Robotics: Science and Systems*. Boston: RSS, 2017: 1 – 10.
- [3] YI K, GU F, YANG L Y, et al. Sliding mode control for a quadrotor slung load system. *2017 36th Chinese Control Conference*. Dalian: IEEE, 2017: 3697 – 3703.
- [4] SREENATH K, MICHAEL N, KUMAR V. Trajectory generation and control of a quadrotor with a cable-suspended load — a differentially-flat hybrid system. *International Conference on Robotics and Automation*. Karlsruhe, Germany: IEEE, 2013: 4873 – 4880.
- [5] MICHEL F, JEAN L, PHILIPPE M, et al. A Lie-backlund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1999, 44(5): 922 – 937.
- [6] LIU Li, YANG Leping, CAI Weiwei, et al. Differential flatness based trajectory optimization for glide-reentry. *Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance*, 2015, 35(3): 33 – 36.  
(刘莉, 杨乐平, 蔡伟伟, 等. 基于微分平坦的滑翔式再入轨迹优化设计. *弹箭与制导学报*, 2015, 35(3): 33 – 36.)
- [7] HUANG Min. *Trajectory planning research of quadrotor UAV based on differential flatness theory*. Shenyang: Northeastern University, 2013.  
(黄敏. 基于微分平坦理论的四旋翼无人机轨迹规划的研究. 沈阳: 东北大学, 2013.)
- [8] MARTIN P, MURRAY R M, ROUCHON P. *Flat Systems, Equivalence and Feedback*. London, England: Springer, 2001.
- [9] CHU Pei, NI Kun, CHENG Lin. Robust attitude control of lift reentry vehicle based on differential flatness integrated design. *Aerospace Control*, 2017, 5(4): 3 – 10.  
(储培, 倪昆, 程林等. 基于微分平坦的升力式再入飞行器鲁棒姿态控制一体化设计. *航天控制*, 2017, 5(4): 3 – 10.)
- [10] WANG Y, CHAO T, WANG S, et al. Trajectory tracking control based on differential flatness. *Chinese Control Conference*. Chengdu: IEEE, 2016: 10828 – 10832.
- [11] LIAO Weizhong, ZONG Qun, MA Yali. Modeling and finite-time control for quad-rotor mini unmanned aerial vehicles. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(10): 1343 – 1350.  
(廖卫中, 宗群, 马亚丽. 小型四旋翼无人机建模与有限时间控制. *控制理论与应用*, 2015, 32(10): 1343 – 1350.)
- [12] WU Chen, SU Jianbo. Trajectory tracking of quadrotor based on disturbance rejection control. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(11): 1422 – 1430.  
(吴琛, 苏剑波. 四旋翼飞行器的轨迹跟踪抗干扰控制. *控制理论与应用*, 2016, 33(11): 1422 – 1430.)
- [13] MARTIN P, MURRAY R M, ROUCHON P. Flat systems, equivalence and feedback. *Proceedings of European Control Conference*. London: Spring, 2010: 5 – 32.
- [14] CARLOS A I, HEBERTT S R, MIGUEL S S C, et al. The trajectory tracking problem for an unmanned four-rotor system: flatness-based approach. *International Journal of Control*, 2012, 85(1): 69 – 77.
- [15] MICHIEL J V, RICHARD M M J V N, MURRAY R M. Real-time trajectory generation for differentially flat systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1998, 8(4): 995 – 1020.
- [16] FAIZ N, AGRAWAL S K, MURRAY R M. Trajectory planning of differentially flat systems with dynamics and inequalities. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2012, 24(2): 219 – 227.
- [17] FLIESS M. Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples. *International Journal of Control*, 1995, 61(6): 1327 – 1361.

## 作者简介:

梁晓 博士研究生, 主要研究方向为无人飞行器运输系统控制,

E-mail: lzy20131110@sina.com.cn;

胡欲立 教授, 博士生导师, 研究方向为水下航行器设计, E-mail:

zx670821@nwpu.edu.cn.