

线性时变系统有限时间稳定性的数值判定算法

陈志华^{1†}, 解永春^{1,2,3}

(1. 北京控制工程研究所, 北京 100190; 2. 空间智能控制技术重点实验室, 北京 100190;

3. 天津市微重力环境模拟技术重点实验室, 天津 300301)

摘要: 针对系统的初值和系统的状态均限定在多面体集合的情形, 本文从数值计算角度研究了连续线性时变(linear time-varying, LTV)系统有限时间稳定性(finite-time stability, FTS)的判定问题. 首先, 通过求解特定的函数优化问题, 给出了该类系统有限时间稳定的充分必要条件. 然后, 利用所得充分必要条件以及特定函数的Lipschitz连续性性质, 从数值计算角度给出了判定该类系统有限时间稳定性的充分条件. 进一步, 基于所得充分条件, 将特定的函数优化问题转化为相应的线性规划, 提出了一种判定该类系统有限时间稳定性的数值算法. 最后, 给出的4个数值算例说明了本文算法的正确性和有效性, 以及相比已有结果的优越性.

关键词: 线性时变系统; 有限时间稳定性; 多面体集合; 线性规划; 数值算法

引用格式: 陈志华, 解永春. 线性时变系统有限时间稳定性的数值判定算法. 控制理论与应用, 2019, 36(2): 220 – 230

DOI: 10.7641/CTA.2018.80180

Numerical algorithm for analyzing the finite-time stability of linear time-varying systems

CHEN Zhi-hua^{1†}, XIE Yong-chun^{1,2,3}

(1. Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100190, China;

2. Science and Technology on Space Intelligent Control Laboratory, Beijing 100190, China;

3. Tianjin Key Laboratory of Microgravity and Hypogravity Environment Simulation Technology, Tianjin 300301, China)

Abstract: Under the perspective of numerical computation, the paper investigates the finite-time stability (FTS) analysis of continuous linear time-varying (LTV) system when its initial values and its states are all confined within polyhedral sets. First, by solving a certain function optimization problem, the paper proposes a necessary and sufficient condition to guarantee the FTS of continuous LTV systems. Then, by utilizing the obtained condition and the Lipschitz continuity of a certain function, the paper gives two sufficient conditions for deciding the FTS of continuous LTV systems under the perspective of numerical computation. Further, based on the obtained sufficient conditions, a numerical algorithm for analyzing the FTS of continuous LTV systems is detailedly designed by converting a certain function optimization problem into a corresponding linear programming. Finally, four numerical examples are given to illustrate the correctness and effectiveness of the proposed algorithm. Moreover, the advantages of the proposed algorithm over the existing methods are also verified by the numerical examples.

Key words: linear time-varying system; finite-time stability; polyhedral set; linear programming; numerical algorithm

Citation: CHEN Zhihua, XIE Yongchun. Numerical algorithm for analyzing the finite-time stability of linear time-varying systems. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(2): 220 – 230

1 引言

在目前的系统稳定性理论研究中, Lyapunov稳定性理论已经得到了广泛和深入的研究. 众所周知, Lyapunov稳定性研究系统在无穷时间区间上的动态行为. 然而, 实际工程中有不少系统是工作在有限时间区间上的, 如高超声速飞行器爬升过程^[1]、飞行器

再入过程^[2]、航天器交会对接过程^[3]等. 对于这类系统, 通常要求其在有限的工作时间段内满足正常工作所需的性能指标. 而有限时间稳定性(finite-time stability, FTS)的概念, 即刻画系统从某个限定区域 Ω_α 出发的状态在给定的有限时间内不超过另一个限定区域 E_β , 恰好能描述工作在有限时间段内的系统对于稳

收稿日期: 2018–03–15; 录用日期: 2018–06–01.

[†]通信作者. E-mail: chenzhihuahit@126.com; Tel.: +86 10-68378682.

本文责任编辑: 贾英民.

国家重点基础研究发展计划“973”项目(2013CB733100), 国家自然科学基金重点项目(61333008)资助.

Supported by the National Key Basic Research and Development Program “973” (2013CB733100) and the State Key Program of National Natural Science of China (61333008).

定性的要求条件.

Kamenkov在1953年首次提出了有限时间稳定性概念^[4], 经过其后60多年的发展, 有限时间稳定性的研究已取得了大量结果^[5-11]. 需要指出的是, 有限时间稳定的系统不一定是Lyapunov稳定的, 反之亦然, 即这两种稳定性不存在必然的联系. 关于有限时间稳定性和Lyapunov稳定性区别的详细讨论可参见文献[9, 12]. 注意到文献[13]也定义了一种有限时间稳定性, 但文献[13]中的有限时间稳定性定义要求系统是Lyapunov稳定的, 且要求系统轨线在有限时间内收敛到平衡点, 而本文研究的有限时间稳定性和Lyapunov稳定性没有必然联系.

针对连续线性时变(linear time-varying, LTV)系统的有限时间稳定性分析问题, 目前主要有两种方法: 一是构造满足特定要求的V型函数方法^[5-6]. 利用该方法, 文献[5]以一组代数、微分和积分不等式形式给出了一般非线性时变系统有限时间稳定的充分条件, 但所要求的V型函数通常难以构造. 文献[6]构造了一种V型函数, 最终以一组代数、微分不等式形式给出了一般非线性时变系统有限时间稳定的充分必要条件. 然而, 文献[5]和文献[6]给出的判定条件实际上都难以检验, 因为需要遍历所考察区间上的所有时刻进行检验, 因此仅具有理论意义. 二是基于系统所有轨线包线的方法^[9-10]. 文献[9]通过不等式技术估计系统所有轨线包线, 以微分线性矩阵不等式(differential linear matrix inequality, DLMI)形式给出了一系列充分必要条件. 由于没有直接求解DLMI的成熟算法, 通常需要在一定的条件下把DLMI离散化得到LMI再求解, 但这一过程中不可避免地会引入保守性. 文献[10]通过求解系统所有轨线包线的方法, 以代数不等式形式给出了连续LTV系统有限时间稳定的充分必要条件, 但该条件要求精确计算得到系统轨线的包线, 因此必须在理论上对计算误差给出估计, 否则将影响到判定结果的正确性. 此外, 离散LTV系统的有限时间稳定性分析也得到了充分必要条件^[11]. 还有一些文献研究了存在时滞^[14-15]、随机过程^[7, 16]、不确定性^[2, 14, 16]、干扰^[2]、脉冲^[12, 17]、系统切换^[18]等因素时的LTV系统有限时间稳定性分析问题.

尽管关于LTV系统有限时间稳定性分析的研究已经取得了不少结果, 但大都是针对系统的初值和状态都限定在椭球体集合的情形. 当系统的初值或系统的状态限定在多面体集合时, 据笔者所知, 仅有文献[2, 10, 19]进行了相关报道. 针对系统的初值限定在椭球体集合而系统的状态限定在多面体集合的情形, 文献[10]给出了连续LTV系统有限时间稳定的充分必要条件. 针对系统的初值和系统的状态都限定在时不变多面体集合的情形, 文献[19]通过构造多面体形式的

V型函数给出了LTI系统有限时间稳定的充分条件, 但该结果不适用于系统状态限定在时变多面体集合的情形, 也不能用于LTV系统. 针对系统的初值限定在时不变多面体集合而系统的状态限定在时变多面体集合的情形, 文献[2]给出了一种判定连续LTV系统有限时间稳定性的数值算法. 然而, 该算法没有从理论上给出所考察区间的离散划分段数(步长)确定方法, 因此无法在理论上保证判定结果的正确性, 即可能会由于人为离散划分的盲目性而得出错误的判定结果, 第4节的算例2就证实了这个论断. 因此, 如何从数值计算角度简便且可靠地分析LTV系统的有限时间稳定性是需要进一步解决的问题.

基于上述分析, 本文研究了连续LTV系统有限时间稳定性的数值判定算法. 相比于上述文献, 本文的创新和贡献体现在以下3个方面:

1) 针对系统的初值和系统的状态都限定在多面体集合情形, 通过直接求解特定的函数优化问题, 给出了连续LTV系统有限时间稳定的充分必要条件.

2) 从理论上证明了特定函数的Lipschitz连续性, 并利用该性质和所得的充分必要条件, 从数值计算角度分别给出了连续LTV系统有限时间稳定和有限时间不稳定的充分条件.

3) 基于所得充分条件, 通过将特定的函数优化问题转化为相应的线性规划求解问题, 提出了一种判定连续LTV系统有限时间稳定性的数值算法. 相比文献[2]算法, 本文算法给出了所考察区间离散划分段数(步长)的计算公式, 从理论上保证了所提算法的可靠性, 避免了文献[2]算法中人为离散划分的盲目性和由此造成的误判风险. 此外, 本文算法相比文献[19]方法的适用范围更广.

