第 36 卷第 8 期
2019 年 8 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 36 No. 8
Aug. 2019

非线性系统中心差分集员估计方法

沈 强[1], 刘洁瑜[1†], 赵 乾[2], 王 琪[1]

(1. 火箭军工程大学 导弹工程学院, 陕西 西安 710025; 2. 火箭军士官学校 测试控制系, 山东 青州 262500)

摘要: 用于非线性椭球估计的扩展集员算法在实际应用中存在着实现性差、边界估计相对保守等缺陷. 本文提出了一种用于非线性系统状态估计的中心差分集员估计方法, 以改善传统非线性集员滤波算法的估计性能. 为克服泰勒展开的固有缺陷, 采用低阶多维Stirling内插多项式代替泰勒展开实现非线性模型的线性化处理; 利用半定规划方法对线性化误差进行外包定界并将其融入过程噪声和量测噪声中, 以降低误差定界的保守性; 量测更新中, 为提高算法的实时性, 将量测椭球松弛为多个带的交, 依次参与状态椭球的更新, 从而实现状态定界椭球的次优估计; 同时, 对椭球—带交集迭代过程中椭球中心到超平面的归一化距离的计算方法进行了改进, 使当前时刻每次迭代的椭球均参与计算并选取最优值, 以减小累计误差. 仿真结果表明了本文所提出算法的有效性和改进性能.

关键词: 非线性系统; 集员估计; 状态估计; 参数估计; 有界噪声; 计算复杂度; 中心差分

引用格式: 沈强, 刘洁瑜, 赵乾, 等. 非线性系统中心差分集员估计方法. 控制理论与应用, 2019, 36(8): 1239 – 1249

DOI: 10.7641/CTA.2018.80369

Central difference set-membership filter for nonlinear system

SHEN Qiang[1], LIU Jie-yu[1†], ZHAO Qian[2], WANG Qi[1]

(1. Missile Engineering Academy, Rocket Force University of Engineering, Xi'an Shaanxi 710025, China;
2. Measurement and Control Department, Rocket Force Sergeant School, Qingzhou Shandong 262500, China)

Abstract: The extended set-membership filter for nonlinear ellipsoidal estimation has some shortcomings such as poor implementation and relatively conservative estimated boundary. In this paper, a central difference set-membership filter for nonlinear system state estimation is proposed to improve the estimation performance of traditional nonlinear set-membership filter. To overcome the inherent defect of Taylor's formula, a low-order multi-dimensional extension of Stirling's interpolation formula is used to realize the linearization of nonlinear models. Then the semi-definite programming method is utilized to outer-bound the linearization error, which is incorporated to the process noise and observation noise, to reduce the conservativeness of the estimated boundary. At observation updating stage, each observation noise bounding ellipsoid is replaced by a parallelotope formed by several strips to improve the real-time performance. Then a sub-optimal algorithm is designed based on consecutive intersection of the time-updated ellipsoid by each strip. Furthermore, the computing method for normalized distances from the centre of ellipsoid to each hyperplane is improved to reduce the accumulative error, which makes the ellipsoid at each iteration of the current moment participate in the calculation and the optimal value is selected. Simulation results have shown the effectiveness and improved performance of the proposed algorithm.

Key words: nonlinear system; set membership estimation; state estimation; parameter estimation; bounded noise; computational complexity; central difference

Citation: SHEN Qiang, LIU Jieyu, ZHAO Qian, et al. Central difference set-membership filter for nonlinear system. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(8): 1239 – 1249

1 引言

目前, Kalman滤波及其相关扩展算法是进行状态估计主要途径[1–2]. 但是, 这些传统的估计方法通常对噪声的分布都有严格的要求. 所以, 实际应用中噪声先验信息的缺失会降低其估计精度甚至使其失效. 近年来, 集员估计(set membership estimation, SME)理论[3]正逐渐受到重视, 因为该算法仅要求噪声有界, 而对边界内的噪声具体分布并无要求, 从而可以克服传统状态估计方法的缺陷, 同时还可以获得估计状态的不确定边界约束. 而这种噪声通常被称为未知但有

收稿日期: 2018−05−19; 录用日期: 2018−10−11.
[†]通信作者. E-mail: liujieyu128@163.com; Tel.: +86 29-84741646.
本文责任编委: 周杰.
国家自然科学基金项目(61503390, 61503392)资助.
Supported by the National Natural Science Foundation of China (61503390, 61503392).

界(unkown but bounded, UBB)噪声. 集员估计的这些优良特性能够有效提高系统的稳定性和可靠性, 从而广泛应用于自动控制[4]、导航定位[5–6]、故障诊断[7–8]等领域. Novara等将集员估计方法用于鲁棒控制, 能够确保所有属于不确定性集合的系统具有鲁棒稳定性和有界跟踪误差[4], 文献[5]将集员估计用于同步定位与地图构建, 并使其适用于在线应用和大规模问题. 周波等[6]将扩展非线性集员滤波器作为多传感器融合方法, 实现了移动机器人的精确定位. Huang等[7–8]则将集员估计用于机器人装配系统的故障诊断与隔离, 有效提高了故障诊断的可靠性和灵敏度.

集员估计理论包括多种定界方法, 其中椭球定界算法具有计算过程相对简单, 可递推实现, 对数据的处理比较灵活, 较强的自适应性并且边界光滑可导等优点, 逐渐成为一种比较重要的集员估计算法. 椭球定界算法最早由Schweppe等人提出[9], 他们给出了时间更新和量测更新过程中状态可行集的外包椭球族, 但并未给出在椭球族中寻找最优定界椭球的方法. 通过描述超平面与椭球的交, Fogel和Huang[10]给出了用于参数辨识的最优椭球定界算法(optimal bounding ellipsoid, OBE). Chernousko[11], Maksarov和Norton[12]对该算法进行了进一步的研究, 采用最小容积和最小迹准则优化参数, 以得到椭球族中的最小椭球. 通过最大化最坏噪声情况下估计误差的Lyapunov函数减少量, Becis-Aubry提出了一种输入状态稳定的集员估计算法[13]. 受此启发, 刘玉双提出了一种快速稳定的椭球定界状态估计算法(ellipsoidal state-bounding based SME, ES–SME), 并从理论上证明了算法的稳定性[14].

针对非线性系统, Scholte和Campbell[15]借鉴扩展Kalman滤波(extended Kalman filter, EKF)的思想, 利用区间分析方法给线性化误差定界, 提出了扩展集员估计滤波器(extended set-membership filter, ESMF), 证明了滤波器的收敛性, 并将其用于携带部分状态信息的非线性模型预测控制[16]. 国内也在此基础上进行了一些改进. 考虑到ESMF同样存在数值稳定性差和运算复杂度高的问题, 周波采用UD分解的方式来提高算法的数值稳定性, 同时通过自适应参数选择方法和选择更新策略提高了算法的实时性[17–18], 提出了自适应扩展集员估计滤波器(adaptive ESMF, AESMF), 并将该方法成功应用于带滑动的履带机器人的状态估计. 为进一步解决过程噪声定界椭球难以精确确定的问题, 宋大雷提出了基于MIT规则的自适应ESMF算法(MIT–based AESMF, MIT–AESMF), 利用MIT规则有效提升了过程噪声不确定界的估计精度, 从而避免了不确定界未知导致的算法恶化问题[19]. Liu Y S在文献[14]的基础上按照ESMF过程进行了非线性扩展[20], 提出了扩展椭球外定界集员估计(extended ellipsoidal outer-bounding SME, EEOB–SME) 算法, 并将其用于双基阵纯方位目标跟踪中[21]. 上述非线性集员估计算法均假设过程噪声和量测噪声边界为椭球, 周波等研究人员在前述研究的基础上, 将噪声边界假设为轴对齐盒, 结合超平形体的性质, 提出了一种新的基于保证定界椭球的非线性集员滤波器[22].

目前以椭球噪声假设为基础的ESMF及其改进算法的基本思想都是围绕状态估计值对非线性模型进行一阶泰勒展开, 作为非线性模型的线性化近似; 然后利用区间分析法估计线性化近似后的高阶项误差范围, 用椭球外包后与噪声椭球集相结合组成虚拟噪声椭球集, 然后应用线性OBE算法进行迭代更新. 然而, 一阶泰勒展开的使用导致ESMF存在一些不足: 如对于强非线性系统, ESMF会导致很大的线性化误差, 造成滤波器难以稳定; Jacobian矩阵及其幂计算复杂, 极易出错, 且要求函数各点可微, 增加了ESMF使用的难度; 同时, 采用的区间分析方法确定的线性化误差边界过于保守, 其累计效应也会影响精度甚至导致滤波器发散; 另外, 量测更新中椭球容积或迹最小化带来的复杂微分方程求解降低了算法的可实现性.

