

## 间隙引发的变载非线性及其闭环辨识

张珩, 肖歆昕<sup>†</sup>

(中国科学院力学研究所, 北京 100190; 中国科学院大学工程科学院, 北京 100049)

**摘要:** 阐明了齿轮传动位置伺服系统间隙除产生熟知的前向迟滞非线性之外, 还将因系统往复运动中加卸载相交替的反向调制致使驱动电动力学参数同步跳变所出现的变载非线性现象. 推导建立了这类非线性在一阶谐波意义下的串联等效频域模型及其近似计算公式, 分析了相应的幅相特性. 进一步面向服役中系统提出了直接通过闭环弱自激振荡控制所实现的间隙辨识新方法, 给出了控制器的结构及其参数整定策略. 此外, 文中还给出了含高斯白噪声测量的仿真算例, 充分验证了闭环间隙辨识方法的有效性和便捷性.

**关键词:** 间隙变载非线性; 间隙闭环辨识; 非线性效应; 描述函数; 自激振荡

**引用格式:** 张珩, 肖歆昕. 间隙引发的变载非线性及其闭环辨识. 控制理论与应用, 2019, 36(5): 673–679

DOI: 10.7641/CTA.2018.80216

## Onload-offload cycling nonlinearity caused by backlash and its closed-loop identifications

ZHANG Heng, XIAO Xin-xin<sup>†</sup>

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100090, China;  
School of Engineering Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract:** It is clarified in this paper that backlash in position servo system with gear mechanisms, apart from causes the well-known forward hysteresis characteristics, leads to the onload-offload cycling nonlinearity as a result of synchronous jumps of driving dynamics parameter due to the naturally backward modulation result from repetitive changes between loading and unloading state in reciprocating motions. An equivalent frequency-domain model and its approximate formula are established for this nonlinearity within the first harmonic wave sense, and the magnitude frequency and phase frequency characteristics of the model are correspondently analyzed. Furthermore, a new backlash identification method based on closed-loop weakly self-excited oscillation is presented for systems in active service, hence a controller tuning algorithm is suggested. The effectiveness and accessibility of the proposed method are additionally verified via numerical simulations on specific example with different backlash values under white Gaussian noise measurements.

**Key words:** backlash onload-offload cycling nonlinearity; closed-loop backlash identification; nonlinear effect; describing function; self excited oscillation

**Citation:** ZHANG Heng, XIAO Xinxin. Onload-offload cycling nonlinearity caused by backlash and its closed-loop identifications. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(5): 673–679

### 1 引言

在由刚性齿轮构成的位置传动系统中, 由于设计制造、加工装配、运行磨损及使用环境等因素, 主从齿间不可避免的会出现一些静态空(间)隙<sup>[1]</sup>. 同时, 摩擦、弹性变形以及齿间的碰撞冲击等, 也会产生相应的动态回差<sup>[2]</sup>. 尽管两类间隙产生的机制有所不同, 但随着传动齿轮主动端(输入)的往复驱动, 都可能造成从动端(输出)的运动滞后或振荡抖动等<sup>[3–4]</sup>效应, 相应的承载能力也将可能有所下降<sup>[5]</sup>. 目前主要是采

用迟滞、死区及冲击等3类模型<sup>[6–9]</sup>分析间隙的非线性影响, 或以它们为基础研究间隙的补偿策略<sup>[6, 10–13]</sup>. 但因其补偿效果非常依赖于对间隙参数的掌握程度<sup>[14–15]</sup>, 所以如何有效辨识间隙就自然成为一个研究热点. 这方面的代表性工作主要有基于死区、迟滞或经弹性修正的模型化离线或在线辨识等方法<sup>[16–23]</sup>.

综合来看, 关于间隙特性及其辨识的研究大都是在考虑间隙自身作用机理的基础上, 更多的关注于从间隙环节的输入到输出的前向传递方向上所造成的

收稿日期: 2018–03–29; 录用日期: 2018–07–23.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: xiaoxinxin@imech.ac.cn; Tel.: +86 10-82543786.

本文责任编辑: 胡德文.

国家重点基础研究发展计划(“973”计划)项目(2013CB733000)资助.

Supported by the National Key Basic Research & Development Program (“973” Program) (2013CB733000).

非线性影响.但实际上,不同性质的间隙对于系统的影响可能更为深刻.仅就反映齿间啮合程度的静态间隙来说,它本质上是一种几何(空隙)表征,而在运动情形下则反映的是主从传动过程中的位移关系.这类间隙的存在,不仅会产生通常意义下的位移运动滞后,还可能会导致其它的附加影响.本文正是试图从这一视角出发,通过对往复驱动中电机的承载受到“加载-空载”的循环交替而使得电机动力学参数同步受到反向耦合与调制的机理进行分析,揭示静态间隙在产生迟滞非线性的同时,还将会伴生出现一类新的变载非线性现象.推导建立这类非线性在一阶谐波意义下的频域等效模型及其近似计算公式,分析其幅频特性与相频特性.进而面向服役中系统,借助于对原有位置环控制器结构和参数的简单整定,基于所建立的变载非线性频域模型提出通过弱振形式自激振荡实现的间隙闭环辨识方法,并给出相应仿真算例及其有效性验证.

### 2 变载非线性及其频域模型

考虑一个省略电流环与速度环后仅由位置环构成的闭环机电伺服传动系统(见图1实线回路所示).其中:  $G_c(s)$ 和 $G_f(s)$ 分别为位置环线性控制和位移测量滤波环节;忽略电枢时间常数影响,可将驱动电机模型简化为由驱动时间常数 $T_p$ 和静态增益 $K_p$ 所表征的一阶惯性环节 $G_p(s) = K_p/(T_p s + 1)$ ;  $e(t)$ 和 $u(t)$ 分别为位置环误差和驱动电机控制输入变量;  $p(t)$ 和 $q(t)$ 则分别为齿轮系统主动端位置输入和从动端位置输出变量.  $p(t)$ 的一阶谐波分量为 $p_1(t)$ ,其Fourier变换为 $P_1(j\omega)$ ,  $P_{1m}$ 为 $p_1(t)$ 的幅值,并对其余各变量均予类似定义.