本文后续内容安排如下: 第2节给出了本文研究的问题描述以及用到的相关引理; 第3节给出了连续LTV系统的有限时间稳定的充分必要条件和充分条件, 以及有限时间不稳定的充分条件, 并提出了判定连续LTV系统有限时间稳定性的数值算法; 第4节给出了4个算例, 检验了本文结果的正确性和有效性; 第5节给出了本文结论.

符号说明: $\forall$ 表示任意. $\mathbb{R}$ 表示实数域, $\mathbb{R}^{n \times 1}$ 表示 n 维实列向量空间, $\mathbb{R}^{n \times n}$ 表示全体 n 阶实矩阵构成的空间. $C[W, \mathbb{R}^{n \times n}]$ 表示定义在区间 W , $W \subseteq \mathbb{R}$ 上的所有连续 n 阶实矩阵值函数构成的空间, $C^2[W, \mathbb{R}^{n \times 1}]$ 表示定义在区间 W 上的所有二阶连续可微的 n 维实列向量值函数构成的空间. $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 分别表示矩阵或向量的1范数和2范数. 上标“ T ”表示矩阵或向量的转置. I_n 表示 n 阶单位矩阵, $\mathbf{0}$ 表示 $\mathbb{R}^{n \times 1}$ 中的零向量. $[a]$ 表示最接近实数 a 且不小于 a 的整数.

2 问题描述与预备知识

2.1 问题描述

考虑LTV系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t), \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 为状态变量, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ 为系统初值, 且系统矩阵 $A(t) \in C[J, \mathbb{R}^{n \times n}]$, $J = [t_0, +\infty]$.

注1 上述条件保证了系统(1)在 J 的任意闭子区间上的解是存在且唯一的^[20].

针对系统初值和系统状态均限定在多面体集合的情形, 文献[19]给出了系统(1)的有限时间稳定性定义, 且采用不等式形式^[19]表示相应的多面体集合. 本文也采用不等式形式表示系统(1)的初值限定集合和状态限定集合, 分别如式(2)和式(3)所示.

考虑多面体集合

$$\Omega_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1} : |f_j^T \mathbf{x}| \leq 1, j = 1, \dots, M\} \quad (2)$$

和时变多面体集合

$$E_t = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1} : |h_i^T(t)\mathbf{x}| \leq 1, \forall t \in T_w, i = 1, \dots, N\}, \quad (3)$$

其中: $T_w \triangleq [t_0, t_0 + T]$ 为考察区间, $T > 0$ 为给定常数, 常值向量 $f_j \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, 函数向量 $h_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $t \in T_w$, 且 $\Omega_0 \subseteq E_{t_0}$.

注2 1) 集合 Ω_0 具有中心对称性, 即对于 $\forall \mathbf{x}_0 \in \Omega_0$, 有 $-\mathbf{x}_0 \in \Omega_0$. 2) 容易验证集合 Ω_0 和 E_t 均为紧凸多面体. 3) 相比文献[19], 本文定义的多面体集合 E_t 是时变的, 故本文定义的多面体集合 E_t 的适用范围更广.

定义1^[19] 给定 (Ω_0, E_t, T_w) , 称系统(1)相对于参数 (Ω_0, E_t, T_w) 有限时间稳定(finite time stable, FTS): 若对于 $\forall \mathbf{x}_0 \in \Omega_0$, $t \in T_w$, 有 $\mathbf{x}(t) \in E_t$.

图1给出了有限时间稳定性的示意图(以 $n = 2$ 为例).

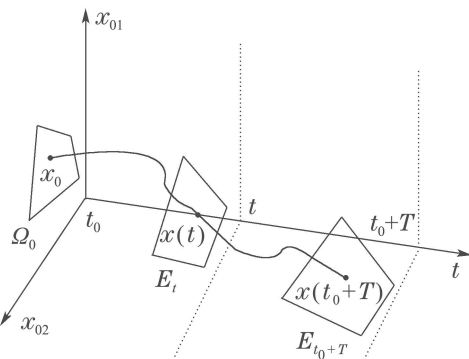


图1 有限时间稳定性示意图

Fig. 1 Sketch of the finite-time stability

定义2 给定 (Ω_0, E_t, T_w) , 称系统(1)相对于参

数 (Ω_0, E_t, T_w) 有限时间不稳定(finite time unstable, FTUS): 若存在 $\mathbf{x}_0 \in \Omega_0$ 和 $t \in T_w$, 使得 $\mathbf{x}(t) \notin E_t$.

下面给出本文主要研究问题的描述.

问题 针对系统(1), 给定集合 Ω_0 , E_t 和考察区间 T_w , 确定在什么条件下, 系统(1)相对 (Ω_0, E_t, T_w) 有限时间稳定.

2.2 相关引理

假设1 设 $\max_{i,j=1,\dots,n} (\max_{t \in T_w} |a_{ij}(t)|) \leq M_a$, 且 M_a 已知. 其中, $a_{ij}(t)$ 表示系统矩阵 $A(t)$ 的元素, $i, j = 1, \dots, n$.

假设2 假设式(3)中函数向量 $h_i(t) \in C^2[T_w, \mathbb{R}^{n \times 1}]$, 满足 $\max_{t \in T_w} \|\ddot{h}_i(t)\| \leq M_{ddh_i}$, 且 M_{ddh_i} 已知, $i = 1, \dots, N$.

引理1 考虑系统(1), 给定考察区间 $T_w = [t_0, t_0 + T]$, 函数 $M_i(t)$ 和 $m_i(t)$, $t \in T_w$, $i = 1, \dots, N$ 分别定义为下述优化问题(4)和(5)的解:

$$M_i(t) \triangleq \max_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_0} h_i^T(t)\Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0, \quad (4)$$

$$m_i(t) \triangleq \min_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_0} h_i^T(t)\Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0, \quad (5)$$

则有下列性质:

- 1) $M_i(t) = -m_i(t)$, $\forall t \in T_w$, $i = 1, \dots, N$;
- 2) $\bar{M}_i = -\underline{m}_i$, $i = 1, \dots, N$;
- 3) $\bar{M} = -\underline{m}$,

其中: $\Phi(t, t_0)$ 为系统(1)的状态转移矩阵, 即满足方程

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \\ \Phi(t_0, t_0) = I_n. \end{cases} \quad (6)$$

参数 $\bar{M} = \max_{i=1,\dots,N} \bar{M}_i$, $\bar{M}_i = \max_{t \in T_w} M_i(t)$, 而参数 $\underline{m} = \min_{i=1,\dots,N} \underline{m}_i$, $\underline{m}_i = \min_{t \in T_w} m_i(t)$, $i = 1, \dots, N$.

证 根据函数 $M_i(t)$ 的定义式(4), 函数 $m_i(t)$ 的定义式(5)和注2即可证明, 不再详细给出. 证毕.

注3 根据集合 Ω_0 的定义式(2)可知, 对于任意给定的 $t \in T_w$, 求解优化问题(4)和(5)等价于求解相应的线性规划, 故可以利用MATLAB优化工具箱的linprog函数^[21]求解.

引理2 考虑系统(1), 给定集合 Ω_0 , E_t 和考察区间 $T_w = [t_0, t_0 + T]$, 则函数 $M_i(t)$ 在 T_w 上Lipschitz连续, 且Lipschitz常数

$$L_{M_i} = M_{X0} M_\Phi (M_{dh_i} + M_{h_i} M_A),$$

其中: $M_i(t)$, $i = 1, \dots, N$ 同引理1, 参数 $M_{X0} = \max_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_0} \|\mathbf{x}_0\|$, $M_\Phi = \max_{t \in T_w} \|\Phi(t, t_0)\|$, $M_{dh_i} = \max_{t \in T_w} \|\dot{h}_i(t)\|$, 而 $M_{h_i} = \max_{t \in T_w} \|h_i(t)\|$, $M_A = \max_{t \in T_w} \|A(t)\|$.

证 根据Lipschitz连续定义来证. 下面首先证明函数 $M_i(t)$ 在 T_w 上Lipschitz连续.

对于 $\forall t_1 \leq t_2 \in T_w$, 记

$$\mathbf{x}_{01} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_0} h_i^T(t_1) \Phi(t_1, t_0) \mathbf{x}_0,$$

$$\mathbf{x}_{02} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_0} h_i^T(t_2) \Phi(t_2, t_0) \mathbf{x}_0.$$

注意到 $\mathbf{0} \in \Omega_0$, 则根据式(4)可知 $M_i(t) \geq 0$, $i = 1, \dots, N$, 故 $M_i(t_2)$ 和 $M_i(t_1)$ 同非负号.