本文提出了一种新的中心差分集员滤波算法(central difference SMF, CDSMF), 借助Stirling插值公式将非线性模型按中心差分形式展开, 作为其线性化近似, 以克服泰勒展开的固有缺陷; 利用半定规划(semi-definite programming, SDP)方法对线性化误差进行外包定界, 降低线性化误差的保守性; 同时, 为避免复杂微分方程的求解, 将量测椭球松弛为多个带的交, 然后采用改进的椭球—带迭代求交的方法得到目标状态的次优估计.

2 系统描述

首先, 椭球集及相关计算过程定义如下:

定义 1 椭球集E定义为[15]

$$E=\{\boldsymbol{x}:(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\leqslant 1\},\tag{1}$$

其中: $\boldsymbol{a}$为椭球中心, $\boldsymbol{x}$为椭球内的任意点, $\boldsymbol{P}$为正定矩阵, 定义了椭球的形状. 该椭球集也可以表示为$E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{P})$.

定义 2 两个椭球集E_1和E_2的Minkowski和$\varPsi_{\mathrm{s}}$定义为[15]

$$\varPsi_{\mathrm{s}}=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_1\in E_1,\ \boldsymbol{x}_2\in E_2\},\tag{2}$$

可以表示为

$$\varPsi_{\mathrm{s}}=E_1\oplus E_2.\tag{3}$$

一般的非线性离散系统可以由下式描述:

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)+\boldsymbol{w}_k, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{y}_{k+1}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_{k+1})+\boldsymbol{v}_{k+1}, \tag{5}$$

其中: $\boldsymbol{x}_k\in\mathbb{R}^n$为状态变量, $\boldsymbol{w}_k\in\mathbb{R}^n$为过程噪声, $\boldsymbol{y}_{k+1}\in\mathbb{R}^m$为量测变量, $\boldsymbol{v}_{k+1}\in\mathbb{R}^m$为量测噪声; $\boldsymbol{f}(\cdot)$和$\boldsymbol{h}(\cdot)$为已知的非线性函数, 在ESMF及其扩展算法中假设为二阶可导, 这是由泰勒展开的使用决定的. 假设初始状态属于已知的椭球集: $\boldsymbol{x}_0\in E(\hat{\boldsymbol{x}}_0,\boldsymbol{P}_0)$, 且过程噪声和量测噪声满足: $\boldsymbol{w}_k\in E(0,\boldsymbol{Q}_k)$, $\boldsymbol{v}_{k+1}\in E(0,\boldsymbol{R}_{k+1})$, 其中$\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{Q}_k,\boldsymbol{R}_{k+1}$均为已知的正定矩阵.

3　扩展集员估计算法

给定系统方程、初始状态和噪声假设, 根据k时刻的系统状态椭球集$E(\hat{\boldsymbol{x}}_k,\boldsymbol{P}_k)$, $k+1$时刻标准ESMF算法的迭代过程为(详细过程请参考文献[15]):

1) 根据椭球极值计算状态不确定区间$\boldsymbol{X}_k^i$, 其中上标i表示第i个状态变量;

2) 通过区间分析得到拉格朗日余子项的不确定区间$\boldsymbol{X}_{R_k}^n$;

3) 利用$\boldsymbol{X}_{R_k}^n$计算线性化误差的外包椭球$E(0_{n\times1},\bar{\boldsymbol{Q}}_k)$;

4) 计算由过程噪声和状态方程线性化误差合成的虚拟过程噪声椭球$E(0_{n\times1},\hat{\boldsymbol{Q}}_k)$, 满足$E(0_{n\times1},\hat{\boldsymbol{Q}}_k)\supseteq E(0_{n\times1},\boldsymbol{Q}_k)\oplus E(0_{n\times1},\bar{\boldsymbol{Q}}_k)$;

5) 根据步骤1)–4), 计算由量测噪声和量测方程线性化误差合成的虚拟量测噪声椭球$E(0_{m\times1},\hat{\boldsymbol{R}}_k)$;

6) 根据线性SMF的预测过程计算一步预测状态定界椭球$E(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1,k},\boldsymbol{P}_{k+1,k})$, 即求解线性化预测椭球$E(f(\hat{\boldsymbol{x}}_k),\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{F}_k^{\mathrm{T}})$和虚拟过程噪声椭球$E(0_{n\times1},\hat{\boldsymbol{Q}}_k)$的Minkowski和的外包椭球, 同时利用相关参数对椭球进行优化;

7) 根据线性SMF计算更新过程状态定界椭球$E(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1},\boldsymbol{P}_{k+1})$, 即求解预测状态椭球$E(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1,k},\boldsymbol{P}_{k+1,k})$和观测集交集的外包椭球, 同时利用相关参数对椭球进行优化.

AESMF算法是在此基础上将各包络矩阵采取UD分解的形式进行表示和更新, 同时, 结合观测量的序列更新和选择更新策略, 加强了算法的稳定性, 降低了算法的复杂度; MIT–AESMF是在AESMF的基础上通过MIT优化规则, 在线计算使一步预测偏差包络椭球最小化的过程噪声包络椭球, 以此保证滤波器健康指标满足有效条件; 而EEOB–SME算法则是将ESMF的1–6过程与线性ES–SME算法相结合的得到的非线性集员估计方法.

4　中心差分集员滤波

4.1　非线性模型线性化

ESMF及其拓展算法的一个特点是在线性化过程中要计算函数的Jacobian矩阵, 不仅要求函数各点都是可微的, 而且计算复杂. 这些问题的根源在于采用了泰勒展开近似. 为克服这些问题, 本文利用Stirling内插公式将非线性函数按多项式展开, 代替泰勒展开作为线性近似, 其优势在于不需要计算函数的偏导数, 甚至非线性函数不连续且存在奇异点也能进行状态估计. 而且可以通过步长的设置, 使Stirling插值展开式的精度高于同阶的泰勒级数展开式. 经过一系列变换, $f(x)$以$x=\bar{x}$为中心的Stirling插值公式的二阶近似可以转化为[23]

$$\begin{aligned}&f(x)\approx\\&f(\bar{x})+f'(\bar{x})(x-\bar{x})+\frac{f''(\bar{x})}{2!}(x-\bar{x})^2+\\&(\frac{f^{(3)}(\bar{x})}{3!}h^2+\frac{f^{(5)}(\bar{x})}{5!}h^4+\cdots)(x-\bar{x})+\\&(\frac{f^{(4)}(\bar{x})}{4!}h^2+\frac{f^{(6)}(\bar{x})}{6!}h^4+\cdots)(x-\bar{x})^2,\end{aligned} \tag{6}$$

其中h为差分步长.

展开后, 前3项与泰勒二阶展开相同, 其余项可以由步长控制, 显然二阶Stirling公式比泰勒二阶展开式相比多了可由步长控制的多余项, 通过选择步长可以控制多余项使其尽可能的接近完整泰勒展开式的高阶项, 从而提高近似精度. 最优步长的选择策略可以参考文献[24], 且该文献中已证明h^2与误差峭度相等时可以有效提高Stirling插值展开式的近似精度.

而后将Stirling插值展开拓展到高维的情况, 设$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$为函数向量, 则在$\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}$处用Stirling插值公式展开, 得

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}+\Delta\boldsymbol{x})\approx\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})+\tilde{D}_{\Delta x}\boldsymbol{f}+\text{H.O.T}, \tag{7}$$

式中H.O.T指展开式的高阶余子项. 差分算子可以表达如下:

$$\tilde{D}_{\Delta x}\boldsymbol{f}=\frac{1}{h}(\sum_{p=1}^{n}\Delta x_p\mu_p\delta_p)\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}), \tag{8}$$

其中: μ_p为第p个平均算子, δ_p为第p个差分算子, 多维情况下, 分别为

$$\delta_p\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}+\frac{h}{2}\boldsymbol{e}_p)-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}-\frac{h}{2}\boldsymbol{e}_p), \tag{9}$$

$$\mu_p\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})=\frac{1}{2}[\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}+\frac{h}{2}\boldsymbol{e}_p)+\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}-\frac{h}{2}\boldsymbol{e}_p)]. \tag{10}$$

为了方便处理, 结合式(8)–(10), 将$\tilde{D}_{\Delta x}\boldsymbol{f}$作如下转化:

$$\begin{aligned}&\tilde{D}_{\Delta x}\boldsymbol{f}=\\&\frac{1}{h}[\mu_1\delta_1\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})\ \mu_2\delta_2\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})\cdots\ \mu_n\delta_n\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})]\,(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}),\end{aligned} \tag{11}$$

其中$\mu_p\delta_p\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})=\dfrac{\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}+h\boldsymbol{e}_p)-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}-h\boldsymbol{e}_p)}{2}$.