忽略缓慢传动运动过程中摩擦、弹性效应或齿间碰撞影响,通常意义下认为,当间隙存在时其主动端位移 $p$ 与从动端位移 $q$ 之间的前向传递非线性关系表现为一个熟知的迟滞特性.其频域描述函数模型为<sup>[7]</sup>

$$\begin{cases} \frac{Q_1(j\omega)}{P_1(j\omega)} = m_0 N^*(x), \\ x = \frac{\delta}{P_{1m}}, 0 \leq 2\delta \leq P_{1m}, \\ \pi N^*(x) = \left[ \frac{\pi}{2} + \sin^{-1}(1 - 2x) + (1 - 2x) \times \sqrt{1 - (1 - 2x)^2} \right] - j4x(1 - x), \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $j = \sqrt{-1}$ ,  $m_0$ 为传动比系数,  $2\delta$ 为待辨识的间隙参数.

需要指出的是,这个迟滞特性在仅仅孤立的考虑齿轮传动系之间的非线性位移关系时并不存在异议.但当将驱动电机与齿轮系和负载串联连接时,就必然会产生驱动电机动力学特性、负载特性和齿轮传动

三者之间的耦合性变化.已知 $T_p$ 综合反映了电机的综合驱动能力和“负重”的程度.即驱动能力越弱或承载越大,  $T_p$ 亦越大.在确定的负载情形下,即有 $T_p = T_M$ (恒定载荷),这在一定的负载变化范围内都可正常应用.但在间隙存在时的系统往复运动中,这个时间常数就会因间隙的作用而出现齿轮完整啮合前后的空载( $T_p = T_m$ )与加载( $T_p = T_M$ )相交替的2种改变.这种现象正是以齿轮传递中迟滞特性为起因,以齿间啮合前后承载的跳变对驱动动力学参数 $T_p$ 的反向耦合调制所导致(见图1虚线所示),进而在控制变量 $u$ 与电机位移输出 $p$ 之间呈现出与恒定加载情形相异的新特性.作者将此称为由间隙引发的变载非线性.

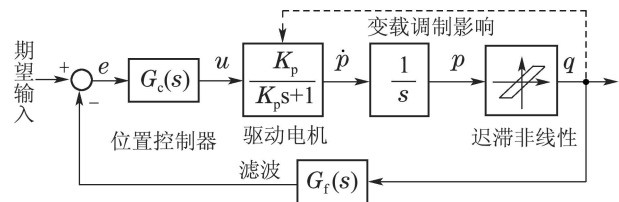


图1 电机位置闭环伺服系统

Fig. 1 Closed-loop motor position servo system

用一个低频(周期 $T > 10T_M$ )低幅值 $U_m$ 的方波作为激励函数 $u(t)$ ,可更直观的比较 $T_p$ 参数受到变载影响与恒定载荷2种情形下 $\dot{p}(t)$ 的稳态响应差异(如图2所示).仅从一个周期的前半周就可以看出,后者简单按规律 $K_p U_m (1 - 2e^{-t/T_M})$ 变化.而前者则因间隙的作用而经历3个不同的变化过程:1)在本周期起始时刻,因传动系统加载( $T_p = T_M$ )而与后者规律相同,直至 $\dot{p}(t_0) = 0$ ;2)此后传动系统因卸载而使 $T_p$ 跳变到 $T_m$ ,表现为 $\dot{p}(t)$ 按 $K_p U_m (1 - e^{-(t-t_0)/T_m})$ 规律快速上升,直到再次加载时刻 $t_1$ 为止;3)此后 $\dot{p}(t)$ 再次以时间常数 $T_M$ 的指数律向 $K_p U_m$ 逼近.显而易见,由于承载变化的反向调制,将导致 $\dot{p}(t)$ 在按加载时间常数变化过程中被嵌入了一个短暂的空载加速段.其后半周期亦反向类似.

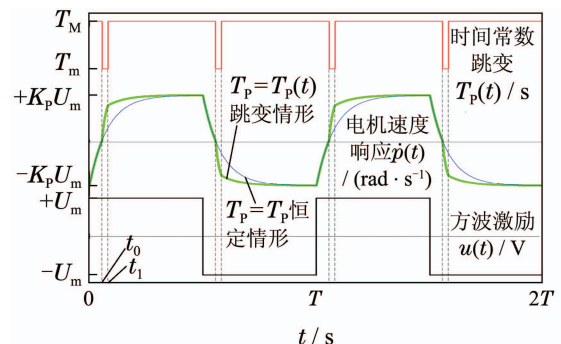


图2 方波激励下的变载响应与恒载响应差异  
Fig. 2 Response difference between constant load and on/offload cases under square wave input

基于上述分析,容易得知,在取消 $T > 10T_M$ 约束

的一般情形下  $\dot{p}(t)$  的稳态周期解为

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = \begin{cases} K_p U_m [1 - \rho(\omega t, \theta_1)], & t \in [0, \frac{T}{2}), \\ K_p U_m [\rho(\omega t - \pi, \theta_1) - 1], & t \in [\frac{T}{2}, T), \end{cases} \\ \rho(\theta, \theta_1) = \begin{cases} (2 - \eta) e^{-\frac{\theta}{\theta_M}}, & \theta \in [0, \theta_0), \\ e^{-\frac{\Delta\theta}{\theta_M}}, & \theta \in [\theta_0, \theta_1], \\ \eta e^{\frac{(\pi-\theta)}{\theta_M}}, & \theta \in (\theta_1, \pi), \end{cases} \\ \eta = 2 - \frac{2}{[1 + e^{-\frac{\pi}{\theta_M} - \Delta\theta(\frac{1}{\theta_m} - \frac{1}{\theta_M})}]}, \\ t_0 = T_M \ln(2 - \eta), \\ t_1 = \{t < \frac{T}{2} | p(t) - p(t_0) = 2\delta\}, \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $\omega = 2\pi/T$ ,  $\theta = \omega t$ ,  $\theta_0 = \omega t_0$ ,  $\theta_1 = \omega t_1$ ,  $\theta_M = \omega T_M$ ,  $\theta_m = \omega T_m$ .  $0 \leq \eta \leq 1$  取决于半个方波周期内响应函数的指数项是否会充分衰减.