若 $M_i(t_1) \geq M_i(t_2)$, 则

$$\begin{aligned} |M_i(t_2) - M_i(t_1)| &= \\ h_i^T(t_1) \Phi(t_1, t_0) \mathbf{x}_{01} - h_i^T(t_2) \Phi(t_2, t_0) \mathbf{x}_{02} &\leq \\ h_i^T(t_1) \Phi(t_1, t_0) \mathbf{x}_{01} - h_i^T(t_2) \Phi(t_2, t_0) \mathbf{x}_{01} &= \\ |h_i^T(t_1) \Phi(t_1, t_0) \mathbf{x}_{01} - h_i^T(t_2) \Phi(t_2, t_0) \mathbf{x}_{01}| &\leq \\ \max_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_0} |h_i^T(t_2) \Phi(t_2, t_0) \mathbf{x}_0 - h_i^T(t_1) \Phi(t_1, t_0) \mathbf{x}_0|. \end{aligned}$$

若 $M_i(t_1) \leq M_i(t_2)$, 则

$$\begin{aligned} |M_i(t_2) - M_i(t_1)| &= \\ h_i^T(t_2) \Phi(t_2, t_0) \mathbf{x}_{02} - h_i^T(t_1) \Phi(t_1, t_0) \mathbf{x}_{01} &\leq \\ h_i^T(t_2) \Phi(t_2, t_0) \mathbf{x}_{02} - h_i^T(t_1) \Phi(t_1, t_0) \mathbf{x}_{02} &= \\ |h_i^T(t_2) \Phi(t_2, t_0) \mathbf{x}_{02} - h_i^T(t_1) \Phi(t_1, t_0) \mathbf{x}_{02}| &\leq \\ \max_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_0} |h_i^T(t_2) \Phi(t_2, t_0) \mathbf{x}_0 - h_i^T(t_1) \Phi(t_1, t_0) \mathbf{x}_0|. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} |M_i(t_2) - M_i(t_1)| &\leq \\ \max_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_0} |h_i^T(t_2) \Phi(t_2, t_0) \mathbf{x}_0 - h_i^T(t_1) \Phi(t_1, t_0) \mathbf{x}_0| &\leq \\ M_{X0} \|h_i^T(t_2) \Phi(t_2, t_0) - h_i^T(t_1) \Phi(t_1, t_0)\|, \end{aligned}$$

其中 $M_{X0} = \max_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_0} \|\mathbf{x}_0\|$.

再根据微分中值定理^[20]和矩阵范数的性质^[20, 22]可知

$$\begin{aligned} |M_i(t_2) - M_i(t_1)| &\leq \\ M_{X0} \|h_i^T(t_2) \Phi(t_2, t_0) - h_i^T(t_1) \Phi(t_1, t_0)\| &\leq \\ M_{X0} \|\dot{h}_i^T(t_{12}) \Phi(t_{12}, t_0) + \\ h_i^T(t_{12}) A(t_{12}) \Phi(t_{12}, t_0)\| |t_1 - t_2| &\leq \\ M_{X0} (M_{dh_i} M_\Phi + M_{h_i} M_A M_\Phi) |t_1 - t_2| &= \\ M_{X0} M_\Phi (M_{dh_i} + M_{h_i} M_A) |t_1 - t_2| \triangleq \\ L_{M_i} |t_1 - t_2|, \end{aligned}$$

其中:

$$M_\Phi = \max_{t \in T_w} \|\Phi(t, t_0)\|,$$

$$M_{dh_i} = \max_{t \in T_w} \|\dot{h}_i(t)\|,$$

而

$$M_{h_i} = \max_{t \in T_w} \|h_i(t)\|,$$

$$M_A = \max_{t \in T_w} \|A(t)\|.$$

因此, $M_i(t)$, $i = 1, \dots, N$ 在 T_w 上Lipschitz连续, 且Lipschitz常数为 $L_{M_i} = M_{X0} M_\Phi (M_{dh_i} + M_{h_i} M_A)$, $i = 1, \dots, N$. 证毕.

引理2从理论上证明了函数 $M_i(t)$, $i = 1, \dots, N$, 是Lipschitz连续的, 下述引理3给出了函数 $M_i(t)$, $i = 1, \dots, N$ 的Lipschitz常数的具体估算方法.

引理3 考虑系统(1), 给定集合 Ω_0 , E_t 和考察区间 $T_w = [t_0, t_0 + T]$, 设定数值计算精度 $E \in (0, 0.01]$, 则函数 $M_i(t)$, $i = 1, \dots, N$ 的Lipschitz常数 L_{M_i} 的估计值为

$$\tilde{L}_{M_i} = M_{X0} \tilde{M}_\Phi (\tilde{M}_{dh_i} + \tilde{M}_{h_i} \tilde{M}_A),$$

其中: M_{X0} 为多面体集合 Ω_0 的所有顶点处 $\|\mathbf{x}_0\|$ 的最大值,

$$\tilde{M}_A = n\sqrt{n} M_A,$$

$$\tilde{M}_\Phi = (1 + E) \max_{k=0, \dots, N_h} \|\Phi(t_k, t_0)\|,$$

$$N_h = \lceil T/h \rceil,$$

而 $h > 0$ 满足

$$\tilde{M}_A e^{\tilde{M}_A h} h \leq E,$$

$$\tilde{M}_{dh_i} = \max_{k=0, \dots, N_{dh_i}} \|\dot{h}_i(t_k)\| + E,$$

$$N_{dh_i} = \lceil M_{ddh_i} T/E \rceil,$$

参数

$$\tilde{M}_{h_i} = \max_{k=0, \dots, N_{h_i}} \|h_i(t_k)\| + E,$$

$$N_{h_i} = \lceil \tilde{M}_{dh_i} T/E \rceil, \quad i = 1, \dots, N.$$

证 根据引理2可知

$$L_{M_i} = M_{X0} M_\Phi (M_{dh_i} + M_{h_i} M_A),$$

其中: 参数 $M_{X0} = \max_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_0} \|\mathbf{x}_0\|$, $M_\Phi = \max_{t \in T_w} \|\Phi(t, t_0)\|$,

$$M_{dh_i} = \max_{t \in T_w} \|\dot{h}_i(t)\|, \quad M_{h_i} = \max_{t \in T_w} \|h_i(t)\|, \quad M_A = \max_{t \in T_w} \|A(t)\|.$$

首先估计 M_{X0} 的上界, 则根据文献[23]可知: 多面体集合 Ω_0 所有顶点(有限多个)处的 $\|\mathbf{x}_0\|$ 的最大值即为 M_{X0} .

考虑估计 $M_A = \max_{t \in T_w} \|A(t)\|$ 上界, 则根据矩阵范数性质^[22]可知

$$M_A = \max_{t \in T_w} \|A(t)\| \leq$$

$$\sqrt{n} \max_{t \in T_w} \|A(t)\|_1 \leq$$

$$n\sqrt{n} \max_{t \in T_w} (\max_{i,j=1, \dots, n} |a_{ij}(t)|) =$$

$$n\sqrt{n} \max_{i,j=1, \dots, n} (\max_{t \in T_w} |a_{ij}(t)|),$$

其中 n 为系统(1)的阶次.

再根据假设1可知 $\max_{i,j=1,\dots,n} (\max_{t \in T_w} |a_{ij}(t)|) \leq M_a$, 故可计算得到 M_A 的上界估计值

$$\tilde{M}_A = n\sqrt{n}M_a.$$

考虑估计 M_Φ 上界. 对于给定数值计算精度 E , 取步长 $h > 0$ 满足 $\tilde{M}_A e^{\tilde{M}_A h} h \leq E$, 则对于 $\forall t_1 \leq t_2 \in [t, t+h] \subseteq T_w$, 根据矩阵范数性质和 $\|\Phi(t, t_0)\|$ 的估计式^[22]可知

$$\begin{aligned} & \|\|\Phi(t_1, t_0)\| - \|\Phi(t_2, t_0)\|\| \leq \\ & \|\Phi(t_1, t_0) - \Phi(t_2, t_0)\| \leq \\ & \max_{t \in T_w} \|A(t)\| \|\Phi(t_{12}, t_0)\| |t_1 - t_2| \leq \\ & M_A h \max_{t_{12} \in [t, t+h]} \|\Phi(t_{12}, t_0)\| \leq \\ & M_A h (\max_{t_{12} \in [t, t+h]} \|\Phi(t_{12}, t)\|) \|\Phi(t, t_0)\| \leq \\ & M_A h e^{M_A h} \|\Phi(t, t_0)\| \leq \|\Phi(t, t_0)\| E. \end{aligned}$$

令 $t = t_1$, 则对于 $\forall t_2 \in [t_1, t_1 + h] \subseteq T_w$, 则

$$\|\|\Phi(t_1, t_0)\| - \|\Phi(t_2, t_0)\|\| \leq \|\Phi(t_1, t_0)\| E,$$

因此, $\max_{t \in [t_1, t_1+h]} \|\Phi(t, t_0)\| \leq \|\Phi(t_1, t_0)\| (1 + E)$.