利用这种形式可以方便地计算线性化后的状态转移矩阵和量测矩阵, 以式(7)和式(11)为基础, 将系统中的非线性模型按中心差分形式展开, 得到如下的线性模型:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) \approx \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_k) + \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k), \tag{12}$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_{k+1}) \approx \boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1,k}) + \boldsymbol{H}_{k+1}(\boldsymbol{x}_{k+1} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1,k}), \tag{13}$$

其中:

$$\boldsymbol{F}_k = \frac{1}{2h}\begin{bmatrix} (\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{1+}) - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{1-}))^{\mathrm{T}} \\ (\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{2+}) - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{2-}))^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ (\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{n+}) - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{n-}))^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{H}_{k+1} = \frac{1}{2h}\begin{bmatrix} (\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1,k}^{1+}) - \boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1,k}^{1-}))^{\mathrm{T}} \\ (\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1,k}^{2+}) - \boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1,k}^{2-}))^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ (\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1,k}^{n+}) - \boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1,k}^{n-}))^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{15}$$

且

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^{p+} = \hat{\boldsymbol{x}}_k + h\boldsymbol{e}_p,\ \hat{\boldsymbol{x}}_k^{p-} = \hat{\boldsymbol{x}}_k - h\boldsymbol{e}_p,$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1,k}^{p+} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1,k} + h\boldsymbol{e}_p,\ \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1,k}^{p-} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1,k} - h\boldsymbol{e}_p.$$

将式(12)和式(13)分别代入式(4)和式(5), 即可得到系统方程的线性化模型. 从上述过程可以看出, 利用多维Stirling插值公式线性化的过程中, 不需要计算Jacobian矩阵, 只需要将相应的单位列向量代入函数, 计算方便, 不要求连续可导; 而且, Stirling插值展开式精度在合理选择步长的情况下高于泰勒级数展开式. 所以, CDSMF算法理论上可以得到高于ESMF的估计精度, 并克服ESMF的固有缺陷.

4.2 线性化误差定界

ESMF及其拓展算法中, 对于线性化误差不确定边界的确定, 通常采用区间分析的方法, 这种方法会增加边界估计的保守性. 主要原因有3点: 1) 由状态区间矢量$\boldsymbol{X}_k$的计算过程(详见文献[15])可知, 计算误差界采用的区间矢量覆盖范围大于上一步迭代得到的状态可行集$E(\hat{\boldsymbol{x}}_k, \boldsymbol{P}_k)$; 2) 区间分析方法本身会在一定程度上放大误差范围. 如函数$f(x) = x^2 - e^x$, $x \in [0, 2]$, 函数的实际范围为$f(x) \in [-3.3891, -1]$, 区间分析得到的函数范围为$f([0, 2]) \in [-7.3891, 3]$; 3) 根据第3节步骤3, ESMF中基于区间分析的误差定界方法得到的外包椭球以原点为中心, 并不符合实际情况, 也会导致误差界趋于保守. 如函数$f(x) = x^2$在x_0处泰勒展开后非线性余子项可以表示为$(x - x_0)^2$, 其值大于0, 而并非以原点为中心. 本文采用非线性规划方法来优化线性化误差的保证边界, 以得到更为紧致的边界估计, 从而降低算法的保守性. 根据式(12), 系统方程线性化误差可以表示为

$$\Delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_k) - \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k), \tag{16}$$

则线性化误差范围可以用区间矢量$[\Delta \boldsymbol{f}_{\min}(\boldsymbol{x}_k), \Delta \boldsymbol{f}_{\max}(\boldsymbol{x}_k)]$来表示, 对区间矢量边界的求解本质上是在椭球可行集范围内寻求线性化误差的极值, 故可构造如下的非线性规划问题求解:

$$\begin{aligned} &\min\ \Delta \boldsymbol{f}_k^i, \\ &\text{s.t.}\ (\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k) \leqslant 1. \end{aligned} \tag{17}$$

根据Schur补引理, 本文将该优化过程转化为如下的SDP问题, 从而采用内点法等优化方法解决.

$$\begin{aligned} &\min\ \Delta \boldsymbol{f}_k^i, \\ &\text{s.t.}\ \begin{bmatrix} -1 & (\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k)^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k & -\boldsymbol{P} \end{bmatrix} \preceq 0. \end{aligned} \tag{18}$$

得到线性化误差范围的区间矢量之后, 按照如下过程计算其外包椭球$E(\boldsymbol{a}_Q, \bar{\boldsymbol{Q}}_k)$的中心和形状矩阵:

$$\begin{cases} [\bar{\boldsymbol{Q}}_k]^{i,i} = \dfrac{1}{2}(\Delta \boldsymbol{f}_{\max}^i(\boldsymbol{x}_k) - \Delta \boldsymbol{f}_{\min}^i(\boldsymbol{x}_k))^2, \\ [\bar{\boldsymbol{Q}}_k]^{i,j} = 0,\ \ i \neq j, \end{cases} \tag{19}$$

$$\boldsymbol{a}_{Q_k} = \frac{1}{2}(\Delta \boldsymbol{f}_{\max}(\boldsymbol{x}_k) + \Delta \boldsymbol{f}_{\min}(\boldsymbol{x}_k)). \tag{20}$$

按照同样的思路可以得到量测方程线性化误差的外包椭球$E(\boldsymbol{a}_{R_k}, \bar{\boldsymbol{R}}_k)$. 然后, 可按照第3节步骤4和5合成虚拟过程噪声椭球$E(\boldsymbol{a}_{Q_k}, \hat{\boldsymbol{Q}}_k)$和虚拟量测噪声椭球$E(\boldsymbol{a}_{R_k}, \hat{\boldsymbol{R}}_k)$.

需要指出的是, 此处SDP的求解采用内点法, 在程序中采用SeDuMi工具箱计算得到. 经过理论和实验分析, 该算法虽然可行, 但计算量较大, 特别是维数较高的时候, 会在一定程度上降低算法的实时性. 受文献[25]启发, 当系统比较复杂且对实时性要求较高时, 可以通过凸差(difference of convex, DC)分解对SDP问题进行松弛求解. 具体过程如下:

首先, 按照每个分量构造函数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的DC表示形式, 如第$i$个分量: $\boldsymbol{f}^i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}_{\mathrm{d1}}^i(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}_{\mathrm{d2}}^i(\boldsymbol{x})$. 其中: $\boldsymbol{f}_{\mathrm{d1}}^i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}^i(\boldsymbol{x}) + \alpha\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{f}_{\mathrm{d2}}^i(\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$, $\alpha > 0$.

然后, 将线性化误差范围$[\Delta \boldsymbol{f}_{\min}^i(\boldsymbol{x}_k), \Delta \boldsymbol{f}_{\max}^i(\boldsymbol{x}_k)]$松弛为

$$\Big[\min_{\boldsymbol{x}_k \in \mathrm{vert}(E(\hat{\boldsymbol{x}}_k, \boldsymbol{P}_k))} \{\bar{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{d1}}^i(\boldsymbol{x}_k) - \boldsymbol{f}_{\mathrm{d2}}^i(\boldsymbol{x}_k) - \boldsymbol{f}_{\mathrm{L}}^i(\boldsymbol{x}_k)\},$$

$$\max_{\boldsymbol{x}_k \in \mathrm{vert}(E(\hat{\boldsymbol{x}}_k, \boldsymbol{P}_k))} \{\boldsymbol{f}_{\mathrm{d1}}^i(\boldsymbol{x}_k) - \bar{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{d2}}^i(\boldsymbol{x}_k) - \boldsymbol{f}_{\mathrm{L}}^i(\boldsymbol{x}_k)\}\Big],$$

其中: 符号$\mathrm{vert}(\varOmega)$表示集合$\varOmega$中所有的顶点, $\bar{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{d1}}^i(\boldsymbol{x}_k)$, $\bar{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{d2}}^i(\boldsymbol{x}_k)$和$\boldsymbol{f}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}_k)$分别为$\boldsymbol{f}_{\mathrm{d1}}^i(\boldsymbol{x}_k)$, $\boldsymbol{f}_{\mathrm{d2}}^i(\boldsymbol{x}_k)$和$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$的线性近似.