因  $u_1(t)$  的幅值  $U_{1m} = 4U_m/\pi$ , 则由式(2)可得  $\dot{p}(t)$  与  $u(t)$  之间频域传递关系的归一化一阶谐波系数为

$$\begin{cases} a_1 = \frac{2}{K_p T} \int_0^T \frac{\dot{p}(t) \cos(\omega t) dt}{4U_m/\pi} = \\ -\frac{1}{2} \int_0^\pi \rho(\theta, \theta_1) \cos \theta d\theta, \\ b_1 = 1 - \frac{1}{2} \int_0^\pi \rho(\theta, \theta_1) \sin \theta d\theta. \end{cases} \quad (3a)$$

将式(2)代入上式并经具体的积分展开和整理, 最终得到

$$\frac{P_1(j\omega)}{U_1(j\omega)} = K_p \frac{b_1 + ja_1}{j\omega} = K_p \frac{N_c(\theta_m, \theta_M, x)}{j\omega(1 + \theta_M)}, \quad (3b)$$

$$N_c(\theta_m, \theta_M, x) = 1 + W(\theta_0, 0) - W(\theta_0, \Delta\theta), \quad (3c)$$

$$W(\alpha, \beta) = j \frac{\theta_M - \theta_m}{2\sqrt{1 + \theta_M^2}} e^{-\frac{\beta}{\theta_m} - j(\alpha + \beta + \tan^{-1} \theta_m)}, \quad (3d)$$

其中: 式(3c)中的  $N_c(\theta_m, \theta_M, x)$  就是间隙变载非线性在一阶谐波意义下的一种频域模型. 它与恒载模型  $K_p/j\omega(1 + j\theta_M)$  相串联, 综合反映了控制输入  $u(t)$  与间隙输入  $p(t)$  之间的基频传递关系. 显然当  $x = 0$  或  $T_M = T_m$  时  $N_c(\theta_m, \theta_M, x) = 1$ , 意味着变载非线性影响消失. 但在一般情形下其影响则无法回避. 此外,  $N_c(\theta_m, \theta_M, x)$  还同时与频率和  $x$  等相关, 是一个多输入形式的描述函数<sup>[24-25]</sup>且具有多值性特征, 所以式(3c)是间隙变载非线性的一种串联型描述函数模型.

由式(2)推知,

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{p}(t) dt = [\Delta\theta - \theta_m(1 - e^{-\frac{\Delta\theta}{\theta_m}})] \cdot \frac{K_p U_m}{\omega} = 2\delta$$

及  $\theta_0 = \theta_M \ln(2 - \eta)$ , 并利用式(3b)有

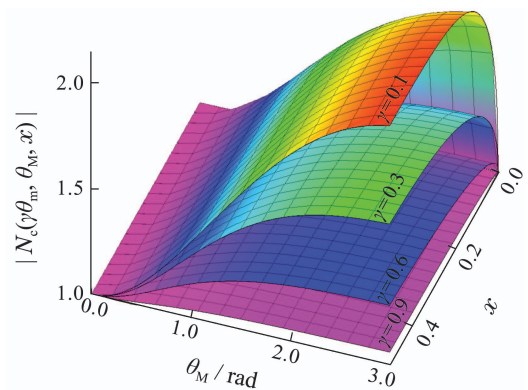
$$P_{1m} = \frac{|N_c| K_p U_{1m}}{\omega \sqrt{1 + \theta_M^2}}.$$

注意到  $x$  的定义并经整理, 得到下式:

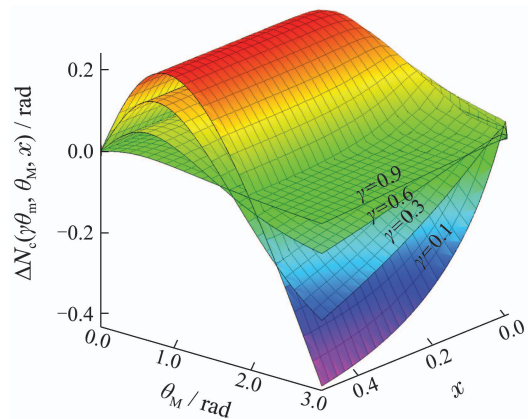
$$\Delta\theta = \theta_m(1 - e^{-\frac{\Delta\theta}{\theta_m}}) + \frac{8x |N_c(\theta_m, \theta_M, x)|}{\pi \sqrt{1 + \theta_M^2}}, \quad (4a)$$

$$\theta_0 = \theta_M \ln \frac{2}{1 + e^{-\frac{\pi}{\theta_M} - \Delta\theta(\frac{1}{\theta_m} - \frac{1}{\theta_M})}}. \quad (4b)$$

显然  $(\theta_0, \Delta\theta)$  与  $N_c(\theta_m, \theta_M, x)$  需由式(3c)和式(4)构建的方程组联立加以求解.