故将 T_w 均匀划分 $N_h = \lceil T/h \rceil$ 段, 即可计算得到 M_Φ 的近似值

$$\tilde{M}_\Phi = (1 + E) \max_{k=0, \dots, N_h} \|\Phi(t_k, t_0)\|.$$

再考虑估计参数 M_{h_i} 和 M_{dh_i} , $i = 1, \dots, N$ 的上界, 则根据假设2可知 $h_i(t) \in C^2[T_w, \mathbb{R}^{n \times 1}]$, 且对于 $\forall t_1 \leq t_2 \in T_w$, 有

$$\begin{aligned} & \|\dot{h}_i(t_1)\| - \|\dot{h}_i(t_2)\| \leq \|\dot{h}_i(t_1) - \dot{h}_i(t_2)\| \leq \\ & \|\ddot{h}_i(t_{12})\| |t_1 - t_2| \leq \max_{t \in T_w} \|\ddot{h}_i(t)\| |t_1 - t_2| \leq \\ & M_{ddh_i} |t_1 - t_2|, \end{aligned}$$

故将 T_w 均匀划分 $N_{dh_i} = \lceil M_{ddh_i} T/E \rceil$ 段, 即可计算得到 M_{dh_i} 的上界估计值为

$$\tilde{M}_{dh_i} = \max_{k=0, \dots, N_{dh_i}} \|\dot{h}_i(t_k)\| + E.$$

类似地, 将 T_w 均匀划分 $N_{h_i} = \lceil \tilde{M}_{dh_i} T/E \rceil$ 段, 即可得到 M_{h_i} 的上界估计值为

$$\tilde{M}_{h_i} = \max_{k=0, \dots, N_{h_i}} \|h_i(t_k)\| + E.$$

因此, 函数 $M_i(t)$ 的Lipschitz常数 L_{M_i} 的估计值为

$$\tilde{L}_{M_i} = M_{X0} \tilde{M}_\Phi (\tilde{M}_{dh_i} + \tilde{M}_{h_i} \tilde{M}_A).$$

显然, $\tilde{L}_{M_i} \geq L_{M_i}$. 证毕.

引理4 考虑系统(1), 给定集合 Ω_0 , E_t 和考察区间 $T_w = [t_0, t_0 + T]$, 设定数值计算精度 $E \in (0, 0.01]$, 则 $\max_{t \in T_w} M_i(t)$ 和 $\max_{t \in T_w} m_i(t)$, $i = 1, \dots, N$, 分别满足

$$0 \leq \max_{t \in T_w} M_i(t) - \max_{k=0, \dots, N_i} M_i(t_k) \leq E \quad (7)$$

和

$$0 \leq \min_{k=0, \dots, N_i} m_i(t_k) - \min_{t \in T_w} m_i(t) \leq E, \quad (8)$$

其中: 离散划分点 $t_k = t_0 + kT/N_i$, $k = 0, \dots, N_i$, $N_i = \lceil \tilde{L}_{M_i} T/E \rceil$, 而参数 $\tilde{L}_{M_i}$ 同引理3.

证 根据引理2可知 $M_i(t)$ 在 T_w 上Lipschitz连续, 且Lipschitz常数 $L = L_{M_i}$.

记 $t^* \triangleq \operatorname{argmax}_{t \in T_w} M_i(t)$, 则

$$M_i(t^*) = \max_{t \in T_w} M_i(t),$$

显然, 必存在某个 $p \in \{0, \dots, N_i - 1\}$, 使得 t^* 位于离散划分点区间 $[t_p, t_{p+1}]$ 上, 故

$$0 \leq M_i(t^*) - M_i(t_p) \leq L|t^* - t_p| \leq LT/N_i.$$

再由题设可知 $N_i \geq \lceil L_{M_i} T/E \rceil$, 故

$$M_i(t_p) \leq M_i(t^*) \leq M_i(t_p) + E.$$

显然, $M_i(t_p) \leq \max_{k=0, \dots, N_i} M_i(t_k)$, 而

$$M_i(t^*) \geq \max_{k=0, \dots, N_i} M_i(t_k),$$

故

$$\begin{aligned} & \max_{k=0, \dots, N_i} M_i(t_k) \leq M_i(t^*) \leq \\ & \max_{k=0, \dots, N_i} M_i(t_k) + E. \end{aligned}$$

因此,

$$0 \leq \max_{t \in T_w} M_i(t) - \max_{k=0, \dots, N_i} M_i(t_k) \leq E.$$

至此, 证明了式(7)成立.

再根据引理1的结论(1)和(2)可得

$$0 \leq \min_{k=0, \dots, N_i} m_i(t_k) - \min_{t \in T_w} m_i(t) \leq E,$$

即式(8)成立. 证毕.

3 主要结果

本节首先给出系统(1)有限时间稳定的充分必要条件. 然后, 从数值计算角度分别给出系统(1)有限时间稳定和有限时间不稳定的充分条件.

3.1 充分必要条件(Necessary and sufficient condition)

定理1 考虑系统(1), 给定集合 Ω_0 , E_t 和考察区间 $T_w = [t_0, t_0 + T]$, 则系统(1)相对 (Ω_0, E_t, T_w) 有限时间稳定的充分必要条件为

$$\bar{M} \leq 1,$$

其中 $\bar{M}$ 同引理1.

证 充分性. 若 $\bar{M} \leq 1$, 则根据 $\bar{M}$ 的定义可知

$$\max_{i=1, \dots, N} (\max_{t \in T_w} M_i(t)) \leq 1,$$

注意到

$$M_i(t) = \max_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_0} h_i^T(t) \Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0 = \max_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_0} h_i^T(t) \mathbf{x}(t),$$

$$\text{则 } \max_{i=1, \dots, N} (\max_{t \in T_w} (\max_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_0} h_i^T(t) \mathbf{x}(t))) \leq 1.$$

根据引理1可知 $\bar{M} = -\underline{m}$, 因此

$$\min_{i=1, \dots, N} (\min_{t \in T_w} (\min_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_0} h_i^T(t) \mathbf{x}(t))) \geq -1,$$

故对于 $\forall t \in T_w, \forall i \in \{1, \dots, N\}$, 有

$$-1 \leq h_i^T(t) \mathbf{x}(t) \leq 1,$$

$$\text{即 } |h_i^T(t) \mathbf{x}(t)| \leq 1, \forall t \in T_w, \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

因此, 根据定义1可知系统(1)相对 (Ω_0, E_t, T_w) 有有限时间稳定.

必要性. 采用反证法, 假设 $\bar{M} > 1$.

由于 $\bar{M} = \max_{i=1, \dots, N} \bar{M}_i$, $\bar{M}_i = \max_{t \in T_w} M_i(t)$, 故存在某一个 $k \in \{1, \dots, N\}$, 使得 $\bar{M}_k > 1$, 即 $\bar{M}_k = \max_{t \in T_w} M_k(t) > 1$.

记 $t^* = \operatorname{argmax}_{t \in T_w} M_k(t)$, 则 $M_k(t^*) > 1$. 因此,

$$M_k(t^*) = \max_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_0} h_k^T(t^*) \Phi(t^*, t_0) \mathbf{x}_0.$$

记 $\mathbf{x}_0^* = \operatorname{argmax}_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_0} M_k(t^*)$, 则

$$M_k(t^*) = h_k^T(t^*) \Phi(t^*, t_0) \mathbf{x}_0^*,$$

即存在 $\mathbf{x}_0^* \in \Omega_0, t^* \in T_w$, 使得

$$h_k^T(t^*) \Phi(t^*, t_0) \mathbf{x}_0^* > 1,$$

记 $\mathbf{x}(t^*) = \Phi(t^*, t_0) \mathbf{x}_0^*$, 则 $h_k^T(t^*) \mathbf{x}(t^*) > 1$.

根据集合 E_t 的定义可知 $\mathbf{x}(t^*) \notin E_t$, 因此根据定义2可得: 系统(1)相对 (Ω_0, E_t, T_w) 有限时间不稳定, 产生矛盾. 因此假设不成立, 即 $\bar{M} \leq 1$.