上面的过程是将DC规划与椭球定界相结合得到的, 与文献[25]中的全对称多胞形不同, 本文使用的是椭球可行集, 其顶点集合实际上是整个椭球边界, 因此松弛后误差边界的计算依然需要求解SDP问题. 为减小计算量, 本文进一步采用外包超平形体$P(\hat{\boldsymbol{x}}_k,\boldsymbol{T}_k) = \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n|\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{x}}_k+\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{z},\ \|\boldsymbol{z}\|_\infty\leqslant 1\}$来逼近椭球体$E(\hat{\boldsymbol{x}}_k,\boldsymbol{P}_k)$, 其中$\boldsymbol{P}_k=\boldsymbol{T}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_k$. 由此线性化误差边界可进一步松弛为

$$[\min_{\boldsymbol{x}_k\in vert(P(\hat{\boldsymbol{x}}_k,\boldsymbol{T}_k))}\{\bar{\boldsymbol{f}}^i_{\mathrm{d}1}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{f}^i_{\mathrm{d}2}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{f}^i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}_k)\},$$
$$\max_{\boldsymbol{x}_k\in vert(P(\hat{\boldsymbol{x}}_k,\boldsymbol{T}_k))}\{\boldsymbol{f}^i_{\mathrm{d}1}(\boldsymbol{x}_k)-\bar{\boldsymbol{f}}^i_{\mathrm{d}2}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{f}^i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}_k)\}].$$

由于超平形体$P(\hat{\boldsymbol{x}}_k,\boldsymbol{T}_k)$的顶点数为$2n$, 所以上式的计算只需要将所有顶点值代入公式计算最大或最小值即可, 避免了内点法等复杂的运算过程, 极大地提高算法的实时性. 虽然在精度方面与通过内点法直接求解SDP问题相比有所降低, 但依然可提供线性化误差的二阶近似结果, 因此可以说在计算复杂度与精度间取得了良好的平衡. 如对于前面给出的函数$f(x)=x^2-e^x,\ x\in[0,2]$, 利用DC规划得到的函数范围为$[-4.3891, 0]$, 依然优于区间分析得到的$[-7.3891, 3]$.

4.3 预测和更新

1) 状态预测.

完成非线性模型线性化、线性化误差定界之后, 可以采用线性系统的方法[12]计算状态预测椭球$E(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1,k},\boldsymbol{P}_{k+1,k})$:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1,k}=\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_k)+\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{Q}_k},\tag{21}$$

$$\boldsymbol{P}_{k+1,k}=\boldsymbol{F}_k\frac{\boldsymbol{P}_{k,k}}{1-\beta_k}\boldsymbol{F}_k^{\mathrm{T}}+\frac{\hat{\boldsymbol{Q}}_k}{\beta_k}.\tag{22}$$

参数β_k可以用来优化预测椭球的大小, 其选择方法涉及到两个椭球Minkowski和的外包椭球的最优化, 常用的方法包括最小容积和最小迹准则. 本文采用最小迹准则, 因为使用该准则可以得到最优参数的显式表达式, 从而避免非线性方程的求解. 利用最小迹准则[12]可以得到相应的最优β_k为

$$\beta_k=\frac{\sqrt{\mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{Q}}_k)}}{\sqrt{\mathrm{tr}(\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{F}_k^{\mathrm{T}})}+\sqrt{\mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{Q}}_k)}}.\tag{23}$$

2) 量测更新.

如果按照ESMF算法所述的过程进行量测更新, 无论采用最小容积准则还是最小迹准则, 参数ρ_k的优化选择都十分困难甚至无法得到解析解, 数值计算复杂度较高. 本文采用一种次优的处理方法, 将量测椭球松弛为多个带的交, 从而将椭球与椭球的交转化为m次椭球和带的交集计算.

量测更新的目的是求解预测状态椭球$E(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1,k},\boldsymbol{P}_{k+1,k})$和观测集$S_{k+1}=\{\boldsymbol{x}|(\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{k+1}^{-1}(\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}))\leqslant 1\}$的交集的外包椭球$E(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1},\boldsymbol{P}_{k+1})$. 线性化后, 观测集可重新写为

$$\begin{aligned}&S_{k+1}=\\&\{\boldsymbol{x}|(\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1,k})-\\&\boldsymbol{H}_{k+1}(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1,k})-\boldsymbol{a}_{R_{k+1}})^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{R}}_{k+1}^{-1}(\boldsymbol{y}_{k+1}-\\&\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1,k})-\boldsymbol{H}_{k+1}(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1,k})-\boldsymbol{a}_{R_{k+1}})\leqslant 1\}.\end{aligned}\tag{24}$$

假设由量测噪声和量测方程线性化误差合成的虚拟量测噪声为$\hat{\boldsymbol{v}}_{k+1}$, 则$\hat{\boldsymbol{v}}_{k+1}$的外包椭球$E(\boldsymbol{a}_{R_{k+1}},\hat{\boldsymbol{R}}_{k+1})$可以松弛为$m$个带的交, 每个带由一对正交于椭球特征向量的超平面构成

$$\bigcap_i\{\boldsymbol{v}:a_i-r_i\leqslant\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\leqslant a_i+r_i\},\tag{25}$$

其中: $a_i=\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_{R_{k+1}}$, r_i^2为$\hat{\boldsymbol{R}}_{k+1}$的特征值, $\boldsymbol{u}_i$为相应的特征向量, $i=1,2,\cdots,m$. 之所以这样构造带, 是因为在前期工作中已经证明由式(25)给出的超平面包裹形成的超平形体是所有包含$E(\boldsymbol{a}_{R_{k+1}},\hat{\boldsymbol{R}}_{k+1})$的平行体中体积最小的. 需要说明的是, 式(24)及后面的公式中, 所有变量矩阵均应带有下标$k+1$, 但为了描述方便, 量测更新中出现的中间变量和矩阵均省略了下标$k+1$.

结合式(24)和式(25), 经过几次代入和变换, 可以将S_{k+1}松弛为如下所示的m个带的交:

$$\begin{aligned}&S'_{k+1}=\bigcap_i S'_{k+1,i}=\\&\bigcap_i\{\boldsymbol{x}:y_i-a_i-r_i\leqslant\boldsymbol{h}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant y_i-a_i+r_i\},\end{aligned}\tag{26}$$

其中:

$$\begin{aligned}&y_i=\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1,k})+\boldsymbol{H}_{k+1}\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1,k}),\\&[\boldsymbol{h}_1\ \ \boldsymbol{h}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{h}_m]_{k+1}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_{k+1},\\&\boldsymbol{R}_{k+1}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{R}_{\mathrm{d}}=\mathrm{diag}\{r_1^2,r_2^2,\cdots,r_m^2\},\\&\boldsymbol{U}=[\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{u}_m].\end{aligned}$$

所以量测更新可以通过序列更新的方法逐次求解椭球$E(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}^{i-1},\boldsymbol{P}_{k+1}^{i-1})$与带$S'_{k+1,i}$的交来实现, 具体过程如下:

迭代初始化为

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}^0=\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1,k},\ \boldsymbol{P}_{k+1}^0=\boldsymbol{P}_{k+1,k}.\tag{27}$$

假设α_i^+和α_i^-表示椭球中心到第i对超平面的归一化距离. 当$\alpha_i^+\alpha_i^-\leqslant -1/n$时, 有

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}^i=\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}^{i-1},\ \boldsymbol{P}_{k+1}^i=\boldsymbol{P}_{k+1}^{i-1},\tag{28}$$

否则

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}^{i}=\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}^{i-1}+\lambda_i\frac{\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{h}_i e_i}{d_i^2}, \tag{29}$$

$$\boldsymbol{P}_{k+1}^{i}=(1+\lambda_i-\frac{\lambda_i e_i^2}{d_i^2+\lambda_i g_i})\boldsymbol{S}_i, \tag{30}$$

其中:

$$\boldsymbol{S}_i=\boldsymbol{P}_{k+1}^{i-1}-\frac{\lambda_i}{d_i^2+\lambda_i g_i}\boldsymbol{P}_{k+1}^{i-1}\boldsymbol{h}_i\boldsymbol{h}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{k+1}^{i-1},$$

$$e_i=\sqrt{g_i}(\frac{\alpha_i^{+}+\alpha_i^{-}}{2}),\ d_i=\sqrt{g_i}(\frac{\alpha_i^{+}-\alpha_i^{-}}{2}),$$

$$g_i=\boldsymbol{h}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{k+1}^{i-1}\boldsymbol{h}_i.$$

为使椭球$E(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}^{i},\boldsymbol{P}_{k+1}^{i})$体积最小, 参数$\lambda_i$取下式的正根:

$$(n-1)g_i^2\lambda_i^2+((2n-1)d_i^2-g_i+e_i^2)g_i\lambda_i+(n(d_i^2-e_i^2)-g_i)d_i^2=0, \tag{31}$$

最终有

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}=\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}^{m},\ \boldsymbol{P}_{k+1}=\boldsymbol{P}_{k+1}^{m}. \tag{32}$$