(a)  $|N_c(\theta_m, \theta_M, x)|$  的频率响应



(b)  $\angle N_c(\theta_m, \theta_M, x)$  的频率响应

图 3 不同  $(\gamma, x)$  下  $N_c(\theta_m, \theta_M, x)$  的频率特性

Fig. 3 Frequency response characteristics of  $N_c(\theta_m, \theta_M, x)$  with different  $(\gamma, x)$

针对不同的变载系数  $\gamma = T_m/T_M \leq 1$ , 以  $\theta_M$  为相对频率并通过式(3c)和式(4)联立所解出变载非线性的频率特性  $N_c(\theta_m, \theta_M, x)$  见图3所示, 显示出它无论在幅频特性还是相频特性方面, 都的确受到  $\gamma$  和  $x$  很大影响.  $|N_c(\theta_m, \theta_M, x)|$  与  $\theta_M$  或  $x$  都呈正向变化, 只是较大的  $x (> 0.1)$  对其影响明显减小, 但它和  $\angle N_c(\theta_m, \theta_M, x)$  波动范围又同时会随着  $\gamma$  的下降而被放大. 此外,  $\angle N_c(\theta_m, \theta_M, x)$  还具有与  $\theta_M$  在低频呈正向凸函数而高频负向衰减的变化特征, 表明  $N_c(\theta_m, \theta_M, x)$  具有低



频超前而高频趋向滞后的性质. 图4给出了 $N_c(\theta_m, \theta_M, x)$ 相位过零时的参数-频率转折曲面. 它出现在 $\theta_M > 1.53$ 之后的一个特定开放区域中, 并且无论间隙水平如何( $\delta > 0$ ), 随着 $\gamma$ 的降低, 转折点都会最终向 $\theta_M = \pi/\ln 4$ 的频点处汇聚.

令 $N_c^*(\theta_m, \theta_M) = 1 + W(\theta_M \ln 2, 0)$ , 利用 $\angle N_c$ 的凸函数特点及其相对于 $\gamma$ 的变化趋向, 可以推知至少在 $\angle N_c^*$ 达到最大值及此前的频段内( $\theta_M \leq 0.315\pi$ ),  $N_c$ 的幅值和相位不会超过 $N_c^*(0, \theta_M)$ 的幅值与相位, 即有

$$\begin{cases} 1 < |N_c(\theta_m, \theta_M, x)| \leq |N_c^*(0, \theta_M)| = \\ \sqrt{1 + \theta_M \sin(\theta_M \ln 2) + \frac{\theta_M^2}{4}}, \\ 0 < \angle N_c(\theta_m, \theta_M, x) \leq \angle N_c^*(0, \theta_M) = \\ \tan^{-1} \frac{\theta_M \cos(\theta_M \ln 2)}{2 + \theta_M \sin(\theta_M \ln 2)}, \\ 0 < \theta_M \leq 0.315\pi. \end{cases} \quad (5)$$

由 $N_c(\theta_m, \theta_M, x)$ 相频曲线的凸值性和式(5)可以简单的推算出在变载系数相对较低的情形下,  $N_c(\theta_m, \theta_M, x)$ 的相位最大程度会超前 $\angle N_c^*(0, 0.315\pi) = 16.25^\circ$ , 幅值则会增加36.8%. 此外, 它还将会随着频率的进一步增加而转为相位滞后的特征. 这对于以往习惯于忽略变载效应的控制设计来说, 其闭环系统的稳定性或鲁棒性将会变得更加脆弱甚至无法满足动静性能要求, 需要引起充分关注. 为削减变载特性的非线性效应影响, 可以通过利用间隙前端反馈构建伺服系统的速度环控制或综合增强位置环的控制裕度来实现, 这将十分有助于改善伺服控制闭环系统的整体性能. 但无论采取其中的哪类措施, 都应当切实考虑变载非线性项 $N_c(\theta_m, \theta_M, x)$ 的固有影响.

### 3 模型简化

因 $T_M \geq T_m$ , 则由式(2)知 $\eta \leq (2 - \eta)e^{-\pi/\theta_M}$ , 故当 $T > 9.368T_M$ 时, 有 $\eta < e^{-4} \approx 0$ . 这意味着在 $T \geq 10T_M$  (或 $\theta_M \leq 0.2\pi$ )的频域内, 可将式(4b)简化为 $\theta_0 \approx \theta_M \ln 2$ , 以降低求解的复杂度, 而在更宽的频率范围应用时, 则需要考虑较之精确求解更简易些的近似计算策略.

分析式(3c)和式(4a)可知, 当 $\omega$ 充分小时有解

$$\Delta\theta \approx z_0 = \frac{8x}{\pi \sqrt{1 + \theta_M^2}},$$

而在 $\Delta\theta/\theta_m > 4$ 时又有 $\Delta\theta \approx z_1 = \theta_m + z_0 |N_c^*|$ . 由于这两个极端解之间的过渡性主要由指数因子 $e^{-\Delta\theta/\theta_m}$ 的作用所致, 故将式(4a)右端利用桥函数形式人为的替换为 $z_1(1 - e^{-\Delta\theta/\theta_m}) + z_0 e^{-\Delta\theta/\theta_m}$ , 进而拟合得到 $\Delta\theta$ 的近似解 $\hat{\Delta}\theta$ , 再分别代入式(4b)和式(3c)中, 最终整理得到

$$\begin{cases} \Delta\hat{\theta} = \frac{18}{5\pi} \sqrt{\left[ \frac{20x |N_c^*(\theta_m, \theta_M)|}{9\sqrt{1 + \theta_M^2}} + \theta_m \right]^2 - \theta_m^2}, \\ \hat{\theta}_0 = \theta_M \ln \frac{2}{1 + e^{-\frac{\pi}{\theta_M} - \Delta\hat{\theta}(\frac{1}{\theta_m} - \frac{1}{\theta_M})}}, \\ \hat{N}_c(\theta_m, \theta_M, x) = 1 + W(\hat{\theta}_0, 0) - W(\hat{\theta}_0, \Delta\hat{\theta}), \end{cases} \quad (6)$$

其中: “ $\hat{\ast}$ ”表示变量“ $\ast$ ”的逼近值. 显然, 相对于必须通过方程组联立求取 $N_c(\theta_m, \theta_M, x)$ 的精确解来说, 式(6)给出的近似解计算模型要简捷很多, 无需进行复杂的方程数值求解, 通过直接计算即可得到不同参数( $T_m, T_M$ )下的频率特性 $\hat{N}_c(\theta_m, \theta_M, x)$ .