因此, 系统(1)相对 (Ω_0, E_t, T_w) 有限时间稳定当且仅当 $\bar{M} \leq 1$. 证毕.

注4 1) 由于集合 Ω_0 为多面体, 因此难以得到像文献[10]中定理4的显式判定条件. 2) 定理1为分析系统(1)的有限时间稳定性提供了理论依据, 但该定理不便于直接检验, 因为不可能遍历所有的 $t \in T_w$ 来计算函数值 $M_i(t)$.

3.2 充分条件

基于定理1, 下述定理2和推论1分别从数值计算角度给出了系统(1)的有限时间稳定和有限时间不稳定的理论基础.

定理2 考虑系统(1), 给定集合 Ω_0, E_t 和考察区间 $T_w = [t_0, t_0 + T]$, 设定数值精度 $E \in (0, 0.01]$, 则系统(1)相对 (Ω_0, E_t, T_w) 有限时间稳定的充分条件为

$$\tilde{M} \leq 1 - E.$$

其中: 参数 $\tilde{M} = \max_{i=1, \dots, N} \tilde{M}_i$, $\tilde{M}_i = \max_{k=1, \dots, N_i} M_i(t_k)$, $t_k = t_0 + kT/N_i$, $k = 0, \dots, N_i$, $N_i = \lceil \tilde{L}_{M_i} T/E \rceil$, 而 $\tilde{L}_{M_i}$ 同引理3.

证 证明略去, 根据引理4和定理1即可证明.

推论1 考虑系统(1), 给定集合 Ω_0, E_t 和考察区间 $T_w = [t_0, t_0 + T]$, 设定数值精度 $E \in (0, 0.01]$, 则系统(1)相对 (Ω_0, E_t, T_w) 有限时间不稳定的充分条件为

$$\tilde{M} > 1.$$

其中参数 $\tilde{M}$ 同定理2.

证 证明略去, 根据引理4和定理1即可证明.

注5 由于不可能计算出所有时刻 $t \in T_w$ 处的函数值 $M_i(t)$, 故采用 $\max_{k=0, \dots, N_i} M_i(t_k)$ 近似 $\max_{t \in T_w} M_i(t)$, 定理2和推论1的不必要性就是由 $\max_{k=0, \dots, N_i} M_i(t_k)$ 来近似 $\max_{t \in T_w} M_i(t)$ 的离散误差造成的.

3.3 数值算法

基于定理2、推论1以及引理3, 即可设计出判定系统(1)有限时间稳定性的数值算法, 具体见表1.

表1 连续LTV系统有限时间稳定性的数值判定算法
Table 1 Numerical algorithm for analyzing the finite-time stability of continuous LTV systems

Input: 系统(1)的系统矩阵 $A(t)$, 集合 Ω_0, E_t , 考察区间 $T_w = [t_0, t_0 + T]$, 数值计算精度 $E \in (0, 0.01]$.

Output: Flag = 1, 有限时间稳定; Flag = 0, 有限时间不稳定; Flag = -1, 算法失效.

- 1) 对于每个 $i \in \{1, \dots, N\}$, 按照引理3方法, 计算得到函数 $M_i(t)$ 的Lipschitz常数的估计值 $\tilde{L}_{M_i}$;
- 2) 将 T_w 均匀划分 $N_i = \lceil \tilde{L}_{M_i} T/E \rceil$ 段, 得到离散划分点序列 $\{t_k\}, k = 0, \dots, N_i$;
- 3) 数值求解方程(6)得到状态转移矩阵 $\Phi(t, t_0)$ 在离散划分点 $t_k, k \in \{0, \dots, N_i\}$ 处的值 $\Phi(t_k, t_0)$, 代入优化问题(4), 再将优化问题(4)转化为标准线性规划形式^[21];
- 4) 调用MATLAB优化工具箱的linprog函数^[21]求解第3步中所得的线性规划, 得到参数 $M_i(t_k)$;
- 5) 对所有 $t_k, k = 0, \dots, N_i$, 按照第3)–5)步循环, 计算 $\bar{M}_i$ 的近似值 $\tilde{M}_i = \max_{k=0, \dots, N_i} M_i(t_k)$;
- 6) 对于每个 $i = 1, \dots, N$, 按照第1)–5)步循环, 计算得到参数 $\bar{M}$ 的近似值 $\tilde{M} = \max_{i=1, \dots, N} \tilde{M}_i$;
- 7) a) 若 $\tilde{M} \leq 1 - E$, 根据定理2可得系统(1)有限时间稳定, 输出Flag = 1;
b) 若 $\tilde{M} > 1$, 根据推论1可得系统(1)有限时间不稳定, 输出Flag = 0;
c) 若 $1 - E \leq \tilde{M} < 1$, 无法判断, 即算法失效, 输出Flag = -1.

注6 1) 算法第4步中函数 $M_i(t)$, $i=1, \dots, N$ 在 t_k 处的函数值 $M_i(t_k)$, $k=0, \dots, N_i$ 的数值计算误差远小于设定的数值计算精度 E , 因此忽略不计. 2) 参数 $\tilde{M}_i$, $i=1, \dots, N$ 的计算过程具有并行性, 即算法第1)–6)步可并行执行. 此外, 函数值 $M_i(t_k)$, $k=0, \dots, N_i$ 的计算过程也具有并行性, 即算法第3)–5)步可并行执行以提高计算效率.

4 算例分析

下面通过4个数值算例, 来说明所提数值算法的正确性和有效性.

例1 考察本文算法的判定效果

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 - 1.5 \cos t & -1 + 0.75 \sin(2t) \\ -1 + 0.75 \sin(2t) & -1 - 1.5 \sin t \end{bmatrix}.$$

给定 $t_0 = 0$, $T = 3$, 即 $T_w = [0, 3]$, 系统初值限定集合

$$\Omega_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2 \times 1} : |x_1 - x_2| \leq 1, |x_1 + x_2| \leq 1\}$$

及系统状态限定集合

$$E_t = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2 \times 1} : |(1 - 0.1e^{-t})(x_1 - x_2)| \leq 1, |(5 - 2.5e^{-t})(x_1 + x_2)/3| \leq 1\}.$$

计算可知 $\Omega_0 \subseteq E_{t_0}$, 且 $h_1(t) = (1 - 0.1e^{-t})[1 \ -1]^T$, $h_2(t) = (5 - 2.5e^{-t})[1/3 \ 1/3]^T$.

设定数值计算精度 $E = 0.01$, 利用本文数值算法判断例1系统的有限时间稳定性, 则函数曲线 $M_i(t) = \max_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_0} h_i^T(t)\Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0$, $t \in T_w$, $i = 1, 2$, 如图2所示.

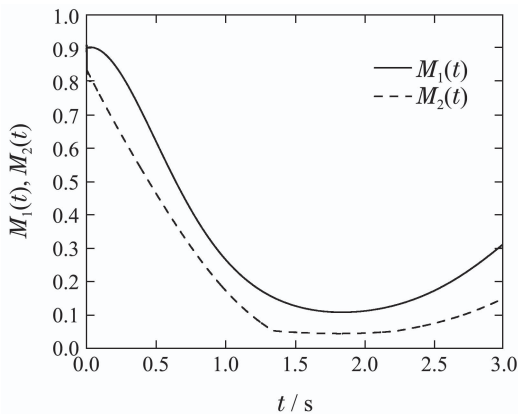


图2 $T_w = [0, 3]$ 时的函数曲线 $M_i(t)$, $i = 1, 2$

Fig. 2 Function curve $M_i(t)$, $i = 1, 2$ when $T_w = [0, 3]$

此外, 计算得到参数 $\tilde{M}_1 = 0.9012$, $\tilde{M}_2 = 0.8333$, 即参数 $\tilde{M} = 0.9012$, 因此根据定理2可知, 例1系统相对 (Ω_0, E_t, T_w) 有限时间稳定.

再考虑 $T_0 = 0$, $T = 10$, 即 $T_w = [0, 10]$ 的情形. 设定数值计算精度 $E = 0.01$, 再次利用本文数值算法判断例1系统的有限时间稳定性, 则函数曲线 $M_i(t)$, $i = 1, 2$, 如图3所示.

计算得到参数 $\tilde{M}_1 = 2.7119$, $\tilde{M}_2 = 1.3223$, 即参

数 $\tilde{M} = 2.7119$, 因此根据推论1可知, 例1系统相对 (Ω_0, E_t, T_w) 有限时间不稳定.