式(27)(32)所示的椭球—带求交的迭代过程是文献[22]中给出的. 对于α_i^{+}和α_i^{-}的计算, 该文献只考虑了上一次迭代得到的椭球, 即直接计算从中心$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}^{i-1}$到每个超平面的归一化距离. 但是, 采用序列更新的方法求椭球与多个带的交的主要缺点是每次迭代的近似误差都会累积, 只考虑最后一个椭球会导致误差放大. 因此, 本文对椭球中心到超平面的归一化距离的计算过程进行了改进, 计算距离时考虑之前每次迭代的椭球, 从而修正超平面边界, 寻求最优距离, 以减弱这种误差累积的影响, 提高量测更新精度. 具体描述如下: 进行第i次迭代前, 对于前$i-1$次迭代得到的椭球$E(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}^{j},\boldsymbol{P}_{k+1}^{j})$, $j=0,1,\cdots,i-1$, 计算每个椭球与第i组超平面的距离:

$$\gamma_j^{+}=\frac{y_i-a_i+r_i-\boldsymbol{h}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}^{j}}{\sqrt{\boldsymbol{h}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{k+1}^{j}\boldsymbol{h}_i}}, \tag{33}$$

$$\gamma_j^{-}=\frac{y_i-a_i-r_i-\boldsymbol{h}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}^{j}}{\sqrt{\boldsymbol{h}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{k+1}^{j}\boldsymbol{h}_i}}. \tag{34}$$

γ_j^{+}和γ_j^{-}主要用于判断原始超平面与椭球间的位置关系, 进而计算修正后的超平面边界. 假设修正后第i对超平面包围的区域为

$$S'_{k+1,i}=\{\boldsymbol{x}:\beta_i^{-}\leqslant\boldsymbol{h}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant\beta_i^{+}\}, \tag{35}$$

则当$\gamma_j^{+}>1$时, 取

$$\beta_j^{+}=\boldsymbol{h}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}^{j}+\sqrt{\boldsymbol{h}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{k+1}^{j}\boldsymbol{h}_i}. \tag{36}$$

当$\gamma_j^{-}<-1$时, 取

$$\beta_j^{-}=\boldsymbol{h}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}^{j}-\sqrt{\boldsymbol{h}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{k+1}^{j}\boldsymbol{h}_i}. \tag{37}$$

因为此时超平面与椭球不相交, 所以用与椭球相切的超平面来代替. 当超平面与椭球相交时, β_j^{+}和β_j^{-}取值不变, 即

当$-1\leqslant\gamma_j^{+}\leqslant 1$时, 取

$$\beta_j^{+}=y_i-a_i+r_i; \tag{38}$$

当$-1\leqslant\gamma_j^{-}\leqslant 1$时, 取

$$\beta_j^{-}=y_i-a_i-r_i. \tag{39}$$

而当$\gamma_j^{+}<-1$或$\gamma_j^{-}>1$时, 椭球与带无交集, 表明噪声边界与数据冲突, 可以修改模型、噪声边界或者直接结束此次迭代, 取预测椭球作为本时刻的估计状态可行集.

在所有修正的边界中寻求最优值参与归一化距离计算, 即取$\beta_i^{+}=\min\limits_{j}(\beta_j^{+})$, $\beta_i^{-}=\max\limits_{j}(\beta_j^{-})$, 则最终可以得到

$$\alpha_i^{+}=\frac{\beta_i^{+}-\boldsymbol{h}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}^{i-1}}{\sqrt{\boldsymbol{h}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{k+1}^{i-1}\boldsymbol{h}_i}}, \tag{40}$$

$$\alpha_i^{-}=\frac{\beta_i^{-}-\boldsymbol{h}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}^{i-1}}{\sqrt{\boldsymbol{h}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{k+1}^{i-1}\boldsymbol{h}_i}}. \tag{41}$$

图1直观得给出了归一化距离的计算过程改进之后量测更新精度的提升.

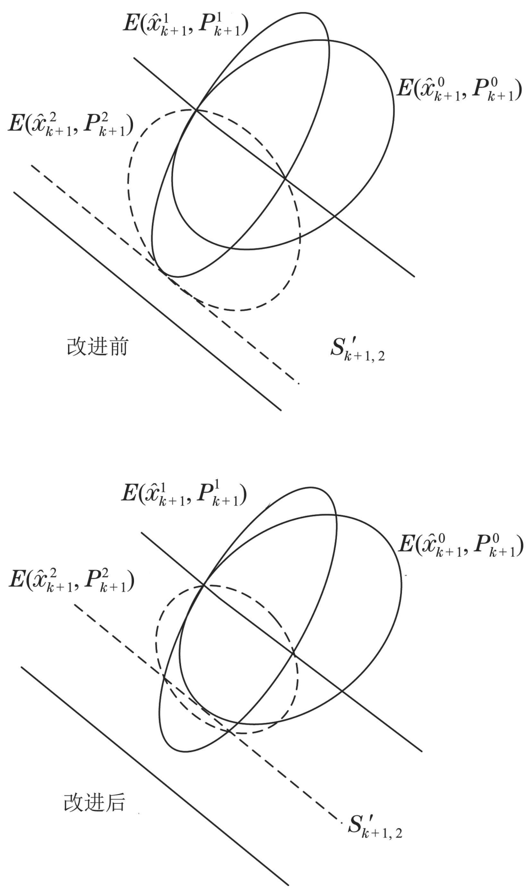


图 1 归一化距离计算过程改进前后的比较

Fig. 1 Comparison of the standard and improved calculation procedure for the normalized distances

图1中, 图(a)和图(b)分别为改进前后的迭代过程. 两幅图中, 初始椭球$E(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}^0, \boldsymbol{P}_{k+1}^0)$、第1步迭代得到的椭球$E(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}^1, \boldsymbol{P}_{k+1}^1)$以及参与第2步迭代的带$S'_{k+1,2}$均相同, 但改进之后第2步迭代得到的椭球$E(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}^2, \boldsymbol{P}_{k+1}^2)$(虚线)明显小于改进之前.

5　复杂度分析

假设$n \geqslant m$, 则对于本文所提的算法而言, 主要迭代过程和参数计算过程的算法复杂度均不大于$\mathrm{O}(n^3)$, 对算法实时性影响较大的是线性化误差定界的过程. 误差定界涉及到通过内点法求解SDP问题, 其单次迭代算法复杂度为$\mathrm{O}(n^3)$, 短步长理论迭代界为$\mathrm{O}(\sqrt{n}\log\frac{n}{\varepsilon})$, 其中$\varepsilon$为精度参数. 综上, 本文所提算法复杂度可以表示为$\mathrm{O}(n^{3.5}\log\frac{n}{\varepsilon})$. 对于ESMF算法及其相应的改进算法而言, 算法的复杂性同样体现在线性化误差定界的过程中, 通过区间分析得到拉格朗日余子项的不确定区间的算法复杂度为$\mathrm{O}(n^4)$, 这也代表ESMF类算法(包括EEOBSME算法)的复杂度为$\mathrm{O}(n^4)$. 令

$$\Delta t(n) = n^4 - n^{3.5}\log\frac{n}{\varepsilon} = n^{3.5}(\sqrt{n} - \log n + \log\varepsilon). \qquad (42)$$

其导函数为

$$\Delta t'(n) = 4n^3 - (3.5\log\frac{n}{\varepsilon} + \frac{1}{\ln 10})n^{2.5}. \qquad (43)$$

根据式(42), 当ε取值较小, 系统复杂程度或阶数n较低时, 存在$\Delta t(n)$小于0的情况, 如$\varepsilon = 0.01$时, $\Delta t(2) = -0.89 < 0$. 但是, 无论ε取何值, 总能找到足够大的$n_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, 当$n \geqslant n_\varepsilon$时, 满足$\Delta t(n) > 0$, 即$\sqrt{n} > \log\frac{n}{\varepsilon}$, 将其代入式(43), 可以得到$\Delta t'(n) > 0$. 所以当$n \geqslant n_\varepsilon$时, $\Delta t(n)$始终大于0, 且是递增的. 这也就意味着, 系统越复杂, 阶数越高, 本文所提算法与ESMF类的算法相比, 在复杂度上的优势越明显. 当$n < m$时, 将上述公式中的n替换为m, 可得到相同结论.

图2为$\varepsilon = 0.01$时两类方法复杂度随状态维数变化的对比图. 可以看出, $n \leqslant 8$时, 本文所提方法复杂度高, 且差距先增大后减小; $n \geqslant 9$时, 本文所提方法复杂度低, 两者间差距迅速拉大. 这进一步验证了上述结论.

另外, 以上分析中并未考虑计算Jacobian矩阵和Hessian矩阵的时耗. 对于ESMF类算法而言, 当系统复杂程度提高之后, 对于Jacobian矩阵和Hessian矩阵的计算会造成难以预计的巨大负担. 而本文所提的算法则通过线性化以及线性化误差定界的改进避免了Jacobian矩阵和Hessian矩阵的使用, 从而降低了算法的复杂性, 提高了可实现性.