为评估式(6)相对于式(3c)的逼近精度, 在 $(\gamma, x) \in [0, 1] \times [0, 0.5]$ 的整体参数区间内对两者进行了遍历计算和比较, 获得的各参量在不同相对频率下的最大误差曲线见图5所示. 整体上看, 虽然最大误差都随频率有逐渐变大趋势, 但描述函数幅频特性相对误差和相频特性误差分别优于4.2%和0.04 rad, 说明式(6)所给出的无论是中间参量还是描述函数的计算都具有很好的逼近精度, 完全可以直接用于变载非线性的频域分析或系统设计.

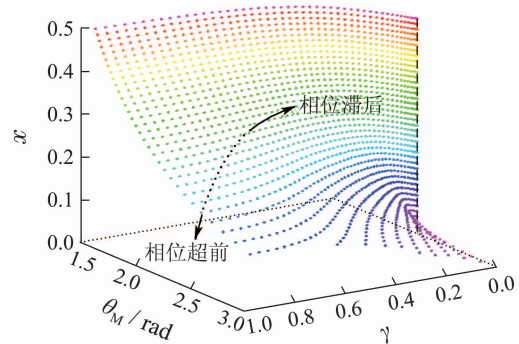


图4  $(\gamma, x, \theta_M) \angle N_c(\theta_m, \theta_M, x) = 0$ 的参数关系

Fig. 4 Relationship of  $(\gamma, x, \theta_M) \angle N_c(\theta_m, \theta_M, x) = 0$

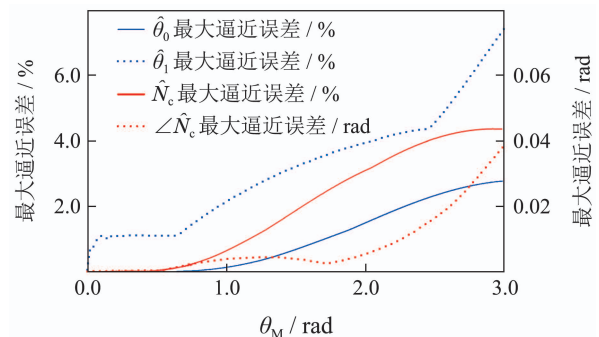


图5 式(6)的最大逼近误差

Fig. 5 Maximum approximating errors of (6)

### 4 闭环振荡激励与间隙辨识

从间隙参数辨识的角度来看, 以往大多是直接考虑结合常规的迟滞特性模型, 通过人为给定必要的输



入函数 $p(t)$ , 并借助于响应函数 $q(t)$ 的测量来进行<sup>[16-22]</sup>. 但正如本文所指出的, 一般情形下由于驱动源、齿轮系和负载相连接后会耦合导致变载非线性的出现, 这样直接给定 $p(t)$ 在事实上难以做到. 此外, 对于处于实际服役中的系统(如远在卫星上作业的机械臂)来说, 这类函数的幅值频率等参数还需要离线设定和在线尝试, 显然过于繁琐和盲目. 鉴此, 我们提出一个更为简捷的闭环间隙辨识方法, 即不对服役中的伺服系统进行物理性调整(如拆卸, 转放于专用台架测试等), 而是利用所建立的变载非线性频域模型 $N_c(\theta_m, \theta_M, x)$ 与已知的恒载模型 $K_p/j\omega(1 + j\theta_M)$ 及 $N^*(x)$ 相串联, 将原有的位置环控制器 $G_c(s)$ 恰好校正到闭环临界稳定状态, 自激产生低频低幅值的弱振激励 $p(t)$ , 进而通过 $\{p(t), q(t)\}$ 的测量得到相应的一阶谐波函数 $\{p_1(t), q_1(t)\}$ 及其两者的相位差 $\phi^*$ 和 $P_{1m}$ , 再由式(1)求解振荡点 $x^*$ 并获得间隙参数 $\delta$ 的辨识值 $\hat{\delta}$ , 即

$$\begin{cases} \frac{4x^*(1-x^*)}{\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}(1-2x^*) + (1-2x^*)\sqrt{1-(1-2x^*)^2}} = \\ \tan \phi^*, \\ \hat{\delta} = x^* P_{1m}. \end{cases} \quad (7)$$

正是基于文中对间隙变载非线性机理的阐释及其所建立的描述函数模型, 使我们可简单的运用成熟的频域设计手段, 将闭环系统的振荡校正到预期的频率或幅值附近, 既能实现有效振荡, 又可降低附加的碰撞等扰动. 此外, 由于这类闭环行为所对应的是振荡点参数 $x^*$ , 故而它会通过自动改变 $P_{1m}$ 以适应不同的间隙值. 因式(7)很容易求解, 因此间隙辨识的实现就取决于能否找到满足低频低幅值振荡条件的闭环控制律 $G_c(s)$ .

考虑由 $G_c(s)$ 将这个闭环振荡系统的线性部分 $G_n(s)$ 整定为如下形式:

$$\begin{aligned} G_n(s) &= \frac{m_0}{s} G_p(s) G_f(s) G_c(s) = \\ &= \frac{K}{\tau s(\tau s + 1)^n}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中:  $K > 0, \tau > 0$ 分别是待定增益和时间常数;  $n \geq 2$ 为待定正整数. 显而易见, 由 $(n, K, \tau)$ 3个参数所整定的 $G_n(j\tau\omega)$ 与 $N^*(x), N_c(\theta_m, \theta_M, x)$ 的关系将决定闭环系统能否使 $p(t)$ 成为一个稳定而有效的周期性激励.