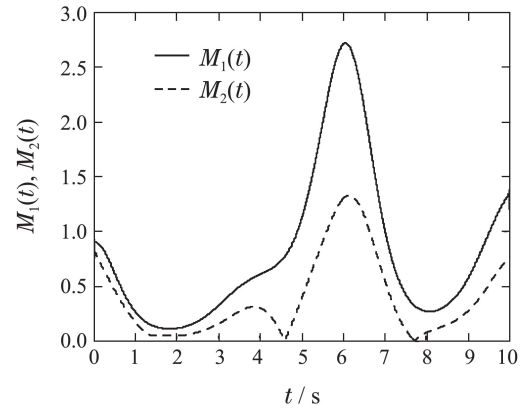


图3 $T_w = [0, 10]$ 时的函数曲线 $M_i(t)$, $i = 1, 2$

Fig. 3 Function curve $M_i(t)$, $i = 1, 2$ when $T_w = [0, 10]$

例2 对比本文算法与文献[2]算法的判定效果

$$A(t) =$$

$$\begin{bmatrix} -1 - 1.5 \sin(100t) & -1 + 1.5 \sin t \cos(100t) \\ -1 + 1.5 \sin(100t) \cos t & -1 - 1.5 \cos(100t) \end{bmatrix},$$

给定 $t_0 = 0$, $T = 5$, 即 $T_w = [0, 5]$, 系统初值限定集合

$$\Omega_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2 \times 1} : |0.98(x_1 - x_2)| \leq 1, |0.98(x_1 + x_2)| \leq 1\}$$

及系统状态限定集合

$$E_t = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2 \times 1} : |(1 - 0.1e^{-t})(x_1 - x_2)| \leq 1, |(5 - 2.5e^{-t})(x_1 + x_2)/3| \leq 1\}.$$

计算可知 $\Omega_0 \subseteq E_{t_0}$, 且 $h_1(t) = (1 - 0.1e^{-t})[1 \ -1]^T$, $h_2(t) = (5 - 2.5e^{-t})[1/3 \ 1/3]^T$.

设定数值计算精度 $E = 0.01$, 利用本文数值算法判断例2系统的有限时间稳定性, 则函数曲线 $M_i(t) = \max_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_0} h_i^T(t)\Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0$, $t \in T_w$, $i = 1, 2$ 如图4所示.

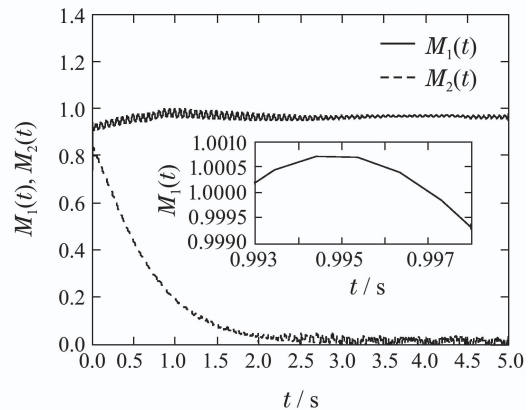


图4 利用本文算法的函数曲线 $M_i(t)$, $i = 1, 2$

Fig. 4 Function curve $M_i(t)$, $i = 1, 2$ by using the proposed algorithm in this paper

计算得到参数 $\tilde{M}_1 = 1.0007$, $\tilde{M}_2 = 0.8503$, 即参数 $\tilde{M} = 1.0007$, 因此根据推论1可知, 例2系统相对 (Ω_0, E_t, T_w) 有限时间不稳定.

再利用文献[2]算法判定例2系统的有限时间稳定性. 取等距步长 $\Delta = 0.01$ 划分区间 $T_w = [0, 5]$, 函数曲线 $M_i(t)$, $i = 1, 2$, 如图5所示.

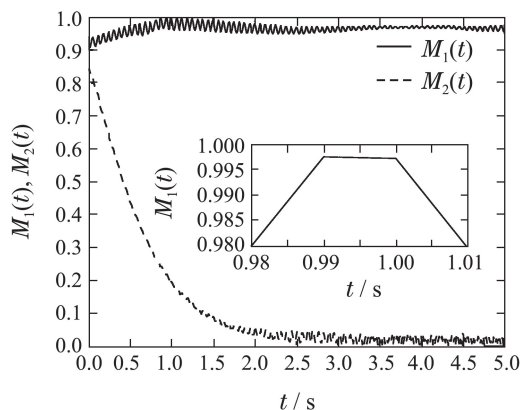


图5 利用文献[2]算法的函数曲线 $M_i(t)$, $i = 1, 2$

Fig. 5 Function curve $M_i(t)$, $i = 1, 2$ by using the algorithm in [2]

计算得到参数 $\tilde{M}_1 = 0.9996$, $\tilde{M}_2 = 0.8503$, 即参数 $\tilde{M} = 0.9996$, 因此根据文献[2]算法可知, 例2系统相对 (Ω_0, E_t, T_w) 有限时间稳定, 这就得出了错误结论.

例3 对比本文算法与文献[19]方法的适用范围

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 - 1.5 \cos^2 t & 1 - 0.75 \sin(2t) \\ -1 - 0.75 \sin(2t) & -1 + 1.5 \sin^2 t \end{bmatrix}.$$

给定 $t_0 = 0$, $T = 2$, 即 $T_w = [0, 2]$, 系统初值限定集合

$$\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^{2 \times 1} : |3x_1 - 1.5x_2| \leq 1, |3x_1 + 3x_2| \leq 1\}$$

及系统状态限定集合

$$E_t = \{x \in \mathbb{R}^{2 \times 1} : |(1 - 0.1e^{-t})(x_1 - 0.5x_2)| \leq 1, |(x_1 + x_2)/(1 + e^{-t})| \leq 1\}.$$

计算可知 $\Omega_0 \subseteq E_{t_0}$, 且 $h_1(t) = (1 - 0.1e^{-t})[1 \ -0.5]^T$, $h_2(t) = [1 \ 1]^T/(1 + e^{-t})$.

给定数值计算精度 $E = 0.01$, 利用本文数值算法判断例3系统的有限时间稳定性, 则函数曲线 $M_i(t) = \max_{x_0 \in \Omega_0} h_i^T(t)\Phi(t, t_0)x_0$, $t \in T_w$, $i = 1, 2$ 如图6所示.

计算得到参数 $\tilde{M}_1 = 0.4899$, $\tilde{M}_2 = 0.8557$, 即参数 $\tilde{M} = 0.8557$, 因此根据定理2可知, 例3系统相对 (Ω_0, E_t, T_w) 有限时间稳定.

由于例3系统为LTV系统, 而文献[19]方法仅适用于LTI系统且要求多面体集合 E_t 是时不变的, 因此文献[19]方法不再适用. 该算例说明了本文算法相比文献[19]方法的适用范围更广.

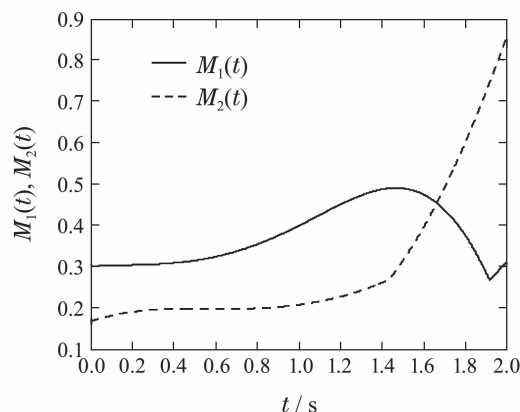


图6 函数曲线 $M_i(t)$, $i = 1, 2$

Fig. 6 Function curve $M_i(t)$, $i = 1, 2$

例4 卫星姿态控制系统有限时间稳定性分析.

以静止轨道三轴稳定刚体卫星姿态控制过程为例, 卫星姿态动力学^[24]可表示为

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (9)$$

其中: 状态 $x(t) = [\varphi(t) \ \theta(t) \ \psi(t) \ \dot{\varphi}(t) \ \dot{\theta}(t) \ \dot{\psi}(t)]^T$ 表示滚动角、俯仰角、偏航角及相应的角速度, 而控制向量 $u = [u_\varphi \ u_\theta \ u_\psi]^T$.

其中系统矩阵

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{46} \\ 0 & a_{52} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{63} & a_{64} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中:

$$\begin{aligned} a_{41} &= 4\omega_0^2(I_z(t) - I_y(t))/I_x(t), \\ a_{46} &= \omega_0(I_x(t) + I_z(t) - I_y(t))/I_x(t), \\ a_{52} &= 3\omega_0^2(I_z(t) - I_x(t))/I_y(t), \\ a_{63} &= \omega_0^2(I_x(t) - I_y(t))/I_z(t), \\ a_{64} &= \omega_0(I_y(t) - I_z(t) - I_x(t))/I_z(t). \end{aligned}$$

控制矩阵

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/I_x(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/I_y(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/I_z(t) \end{bmatrix}^T,$$

其中: $I(t) = \text{diag}\{I_x(t), I_y(t), I_z(t)\}$ 表示卫星的惯量矩阵, ω_0 表示静止轨道角速度, 其具体数值^[24]为 $\omega_0 = 7.2921158 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$.