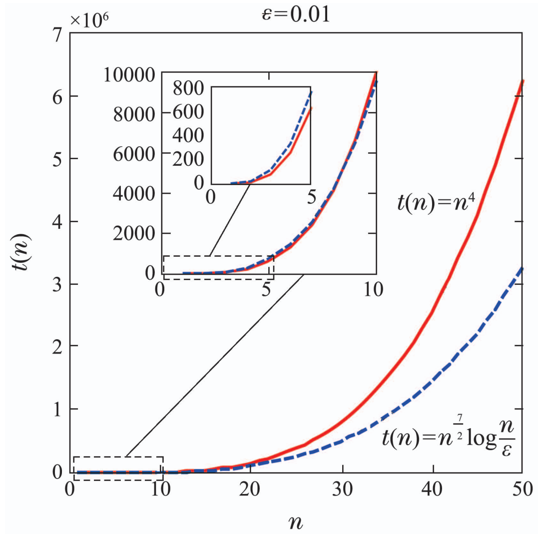


图 2　复杂度随状态维数变化的对比图

Fig. 2　Comparison of complexity with state dimension

但是, 需要承认的是, 无论是已经存在的ESMF类算法, 还是本文提出的算法, 算法复杂度相对来说都比较高, 这一点可以由图2看出. 随着问题复杂度的增高, 算法的实时性问题必然会影响其在实际应用中的推广. 对于本文所提算法而言, 当算法需要在实时性要求较高的情况下应用时, 可以通过增大ε(牺牲精度)来降低复杂度, 但效果有限, 因为这并没有改变复杂度的数量级. 另一种思路是通过第3节所述的DC规划方法对SDP问题进行松弛求解, 这种方法可以将算法的时间复杂度降低为$\mathrm{O}(n^3)$, 而且能保证一定精度, 其缺点在于要求函数二阶可导且仍需要求解函数的Jacobian矩阵.

6　仿真验证

为验证本文所提方法的性能, 论文将CDSMF算法应用于非线性质量—弹簧—阻尼机械系统质量块的位移估计中. 此仿真对象与文献[15,20]和文献[22]中的仿真对象一致, 并采用与文献[15]相同的仿真参数, 旨在通过与其对比验证所提方法的优越性能. 即采用如下的系统模型:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{w}_k, \qquad (44)$$

$$y_{k+1} = \boldsymbol{H}_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + v_{k+1}, \qquad (45)$$

其中:

$$\boldsymbol{x}_k = [x_{1,k}\quad x_{2,k}]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{H}_{k+1} = [1\quad 0],$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) = \begin{bmatrix} x_{1,k} + \Delta T x_{2,k} \\ x_{2,k} + \Delta T(-k_0 x_{1,k}(1 - k_{\mathrm{d}} x_{1,k}^2) - c x_{2,k}) \end{bmatrix}.$$

模型中包含的常数取值如下: $k_0 = 1.5$, $k_{\mathrm{d}} = 3$, $c = 1.24$; 仿真初始状态为$\boldsymbol{x}_0 = [0.2\quad 0.3]^{\mathrm{T}}$, 总仿真时间为7 s, 采样间隔$\Delta T = 100$ ms. 仿真中, 假设过程噪声和量测噪声均匀分布, 且属于式(9)–(10)所示的

椭球集, 并取 $\boldsymbol{Q}_k = \mathrm{diag}\{0.002^2, 0.002^2\}$, $\boldsymbol{R}_{k+1} = 0.001^2$, 初始状态椭球中心 $\hat{\boldsymbol{x}}_0 = [0.2\ \ 0.3]^{\mathrm{T}}$, 形状矩阵 $\boldsymbol{P}_0 = \mathrm{diag}\{0.01, 0.01\}$. 过程噪声的分布如图3所示.

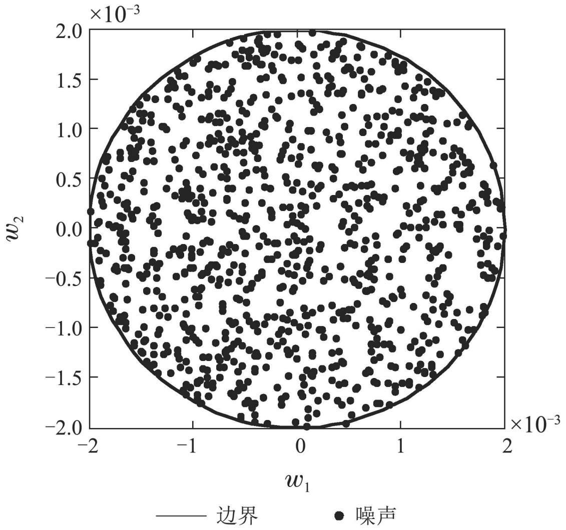


图 3 椭球定界UBB噪声

Fig. 3 UBB noise in bounding ellipsoid

仿真中将本文提出的算法与文献[15]和文献[20]中提出的算法进行对比, 选择这两种算法的原因是它们对噪声和初始状态的边界假设与本文所提方法是一致的. 所有算法均采用可行集的椭球中心作为点估计来考察算法性能, 并以均方根误差(mean square root error, RMSE)作为性能指标. 论文按照上述条件进行了100次蒙特卡洛仿真, 单次仿真结果如图4–9所示, 100次仿真的RMSE和椭球容积平均值如表1所示. 表中DCCDSMF算法指利用DC规划降低复杂度的CDSMF算法. 需要注意的是, 为了避免初值的影响, 计算椭球容积均值时每次仿真只考虑了1 s之后结果.

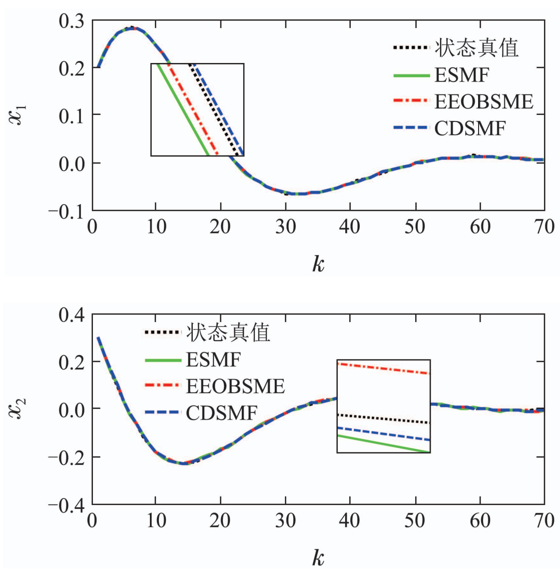


图 4 状态估计

Fig. 4 State estimation results

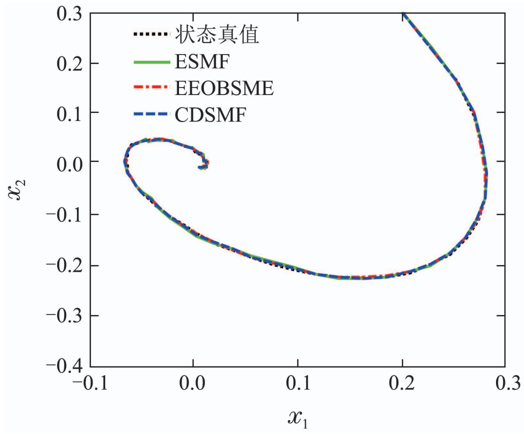


图 5 状态轨迹

Fig. 5 State trajectories

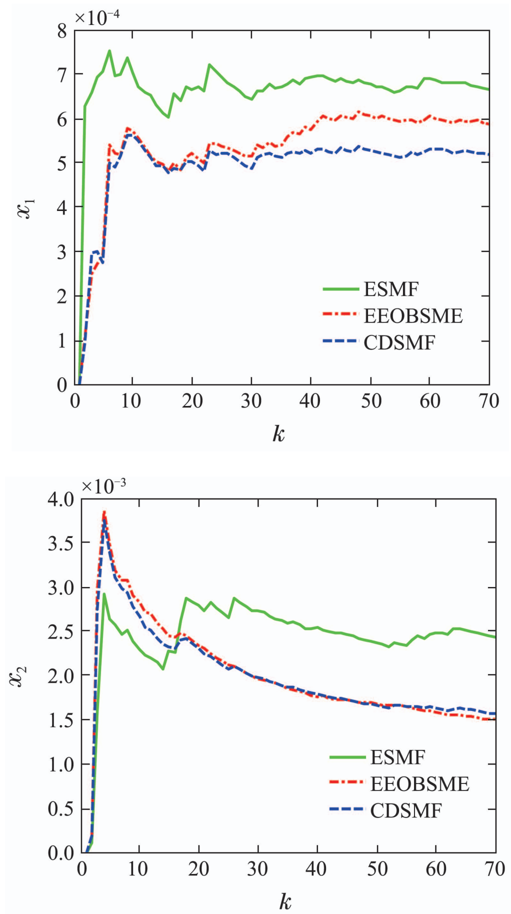
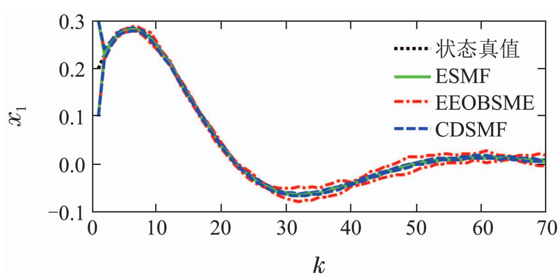