利用熟知的Nyquist判据<sup>[7]</sup>, 对于振荡点参数 $(\omega^*, x^*)$ 而言, 可将系统闭环稳定振荡问题分解为由

$$G_n(j\tau\omega^*) N_c(\theta_m^*, \theta_M^*, x^*) N^*(x^*) = -1$$

所决定的幅相条件, 以及复平面上存在1个正数 $x_b < x^*$ , 使得线段 $\{-1/N^*(x), \forall 0 \leq x \leq x_b\}$ 处于由 $G_n(j\tau\omega) \cdot$

$N_c(\theta_m, \theta_M, x^*)$ 构成的围线之外共3个须同时满足的条件. 这里:  $\theta_m^* = \omega^* T_m, \theta_M^* = \omega^* T_M, \omega^*$ 为 $p_1(t)$ 的角频率,  $x^* = \delta/P_{1m}$ .

首先给定 $n$ 并预设振荡点 $(\omega_s, x_s)$ , 并用 $\hat{N}_c(\theta_m, \theta_M, x)$ 替代 $N_c(\theta_m, \theta_M, x)$ , 从而根据前述闭环振荡稳定性的幅值和相位条件得到

$$\begin{cases} \tau^* = \frac{\mu_s}{\omega_s}, \\ K^* = \frac{\mu_s(1 + \mu_s^2)^{\frac{n}{2}}}{|\hat{N}_c(\omega_s T_m, \omega_s T_M, x_s) N^*(x_s)|}, \\ n \tan^{-1} \mu_s = \frac{\pi}{2} + \angle N^*(x_s) + \\ \quad \angle \hat{N}_c(\omega_s T_m, \omega_s T_M, x), \\ 2 \leq n \leq 5; 0 < x_s \leq 0.5. \end{cases} \quad (9)$$

由于在上式中采用的是多输入描述函数 $N_c$ 的近似解, 因而会使得实际的振荡参数与预设值有所偏差. 一般可经验性的将 $x_s$ 选择在0.29附近.

利用式(5), 显然在 $0 < \theta_M \leq 0.315\pi$ 的范围内,  $G_n(j\tau\omega) N_c(\theta_m, \theta_M, x)$ 在复平面上随不同的 $x$ 所构成的轨线族必然都被限定在由 $G_n(j\tau\omega)$ 和 $G_n(j\tau\omega) \cdot N_c^*(0, \theta_M)$ 分别确定的外边界和内边界轨线之间. 这样就可利用由式(9)确定的外边界轨线与 $N^*(x)$ 的相交条件 $G_n(j\tau^*\omega) N^*(x) = -1$ 找到 $x^*$ 的下界估计 $x_b$ :

$$\begin{cases} n \tan^{-1} \mu_b = \frac{\pi}{2} + \angle N^*(x_b), \\ K^* |N^*(x_b)| = \mu_b(1 + \mu_b^2)^{\frac{n}{2}}. \end{cases} \quad (10)$$

在闭环系统稳定振荡的前提下, 当 $p(t)$ 的基波分量占有主导性且往复运动中齿间碰撞或弹性效应足够低时, 式(7)必然能够给出精度很好的结果. 由于利用式(9)整定的参数保证了式(8)的线性传递函数已具有充分的低通特性, 因此只要实际振荡频率与 $P_{1m}$ 之积足够低时, 就会使齿间碰撞效应得到有效抑制. 鉴此, 定义幅频积系数 $M_f = f^*/x^*$ , 则在确定的间隙参数 $\delta^*$ 下, 越小的 $M_f$ 意味着 $\dot{p}_1(t)$ 的振幅 $\omega^* P_{1m} = 2\pi\delta^* M_f$ 也越小, 由此可以近似的认为齿间碰撞效应也会越小. 所以, 适当降低 $M_f$ 值有助于降低辨识过程的附加干扰.

需要说明的是, 针对迟滞特性的系统闭环稳定性分析设计中, 通常大都习惯于仅仅研究 $G_n(j\tau\omega)$ 与 $-1/N^*(x)$ 是否相交<sup>[7]</sup>, 这很可能与实际情况产生很大偏差. 而式(9)则对此做了必要的修正, 就是通过综合考虑迟滞特性和变载效应而修改建立了 $G_n(j\tau\omega)$ 与 $-1/N^*(x) N_c(\theta_m, \theta_M, x)$ 的相交性条件, 只是为了计算便捷性将 $N_c(\theta_m, \theta_M, x)$ 用其近似函数式(6)来替代. 虽然本文为用于间隙辨识所建立的是保证闭环临界稳定性的参数整定条件, 但对要求闭环渐近稳定的

位置环控制设计来说,只需调整为轨线 $G_n(j\tau\omega) \cdot N_c(\theta_m, \theta_M, x)$ 不能包围 $-1/N^*(x)$ 即可满足设计需求。

### 5 仿真算例与讨论

以由直流力矩电机和刚性齿轮传动机构及其负载构成的某角度闭环伺服系统为例,将电流环和速度环屏蔽后,仅利用对位置环控制器的参数整定实现闭环自激振荡激励和间隙参数辨识。

驱动电机的模型参数为:  $K_p = 1.1766, m_0 = 0.1, T_m = 0.3556$ 和 $T_M = 1.5983$ 。齿轮系统的主从端角度变量 $p(t)$ 和 $q(t)$ 均经叠加了标准差为 $0.002$  rad的零均值高斯白噪声后,经滤波环节

$$G_f(s) = \frac{1}{(0.1s + 1)^2}$$

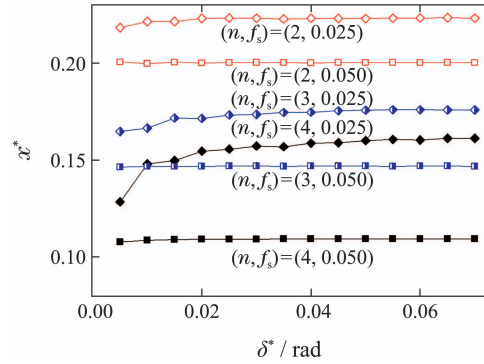
获得在线测量。此外,以 $0.005$  rad为间隔,在 $0.005 \sim 0.07$  rad之间共选择14个间隙真值进行闭环仿真和与辨识结果对比。