考虑到卫星燃料消耗, 设刚体卫星的惯量矩阵为

$$I(t) = (0.98 + 0.02e^{-0.1t}) \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & 320 & 0 \\ 0 & 0 & 250 \end{bmatrix},$$

单位为 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

设定姿态控制初始时刻 $t_0 = 0 \text{ s}$, 姿态控制总时间为 $T = 30 \text{ s}$, 即 $T_w = [0, 30]$. 设滚动角 $\varphi(t)$, 俯仰角 $\theta(t)$ 和偏航角 $\psi(t)$ 的初始允许范围分别为

$$\begin{cases} |\varphi(t_0)| \leq 6^\circ, \\ |\theta(t_0)| \leq 4^\circ, \\ |\psi(t_0)| \leq 5^\circ, \end{cases}$$

且滚动角速度 $\dot{\varphi}(t)$, 俯仰角速度 $\dot{\theta}(t)$ 和偏航角速度 $\dot{\psi}(t)$ 的初始允许范围分别为

$$\begin{cases} |\dot{\varphi}(t_0)| \leq 1^\circ/\text{s}, \\ |\dot{\theta}(t_0)| \leq 1^\circ/\text{s}, \\ |\dot{\psi}(t_0)| \leq 1^\circ/\text{s}. \end{cases}$$

采用国际单位表示, 则系统初值集合为

$$\begin{aligned} \Omega_0 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{6 \times 1} : \\ |180x_1/(6\pi)| \leq 1, |180x_2/(4\pi)| \leq 1, \\ |180x_3/(5\pi)| \leq 1, |180x_4/(\pi)| \leq 1, \\ |180x_5/(\pi)| \leq 1, |180x_6/(\pi)| \leq 1 \}. \end{aligned}$$

控制目标: 要求在姿态控制过程中, 即 $t \in T_w$ 内满足

$$\begin{cases} |\varphi(t)| \leq 6(0.1 + e^{-0.1t})^\circ, \\ |\theta(t)| \leq 4(0.1 + e^{-0.1t})^\circ, \\ |\psi(t)| \leq 5(0.1 + e^{-0.1t})^\circ, \\ |\dot{\varphi}(t)| \leq 0.1(0.5 + 10e^{-0.1t})^\circ/\text{s}, \\ |\dot{\theta}(t)| \leq 0.1(0.5 + 10e^{-0.1t})^\circ/\text{s}, \\ |\dot{\psi}(t)| \leq 0.1(0.5 + 10e^{-0.1t})^\circ/\text{s}. \end{cases}$$

采用国际单位表示, 则系统状态限定集合为

$$\begin{aligned} E_t = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{6 \times 1} : \\ |180x_1/(6(0.1 + e^{-0.1t})\pi)| \leq 1, \\ |180x_2/(4(0.1 + e^{-0.1t})\pi)| \leq 1, \\ |180x_3/(5(0.1 + e^{-0.1t})\pi)| \leq 1, \\ |180x_4/(0.1(0.5 + 10e^{-0.1t})\pi)| \leq 1, \\ |180x_5/(0.1(0.5 + 10e^{-0.1t})\pi)| \leq 1, \\ |180x_6/(0.1(0.5 + 10e^{-0.1t})\pi)| \leq 1 \}. \end{aligned}$$

计算可知 $\Omega_0 \subseteq E_{t_0}$, 且

$$\begin{cases} h_1(t) = 180/(6(0.1 + e^{-0.1t})\pi)[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ h_2(t) = 180/(4(0.1 + e^{-0.1t})\pi)[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ h_3(t) = 180/(5(0.1 + e^{-0.1t})\pi)[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ h_4(t) = 180/(0.1(0.5 + 10e^{-0.1t})\pi)[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T \\ h_5(t) = 180/(0.1(0.5 + 10e^{-0.1t})\pi)[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T \\ h_6(t) = 180/(0.1(0.5 + 10e^{-0.1t})\pi)[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T. \end{cases}$$

针对系统(9), 设计PD控制律为

$$u_s = -k_{ps}s - k_{ds}\dot{s}, \quad (10)$$

其中: s 表示滚动角 $\varphi(t)$, 俯仰角 $\theta(t)$ 以及偏航角 $\psi(t)$.

设定PD控制律参数

$$\begin{aligned} (k_{p\varphi}, k_{d\varphi}, k_{p\theta}, k_{d\theta}, k_{p\psi}, k_{d\psi}) = \\ (100, 1000, 150, 1000, 125, 1000). \end{aligned}$$

给定数值计算精度 $E = 0.01$, 利用本文数值算法判断由式(9)和式(10)组成的闭环系统的有限时间稳定性, 则函数曲线 $M_i(t) = \max_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_0} h_i^T(t)\Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0$, $t \in T_w$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, 如图7所示.

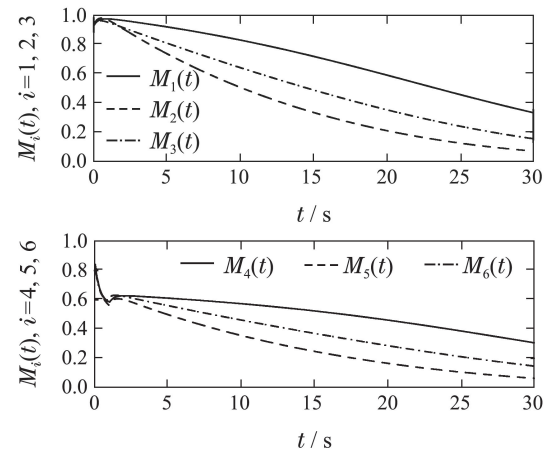


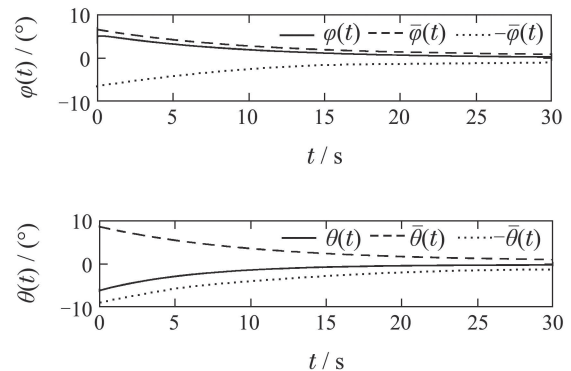
图7 函数曲线 $M_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Fig. 7 Function curve $M_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

图7中: $i = 1, 2, 3$ 分别对应滚动角 φ , 俯仰角 θ 和偏航角 ψ , 而 $i = 4, 5, 6$ 分别对应滚动角速度 $\dot{\varphi}$, 俯仰角速度 $\dot{\theta}$ 和偏航角速度 $\dot{\psi}$.

计算得到参数 $\tilde{M}_1 = 0.9717$, $\tilde{M}_2 = 0.9764$, $\tilde{M}_3 = 0.9583$, 而参数 $\tilde{M}_4 = 0.9524$, $\tilde{M}_5 = 0.9524$, $\tilde{M}_6 = 0.9524$, 即 $\tilde{M} = 0.9764$, 因此根据定理2可知, 例4闭环系统相对 (Ω_0, E_t, T_w) 有限时间稳定.

进一步, 选取 $\mathbf{x}(t_0) = [5, -3, 4, 0.8, 0.5, -0.7]^T \in \Omega_0$ (单位为 $^\circ$ 和 $^\circ/\text{s}$)进行仿真验证, 仿真结果如图8和图9所示.