图 6 状态估计均方根误差

Fig. 6 Root mean square error curves of estimated state



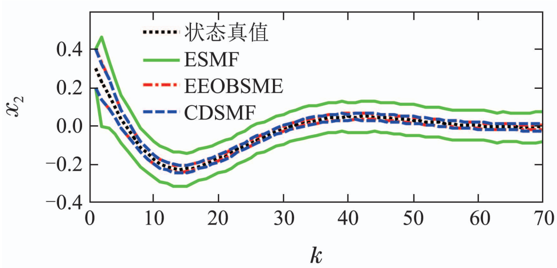


图 7 状态估计边界

Fig. 7 The estimated bounds of state

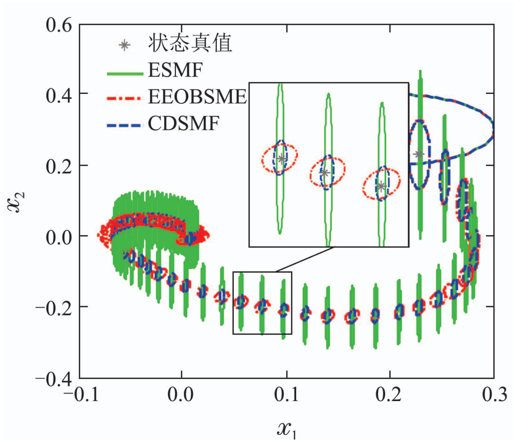


图 8 椭球可行集

Fig. 8 Comparison of ellipsoid feasible sets

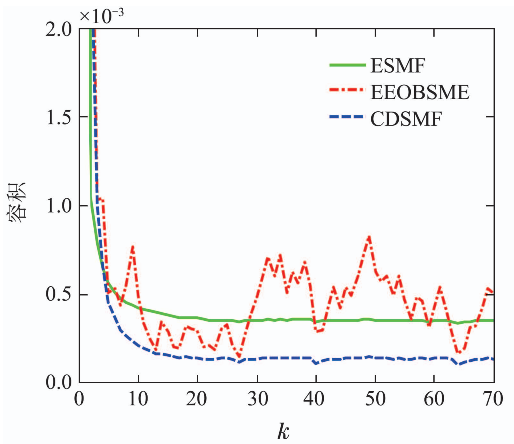


图 9 椭球容积

Fig. 9 Volumes of the state-bounding ellipsoids at each step

表 1 估计结果比较

Table 1 Comparison of state estimation results

算法	RMSE x_1	RMSE x_2	容积	t/ms
ESMF	7.15e–04	2.59e–03	3.53e–04	3.1
EEOBSME	6.36e–04	1.51e–03	4.38e–04	2.9
CDSMF	5.52e–04	1.53e–03	1.31e–04	3.4
DCCDSMF	5.58e–04	1.54e–03	1.72e–04	2.5
PF	5.82e–04	1.89e–03	—	50.4

图4–6主要关注各滤波方法的点估计性能. 其中, 图4比较了3种算法的状态点估计结果, 图5给出了各算法的状态轨迹估计结果. 注意这里的状态轨迹只是数学概念, 而非真实的运动轨迹. 从图4和图5可以看出, 3种算法均能很好的跟踪状态真值和真实轨迹值.

图6给出了RMSE随时间变化的曲线. 从图6可以看出, 就状态 x_1 而言, CDSMF 的估计精度明显优于EEOBSME 算法和原始 ESMF 算法; 而对于状态 x_2, CDSMF和EEOBSME算法得到的RMSE非常接近, 但这两种算法的点估计精度均明显优于标准ESMF算法.

图7–9主要关注各滤波方法的边界估计性能. 其中, 图7给出了各种算法的状态估计边界, 就状态x_1而言, ESMF和CDSMF算法得到的估计边界非常接近, 都能紧紧包围真实状态值, 其中EEOBSME算法得到的边界虽然也能包围真实值, 但在3～7 s之间估计边界相对比较保守. 就状态x_2而言, 与ESMF相比, 采用CDSMF算法可以得到更为紧致的边界, 而EEOBSME的结果与CDSMF近似.

图8和图9分别给出了各时刻估计状态可行集的椭球边界和容积. 图中可以看出, 采用CDSMF算法估计得到的边界椭球容积明显小于其他两种方法. EEOBSME在1～3 s之间容积小于ESMF, 但是3～7 s边界估计性能下降, 导致椭球容积变大且具有较明显的波动, 这可能是因为EEOBSME算法量测更新中没有通过最小化椭球的几何描述来的优化参数. 这些都与图7中得到的结论是一致的.

同时, 表1中100次仿真的RMSE和椭球容积平均值进一步印证了上述结论. 根据表1的数据: 从点估计性能来看, 论文提出的方法较ESMF算法有较大的提高, 状态估计的RMSE分别提高了约23%和41%, 与EEOBSME相比, 状态x_1的估计精度明显提高, 状态x_2估计精度则略低. 从边界估计性能来看, 本文提出的方法与其他两种方法相比均有较大幅度的提升, 椭球容积减小为ESMF和EEOBSME的1/3左右.

EEOBSME算法是以输入状态稳定的集员估计算法[13]为基础提出的, 同时结合了ESMF算法的线性化方法和线性化误差定界方法, 它通过最大化最坏噪声情况下估计误差的Lyapunov函数减少量来优化参数, 因而对于降低点估计误差有一定的优势. ESMF算法则是通过最小化椭球体积来优化参数, 其主要目的是使状态可行集的边界更加紧致, 所以在边界估计上更具优势. 因此, 两种方法相比较, EEOBSME 算法的RMSE小, 而ESMF算法的可行集容积比较小.

CDSMF算法与ESMF算法一样, 也是通过最小化椭球体积来优化参数, 同时从估计误差和估计边界的保守性两个方面进行了改进: 一方面, 算法通过中心差分的线性化方法提高了线性化精度, 从而改善了点

估计误差; 另一方面, 通过改进线性化误差定界方法和归一化距离计算方法降低了可行集边界的保守性. 当然, 这是各种改进措施的主要贡献, 它们相互之间也会产生一定的影响. 正是以上因素导致CDSMF算法与ESMF算法相比在RMSE和可行集容积两个指标上都有提高. 与EEOBSME算法相比, CDSMF算法在边界估计性能具有明显优势是必然的; 从估计误差来看, 两者都可以看作在ESMF算法基础上的改进, EEOBSME算法是从参数优化的角度降低估计误差, 而CDSMF算法则是从改进线性化误差的角度来改善估计误差情况, 所以两者的RMSE都低于ESMF算法, 但是由于出发角度不同, 理论上并不能保证CDSMF的点估计误差一定低于EEOBSME. 对于EEOBSME算法而言, 越是误差较大的方向, 它越会降低该方向的误差, 这是由其参数优化指标决定的, 所以EEOBSME反而在x_2的估计上略优于CDSMF算法, 而在x_1的估计上CDSMF算法优势明显.

从仿真耗时来看, CDSMF算法与其他两种算法相比, 每次迭代消耗的时间略有提高, 其原因在于: 对于ESMF和EEOBSME算法的执行, Jacobian矩阵和Hessian矩阵是人工离线计算的, 没有计入耗时, 在这种情况下, 正如第5节分析的一样, 当状态维数为2时, $\Delta t(2) < 0$, 即CDSMF复杂度更高一些. 但与其他两种方法相比差距很小, 在低阶次系统中均能满足实时性的要求. 另外, 可以通过第3节设计的松弛和DC规划方法来降低算法的复杂度, 其效果如表1所示(DCC-DSMF), 提高了实时性的同时可行集的容积出现了明显的扩大, 但依然优于ESMF和EEOBSME算法. 另外, RMSE变化不大, 这是因为改变的部分主要是放大了边界的保守性, 对估计误差影响比较小.