取 $x_s = 0.29$ ,相对于不同设定值 $f_s$ 和 $n$ ,由式(9)计算的整定参数( $K^*, \tau^*$ )和 $x_b$ 值汇于表1。相对而言, $f_s$ 对 $K^*$ 影响不大,但会使 $\tau^*$ 有着近乎于成反比的改变。这说明单纯降低闭环振荡频率可能会导致 $\tau^*$ 值过大而不易实现。此外,这2个整定值都会随着 $n$ 的增加而降低,这有利于整定参数的选择,但过大的 $n$ 也会带来控制器的复杂性甚至无法起振的风险。

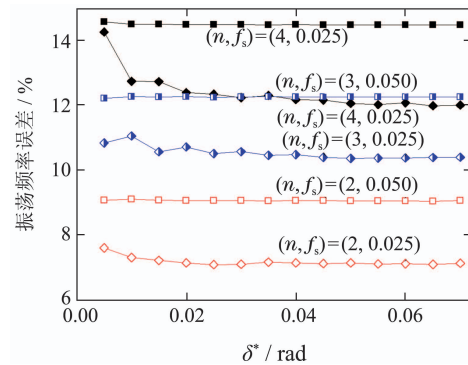
表1 整定参数和 $x_b$ 值  
Table 1 Tuning parameter values and  $x_b$

$n$	$f_s/\text{Hz}$	$K^*$	$\tau^*/\text{s}$	$x_b$
2	0.025	1.5381	4.9967	0.1538
	0.050	1.6212	2.6732	0.1150
3	0.025	0.7821	3.0254	0.1153
	0.050	0.7975	1.5997	0.0926
4	0.025	0.5251	2.2000	0.0853
	0.050	0.5298	1.1593	0.0752

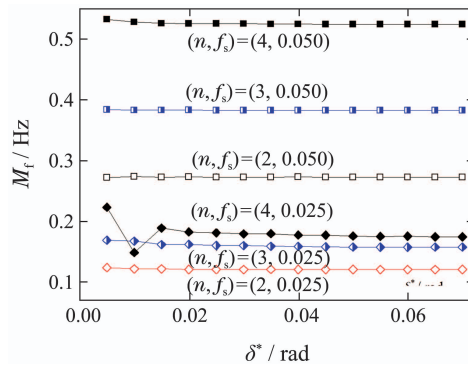
图6(a)–6(b)给出了不同整定参数和间隙真值下,实际闭环自激振荡的参数点 $x^*$ 曲线以及实际振荡频率 $f^*$ 的误差曲线。其中 $\delta^* \geq 0.03$ 情形下的振荡参数( $f^*, x^*$ )相对恒定,但与预设值( $f_s, x_s$ )有所差别。 $f^*$ 比 $f_s$ 约提高了7.1%~14.6%。后者则比 $x_s$ 减小了约0.06~0.18,完全处于由式(10)所确定的表1中 $x_b$ 值之上。这种差别实际上正是由于 $N_c(\theta_m, \theta_M, x)$ 内在的多值性原因所产生。另一方面, $f^*$ 与 $n$ 和 $f_s$ 均呈正向关系,而 $x^*$ 本身则正好相反,较小的 $n$ 和 $f_s$ 会使之有所升高,表明更低的预设频率和更小的 $n$ 值有利于适当降低幅值 $P_{1m}$ 。但当预设频率较低且间隙真值很小时(如 $\delta^* < 0.03$ 和 $f_s = 0.025$  Hz情形),测量噪声的附加影响则有所显现。此外,图6(c)给出的幅频积系数曲线也同样表明低的 $n$ 和 $f_s$ 的确实会使 $M_f$ 更小。



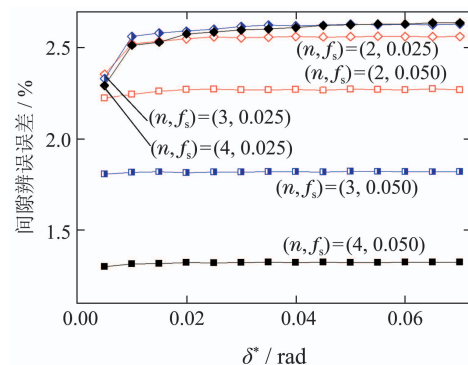
(a) 振荡点参数 $x^*$



(b) 振荡点频率 $f^*$ 误差



(c) 幅频积系数



(d) 间隙闭环辨识误差

图6 不同整定参数和 $\delta^*$ 情形下的闭环振荡参数和间隙辨识误差分布

Fig. 6 The closed-loop oscillating parameters and backlash identification errors under different tuning parameters and  $\delta^*$

在由图6(d)给出的闭环间隙辨识结果曲线中, 同样显示出噪声对 $\delta^* < 0.03$ 以下的辨识误差也有一定的波动性影响. 在 $\delta^* < 0.03$ 之后的辨识误差分布比较平坦且差别不大, 都在1.25%~2.64%之间. 这反映了在测量精度足够的情况下, 本文闭环激振间隙辨识方法本身所能达到的精度水平.

## 6 结论

本文通过对驱动电机、刚性齿轮传动环节和负载相串联耦合后的动力学特性进行分析, 清晰的指出了齿轮传动系统中固有的静态间隙参数不仅会产生前向传递的迟滞特性, 还将因往复驱动过程中加载或空载的交替改变, 反向调制导致驱动环节动力学特性的变载非线性出现. 文中推导建立了这类非线性特性的串联型描述函数模型, 并分析了它的幅频特性和相频特性与变载系数和间隙等参数的关系, 并给出了相应的近似计算公式. 在此基础上, 进一步提出了便于服役系统应用的通过闭环自激弱振控制所实现的间隙辨识新方法, 给出了相应的控制器结构与参数的整定算法. 文中通过具体的闭环系统仿真算例表明, 在标准差 $\sigma = 0.002$  rad水平的高斯白噪声情形下, 适当的整定参数可使得对于0.005~0.07 rad之间间隙的闭环辨识误差在3%以下.