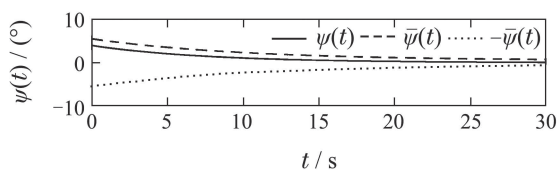


图8 滚动角 $\varphi(t)$ 、俯仰角 $\theta(t)$ 及偏航角 $\psi(t)$ 的变化曲线
Fig. 8 Time history of the roll angle $\varphi(t)$, pitch angle $\theta(t)$ and yaw angle $\psi(t)$

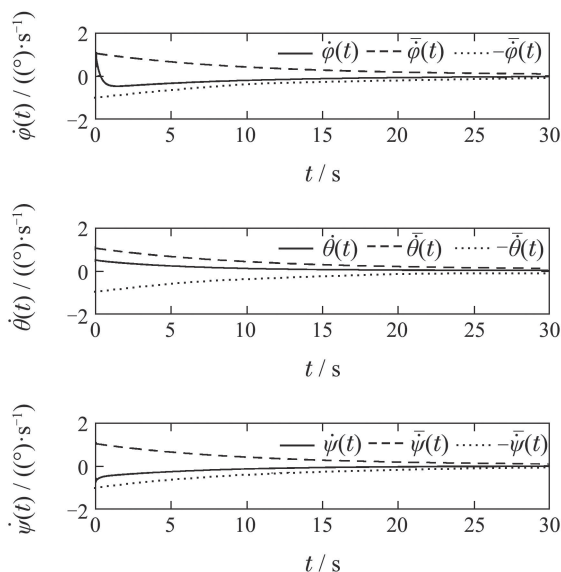


图9 滚动角速度 $\dot{\varphi}(t)$ 、俯仰角速度 $\dot{\theta}(t)$ 及偏航角速度 $\dot{\psi}(t)$ 的变化曲线
Fig. 9 Time history of the roll angle rate $\dot{\varphi}(t)$, pitch angle rate $\dot{\theta}(t)$ and yaw angle rate $\dot{\psi}(t)$

其中 $\pm\bar{\varphi}(t)$ 表示使得 E_t 的第1个表达式取等号时的边界曲线 $\pm 6(0.1 + e^{-0.1t})$ (单位为 $^\circ$)。类似地, $\pm\bar{\theta}(t)$ 表示 $\pm 4(0.1 + e^{-0.1t})$ (单位为 $^\circ$), $\pm\bar{\psi}(t)$ 表示 $\pm 5(0.1 + e^{-0.1t})$ (单位为 $^\circ$), 而曲线 $\pm\bar{\dot{\varphi}}(t)$, $\pm\bar{\dot{\theta}}(t)$ 以及 $\pm\bar{\dot{\psi}}(t)$ 表示 $\pm 0.1(0.5 + 10e^{-0.1t})$ (单位为 $(^\circ)/s$)。

图8–9表明: 当闭环系统的初值 $\mathbf{x}(t_0) \in \Omega_0$, 则对应的系统状态 $\mathbf{x}(t) \in E_t, \forall t \in T_w$, 即例4闭环系统相对 (Ω_0, E_t, T_w) 有限时间稳定。

5 结论

本文从数值计算角度研究了当系统的初值和状态都限定在多面体集合时的连续LTV系统有限时间稳定性判定问题, 给出了连续LTV系统有限时间稳定的充分必要条件, 并从数值计算角度给出了该类系统有限时间稳定和有限时间不稳定的充分条件。基于所得充分条件, 本文提出了一种判定连续LTV系统有限时间稳定性的数值方法。理论分析和算例仿真都说明了本文算法的有效性和正确性, 相比已有结果不存在误判风险, 且适用范围更广。

如何利用本文结果研究连续LTV系统的有限时间

镇定问题将是未来的研究方向。

参考文献:

- [1] SUN Jingguang, SONG Shenmin, CHEN Haitao. Finite-time tracking control of the hypersonic vehicle with input saturation. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(10): 1349 – 1360. (孙经广, 宋申民, 陈海涛. 高超声速飞行器有限时间饱和控制. 控制理论与应用, 2017, 34(10): 1349 – 1360.)
- [2] TANCREDI U, GRASSI M, CORRARO F, et al. A linear time-varying approach for robustness analyses of a re-entry flight technology demonstrator time-varying approach. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 2012, 226(4): 467 – 480.
- [3] GUO Yong, SONG Shenmin, LI Xuehui. Attitude and orbit coupled control for non-cooperative rendezvous and docking. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(5): 638 – 644. (郭永, 宋申民, 李学辉. 非合作交会对接的姿态和轨道耦合控制. 控制理论与应用, 2016, 33(5): 638 – 644.)
- [4] KAMENKOV G V. On stability of motion over a finite interval of time. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics (in Russian)*, 1953, 17(2): 529 – 540.
- [5] WEISS L, INFANTE E F. Finite time stability under perturbing forces and on product spaces. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1967, 12(1): 54 – 59.
- [6] WEISS L. Converse theorems for finite-time stability. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1968, 16(6): 1319 – 1324.
- [7] MICHEL A N, HOU L. Finite-time and practical stability of a class of stochastic dynamical systems. *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*. Cancun, Mexico: IEEE, 2008: 3452 – 3456.
- [8] CHEN Zhihua, XIE Yongchun. Finite time stability analysis of the linear time-varying systems. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(4): 485 – 496. (陈志华, 解永春. 线性时变系统有限时间稳定性分析. 控制理论与应用, 2018, 35(4): 485 – 496.)
- [9] AMATO F, ARIOLA M, COSENTINO C. Finite-time stability of linear time-varying systems: analysis and controller design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 1003 – 1008.
- [10] GARCIA G, TARBOURIECH S, BERNUSSOU J. Finite-time stabilization of linear time-varying continuous systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(2): 364 – 369.
- [11] AMATO F, ARIOLA M, COSENTINO C. Finite-time control of discrete-time linear systems: analysis and design conditions. *Automatica*, 2010, 46(5): 919 – 924.
- [12] AMATO F, AMBROSINO R, ARIOLA M, et al. Sufficient conditions for finite-time stability of impulsive dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(4): 861 – 865.
- [13] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, 38(3): 751 – 766.
- [14] SRETEN B S, DRAGUTIN L D, DRAGAN S A. Robust finite-time stability and stabilization of linear uncertain time-delay systems. *Asian Journal of Control*, 2013, 15(5): 1548 – 1554.
- [15] LE V H. An explicit criterion for finite-time stability of linear nonautonomous systems with delays. *Applied Mathematics Letters*, 2014, 30(4): 12 – 18.
- [16] ZUO Z Q, LI H C, WANG Y J. Finite-time stochastic stabilization for uncertain Markov jump systems subject to input constraint. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2014, 36(2): 283 – 288.

- [17] AMATO F, TOMMASI G D, PIRONTI A. Necessary and sufficient conditions for finite-time stability of impulsive dynamical linear systems. *Automatica*, 2013, 49(8): 2456 – 2550.
- [18] LIU Zhi, ZHANG Xianfu, WANG Yuzhen. Stability and stabilization for discrete-time positive switched multiple equilibria systems on finite time intervals. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(4): 433 – 440.
(刘志, 张宪福, 王玉振. 离散多平衡点正切换系统有限区间稳定与镇定. 控制理论与应用, 2017, 34(4): 433 – 440.)
- [19] AMATO F, AMBROSINO R, ARIOLA M. Finite-time stability of linear systems: an approach based on polyhedral Lyapunov functions. *IET Control Theory and Applications*, 2010, 4(9): 1767 – 1774.
- [20] KHALIL H K. *Nonlinear Systems*. 3rd Edition. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2011: 56 – 57, 105.
(KHALIL H K. 非线性系统. 朱义胜, 董辉, 李作洲, 等, 译. 第3版. 北京: 电子工业出版社, 2011: 56 – 57, 105.)
- [21] NI Qin. *Optimization Methods and Programming Design*. Beijing: Science Press, 2009: 176 – 180.
(倪勤. 最优化方法与程序设计. 北京: 科学出版社, 2009: 176 – 180.)
- [22] SUDA N, KODAMA S, MASAO I. *Matrix Theory in Automatic Control*. Beijing: Science Press, 1979: 160 – 163, 199 – 201.
(须田信英, 旧玉慎三, 池田雅夫, 著. 自动控制中的矩阵理论. 曹长修, 译. 北京: 科学出版社, 1979: 160 – 163, 199 – 201.)
- [23] CAI Wenkang, MAO Jiajun. Quadratic programming on polyhedron and its simple numeration. *Journal of Shanghai University of Electric Power*, 2002, 18(2): 55 – 58.
(蔡文康, 毛家俊. 多面体上二次规划及其单纯形算法. 上海电力学院学报, 2002, 18(2): 55 – 58.)
- [24] ZHANG Renwei. *Satellite Orbit and Attitude Dynamics and Control*. Beijing: Beihang University Press, 1998: 28, 172 – 173.
(章仁为. 卫星轨道姿态动力学与控制. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1998: 28, 172 – 173.)

作者简介:

陈志华 博士研究生, 目前研究方向为基于计算机平台的航天器控制系统分析与设计, E-mail: chenzhihuahit@126.com;

解永春 研究员, 博士生导师, 目前研究方向为航天器导航、制导与控制, E-mail: xieyongchun@vip.sina.com.