另外, 论文也采用粒子滤波(particle filtering, PF)的方法进行了目标状态的估计, 估计结果如表1所示(粒子数为500). 从RMSE来看, 其估计精度在ESMF和CDSMF之间, 但耗时相对较长. 多次仿真表明, 增加粒子数可以有效的提高估计精度, 但算法耗时也会随粒子数线性增长, 使其难以满足实时性的要求. 另外, 由于粒子滤波是点估计方法, 不存在可行集, 所以表中没有给出可行集容积, 但是, 作者将粒子滤波得到的各状态的3σ置信区间边界与本文所提算法的估计边界进行了比较. 结果表明, 3σ置信区间边界更为紧致, 但并不能包含所有的真实值, 所以不能作为估计状态的保证边界, 而本文所提方法得到的边界完全包围真实状态值, 这正是所有集员估计方法的优势, 所以也被称为保证定界估计, 这对于控制、故障诊断等领域的应用具有重要的意义.

综上, 本文所提出的CDSMF算法的主要优势为边界估计性能的提高, 同时点估计性能也具有一定的优势, 这是本文采用精度更高的新线性化方法和线性化误差定界方法共同作用的结果, 同时, 量测更新时在最小化容积准则的基础上采用次优方法选择参数, 并对迭代过程进行了改进, 减小了累计误差的影响.

7 结论

本文提出了一种基于中心差分线性化的非线性集员估计方法. 首先, 利用多维Stirling插值公式代替泰勒公式将非线性模型展开, 以实现方程的线性化处理, 提高了线性化近似精度的同时避免了Jacobian矩阵的计算; 同时考虑了由线性化误差引起的不确定性, 并通过半定规划的方法确定其边界, 以改善线性化误差定界的保守性; 然后通过预测更新过程估计以椭球为边界的状态可行集. 在量测更新过程中, 将虚拟量测噪声椭球松弛为多个带的交, 通过迭代求交的方法实现次优边界估计, 以降低算法复杂度; 同时, 为提高估计精度, 改进了归一化距离的求解过程, 避免了近似误差累积的影响. 最后, 通过仿真验证了所提算法在点估计和边界估计方面的性能优势.

由于涉及到半定规划, 本文所提方法的主要缺陷是时间复杂度较高. 随着系统复杂度的提高, 虽然该算法的复杂度逐渐优于ESMF, 但其实时性必然会变差. 所以, 系统复杂度较低或者对于计算时间要求不高的情况下可以考虑采取该算法. 如果系统复杂, 且对实时性要求较高, 则可以通过DC规划的方法来降低复杂度, 但会牺牲一定的精度.

另外, 其他的一些改进措施也能够结合到本文所提出的算法之中, 以进一步提高滤波器的性能. 如, 利用椭球形状矩阵的UD分解形式进行迭代计算以改善算法的稳定性, 采用选择更新策略改善算法的实时性[17–18], 以及采用MIT规则优化过程噪声椭球以改善滤波器健康指标[19]等等.

参考文献:

[1] LI Haifen, TAN Yonghong, DONG Ruili, et al. No-smooth Kalman filter based state estimation for Hammerstein systems with hysteresis. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(6): 745 – 752.
(李海芬, 谭永红, 董瑞丽, 等. 含有迟滞Hammerstein系统的非光滑卡尔曼状态估计. 控制理论与应用, 2016, 33(6): 745 – 752.)

[2] RAANES P N. On the ensemble Rauch-Tung-Striebel smoother and its equivalence to the ensemble Kalman smoother. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 2016, 142(696): 1259 – 1264.

[3] CERONE V, LASSERRE J B, PIGA D, et al. A unified framework for solving a general class of conditional and robust set-membership estimation problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(11): 2897 – 2909.

[4] NOVARA C, CANALE M, MILANESE M, et al. Set membership inversion and robust control from data of nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2015, 24(18): 3170 – 3195.

[5] YU W, ZAMORA E, SORIA A. Ellipsoid SLAM: a novel set membership method for simultaneous localization and mapping. *Autonomous Robots*, 2016, 40(1): 125 – 137.

[6] ZHOU Bo, QIAN Kun, MA Xudong, et al. Multi-sensor fusion for mobile robot indoor localization based on a set-membership estimator. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(4): 541 – 550.
(周波, 钱堃, 马旭东, 等. 基于集员估计的室内移动机器人多传感器融合定位. 控制理论与应用, 2017, 34(4): 541 – 550.)

[7] HUANG J, WANG Y, FUKUDA T. Set-membership-based fault detection and isolation for robotic assembly of electrical connectors. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2018, 15(1): 160 – 171.

[8] HUANG J, DI P, FUKUDA T, et al. Robust model-based online fault detection for mating process of electric connectors in robotic wiring harness assembly systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2010, 18(5): 1207 – 1215.

[9] SCHWEPPE F C. Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1968, 13(1): 22 – 28.

[10] FOGEL E, HUANG Y F. On the value of information in system identification-bounded noise case. *Automatica*, 1982, 18(2): 229 – 238.

[11] CHERNOUSKO F L. *State Estimation for Dynamic Systems*. Boca Raton: CRC Press, 1993.

[12] MAKSAROV D G, NORTON J P. State bounding with ellipsoidal set description of the uncertainty. *International Journal of Control*, 1996, 65(5): 847 – 866.

[13] BECIS-AUBRY Y, BOUTAYEB M, DAROUACH M. State estimation in the presence of bounded disturbances. *Automatica*, 2008, 44(7): 1867 – 1873.

[14] LIU Y S, ZHAO Y, WU F L. Ellipsoidal state-bounding-based set-membership estimation for linear system with unknown-but-bounded disturbances. *IET Control Theory & Applications*, 2016, 10(4): 431 – 442.

[15] SCHOLTE E, CAMPBELL M E. A nonlinear set-membership filter for on-line applications. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2003, 13(15): 1337 – 1358.

[16] SCHOLTE E, CAMPBELL M E. Robust nonlinear model predictive control with partial state information. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2008, 16(4): 636 – 651.

[17] ZHOU B, HAN J D, LIU G J. A UD factorization-based nonlinear adaptive set-membership filter for ellipsoidal estimation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2008, 18(16): 1513 – 1531.

[18] ZHOU Bo, HAN Jianda. A UD factorization-based adaptive extended set-membership filter. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(2): 150 – 158.
(周波, 韩建达. 基于UD分解的自适应扩展集员估计方法. 自动化学报, 2008, 34(2): 150 – 158.)

[19] SONG Dalei, WU Chong, QI Juntong, et al. A MIT-based nonlinear adaptive set-membership filter for ellipsoidal estimation. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(11): 1847 – 1860.
(宋大雷, 吴冲, 齐俊桐, 等. 基于MIT规则的自适应扩展集员估计方法. 自动化学报, 2012, 38(11): 1847 – 1860.)

[20] LIU Y S, ZHAO Y, WU F L. Extended ellipsoidal outer-bounding set-membership estimation for nonlinear discrete-time systems with unknown-but-bounded disturbances. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2016, 2016(5): 1 – 11.

[21] LIU Yushuang, ZHAO Yan, WU Falin. Bearing-only target tracking based on ellipsoidal outer-bounding set-membership estimation. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2017, 43(3): 497 – 505.
(刘玉双, 赵剡, 吴发林. 基于外定界椭球集员估计的纯方位目标跟踪. 北京航空航天大学学报, 2017, 43(3): 497 – 505.)

[22] ZHOU Bo, QIAN Kun, MA Xudong, et al. A new nonlinear set membership filter based on guaranteed bounding ellipsoid algorithm. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(2): 150 – 158.
(周波, 钱堃, 马旭东, 等. 一种新的基于保证定界椭球算法的非线性集员滤波器. 北京航空航天大学学报, 2013, 39(2): 150 – 158.)

[23] NØRGAARD M, POULSEN N K, RAVN O. New developments in state estimation for nonlinear systems. *Automatica*, 2000, 36(11): 1627 – 1638.

[24] NØRGAARD M, POULSEN N K, RAVN O. *Advances in derivative-free state estimation for nonlinear systems*. Copenhagen: Technical University of Denmark, 2000.

[25] ALAMO T, BRAVO J M, REDONDO M J, et al. A set-membership state estimation algorithm based on DC programming. *Automatica*, 2008, 44(1): 216 – 224.

作者简介:

沈 强 博士研究生, 主要从事集员估计理论、多源信息融合、惯性导航等方向的研究, E-mail: shenq110@163.com;

刘洁瑜 教授, 博士生导师, 主要从事惯性导航、信息融合技术等方向的研究, E-mail: liujieyu128@163.com;

赵 乾 助教, 主要从事制导与控制方向的研究, E-mail: hdou_1988@163.com;

王 琪 博士研究生, 主要从事参数估计等方向的研究, E-mail: johnson_shen@outlook.com.