**致谢:** 谨此对作者的同事章杰博士在本文撰写过程中的文献整理和插图处理方面所给予的热忱帮助表示衷心谢意!

## 参考文献:

- [1] DUARTE F B, MACHADO J T. Describing function of two masses with backlash. *Nonlinear Dynamics*, 2009, 56(4): 409 – 413.
- [2] MACHADO J A T. Dynamics of a backlash chain. *Central European Journal of Physics*, 2013, 11(10): 1268 – 1274.
- [3] ELGERD O. A study of asynchronously excited oscillations in nonlinear control systems. *Ire Transactions on Automatic Control*, 2003, 5(3): 179 – 192.
- [4] ROSTALSKI P, BESSELMANN T, Baric M, et al. A hybrid approach to modeling, control and state estimation of mechanical systems with backlash. *Aids*, 2007, 25(3): 367 – 377.
- [5] HÄGGLUND T. Automatic on-line estimation of backlash in control loops. *Journal of Process Control*, 2007, 17(6): 489 – 499.
- [6] ZHAO Guofeng, FAN Weihua, CHEN Qingwei, et al. Survey on backlash nonlinearity. *Acta Armamentarii*, 2006, 27(6): 1072 – 1080. (赵国峰, 樊卫华, 陈庆伟, 等. 齿隙非线性研究进展. 兵工学报, 2006, 27(6): 1072 – 1080.)
- [7] OGATA K, BREWER J W. *Modern Control Engineering*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1970.
- [8] SLOTINE J J E, LI W. *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1991.
- [9] GELB A, VANDER VELDE W E. *Multiple-input Describing Functions and Nonlinear System Design*. New York: McGraw-Hill, 1968.
- [10] LI Dongwu, REN Xuemei, LV Xiaohua, et al. Combined compensation control for Wiener-Hammerstein systems with backlash nonlinearities. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(1): 54 – 61. (李冬伍, 任雪梅, 吕晓华, 等. 含间隙非线性的Wiener-Hammerstein系统复合补偿控制. 控制理论与应用, 2016, 33(1): 54 – 61.)
- [11] ZHAO Haibo, WANG Chengguang, SONG Yong. All-coefficient adaptive control of dual-motor driving servo system. *Journal of Jinggangshan University (Natural Science)*, 2016, 37(3): 48 – 54. (赵海波, 王承光, 宋勇. 双电机驱动伺服系统的全系自适应控制. 井冈山大学学报(自然科学版), 2016, 37(3): 48 – 54.)
- [12] LV C, ZHANG J, LI Y, et al. Synthesis of a hybrid-observer-based active controller for compensating powetrain backlash nonli nearity of an electric vehicle during regenerative braking. *Sae International Journal of Alternative Powertrains*, 2015, 4(1): 190 – 198.
- [13] DU Renhui, WU Yifei, CHEN Wei, et al. Adaptive backstepping fuzzy control for servo systems with backlash. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(2): 254 – 260. (杜仁慧, 吴益飞, 陈威, 等. 考虑齿隙伺服系统的反步自适应模糊控制. 控制理论与应用, 2013, 30(2): 254 – 260.)
- [14] FERRARITRECATÉ G. Observability analysis and state observers for automotive powertrains with backlash: A hybrid system approach. *International Journal of Control*, 2006, 79(5): 496 – 507.
- [15] YAMADA S, FUJIMOTO H, TERADA Y. Joint torque control for backlash compensation in two-inertia system. *IEEE International Symposium on Industrial Electronics*. New York, USA: IEEE, 2016: 1138 – 1143.
- [16] TJAHWIDODO T, AI-BENDER F, BRUSSEL H V. Experimental dynamic identification of backlash using skeleton methods. *Mechanical Systems & Signal Processing*, 2007, 21(2): 959 – 972.
- [17] LAGERBERG A, BO E. Backlash estimation with application to automotive powertrains. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2007, 15(3): 483 – 493.
- [18] MAZZINI F, DUBOWSKY S. The tactile exploration of a harsh environment by a manipulator with joint backlash. *ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. New York, USA: ASME, 2010: 1399 – 1407.
- [19] HAN Y, LIU C, WU J. Backlash identification for PMSM servo system based on relay feedback. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 84(4): 1 – 13.
- [20] KOBAYASHI Y, OKITA T. Identification of nonlinear systems with hysteresis characteristics. *IEEE SICE 2002. Proceedings of the 41st SICE Conference*. New York, USA: IEEE, 2003: 1577 – 1581.
- [21] PAPAGEORGIU D, BLANKE M, NIEMANN H H, et al. Backlash estimation for industrial drive-train systems. *IFAC-PapersOnLine*, 2017, 50(1): 3281 – 3286.
- [22] RUDERMAN M, YAMADA S, FUJIMOTO H. Backlash identification in two-mass systems by delayed relay feedback. *arXiv preprint arXiv: 1802.06246*, 2018. <https://arxiv.org/abs/1802.06246>.
- [23] NORDIN M, BODIN P, GUTMAN P O. New models and identification methods for backlash and gear play. *Adaptive Control of Nonsmooth Dynamic Systems*. London: Springer, 2001: 1 – 30.
- [24] WEST J C, DOUCE J L, LIVESLEY R K. The dual-input describing function and its use in the analysis of non-linear feedback systems. *Proceedings of the IEE, Part B: Radio and Electronic Engineering*, 1956, 103(10): 463 – 473.
- [25] SERVETAS E C, KARYBAKAS C A. Dual-input describing function of 'backlash type' double-valued non-linearities. *International Journal of Control*, 1973, 17(3): 635 – 640.

## 作者简介:

张珩 研究员, 博士生导师, 目前研究方向为鲁棒控制、智能系统设计及其空间应用, E-mail: hzhang@imech.ac.cn;

肖歆昕 高级工程师, 目前研究方向为航天机构动力学与控制, E-mail: xiaoxinxin@imech.ac.cn.