

推力矢量飞行器的自抗扰控制设计及控制分配

陈 森, 薛文超[†], 黄 一

(中国科学院 数学与系统科学研究院 中科院系统控制重点实验室, 北京 100190;

中国科学院大学 数学科学学院, 北京 100049)

摘要: 推力矢量飞行器往往需要在大攻角等具有大不确定性和强非线性的区域高质量地完成飞行动作, 因此, 如何应对大范围不确定性是推力矢量飞行器控制设计的关键问题. 另一方面, 推力矢量飞行器包含多种控制输入并且不同控制输入具有不同物理特性. 因此, 控制输入分配也是推力矢量飞行器控制设计的关键问题. 为了对付大范围的不确定性, 本文引入虚拟控制量的概念, 采用自抗扰控制技术实现对飞行过程中的总扰动的实时估计和补偿. 进一步, 考虑控制输入的物理约束条件, 提出了保证虚拟控制量达到设计值并使得发动机能耗最小的控制输入分配方案. 通过建立对应的优化问题, 严格分析其最优解的性质并提出了有限步求解最优控制分配输入量的算法. 在仿真环境下, 提出的控制算法有效实现了推力矢量飞行器大攻角区域的机动动作, 并能应对大范围的气动参数不确定性.

关键词: 推力矢量; 自抗扰控制; 扩张状态观测器; 控制分配; 飞行器

引用格式: 陈森, 薛文超, 黄一. 推力矢量飞行器的自抗扰控制设计及控制分配. 控制理论与应用, 2018, 35(11): 1591–1600

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Active disturbance rejection control and control allocation for thrust-vector aircraft

CHEN Sen, XUE Wen-chao[†], HUANG Yi

(Key Laboratory of Systems and Control, Academy of Mathematics and Systems Science,

Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: Since the extreme maneuverability such as high angle of attack maneuvering is commonly required for thrust-vector aircraft under various uncertainties and strong nonlinearity, how to handle large scale uncertainties is a crucial control problem. Additionally, due to the different physical characteristics of redundant control inputs, the control allocation strategy is also critical. To achieve high performance of thrust-vector aircraft despite various uncertainties, this paper proposes an active disturbance rejection control approach to design a virtual control input composed of timely compensation for the total disturbance. Moreover, under the physical constraints of control inputs, the control allocation strategy is proposed not only to realize the designed virtual control input, but also, more importantly, to minimize energy consumption of engine. By systematically establishing the equivalent optimization problems and rigorously studying the properties of the corresponding optimal solutions, a control allocation algorithm in a finite number of steps is further proposed. Finally, simulation results illustrate that the high performance of high angle of attack maneuvering and strong robustness under large uncertainties of aerodynamic parameters are satisfied via the proposed control approach.

Key words: thrust vector; active disturbance rejection control; extended state observer; control allocation; aircraft

Citation: CHEN Sen, XUE Wenchao, HUANG Yi. Active disturbance rejection control and control allocation for thrust-vector aircraft. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(11): 1591–1600

1 引言(Introduction)

为了实现现代飞行器高机动的性能要求, 仅仅依靠气动舵面的控制技术已无法满足需求. 推力矢量技术能够直接改变飞行器的推力大小和推力方向, 是实

现代飞行器高机动性能的重要技术方案. 由于推力矢量飞行器具有飞行空域大、飞行动作复杂、飞行任务多样化等特点, 导致其控制系统的非线性强并且外部环境变化剧烈. 因此, 如何设计能够应对大不确定

收稿日期: 2018–05–30; 录用日期: 2018–07–23.

[†]通信作者. E-mail: wenchaoxue@amss.ac.cn; Tel.: +86 10-86541630.

本文责任编辑: 苏剑波.

国家自然科学基金项目(61633003-3, 61603380), 国家重点基础研究发展计划(“973”)项目(2014CB845303)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61633003-3, 61603380) and the National Basic Research Program (“973” Program) of China (2014CB845303).

性的控制方案是推力矢量飞行器控制设计的一个关键问题. 同时, 推力矢量飞行器具有控制输入冗余的特性, 并且不同控制输入的优先级不同, 如何合理有效的设计控制分配方案是其控制设计的另一个关键问题.

现有的飞行器控制算法中, 线性变参数法 (linear parameter varying) 与非线性动态逆 (nonlinear inverse dynamics) 方法是两种具有代表性的算法. 线性变参数法基于小扰动线性化原理, 针对飞行器特征点处的线性模型设计固定参数的误差比例-微分-积分控制律, 再根据飞行空域中的各个特征点的控制参数设计变参数的控制方案^[1]. 由于推力矢量飞行器具有大范围的内部与外部不确定性, 特征点处的线性模型与真实飞行器非线性模型差距大, 线性变参数法难以保证整体控制系统的稳定性与控制精度. 文献[2]研究了针对飞行控制的非线性动态逆控制算法. 该技术利用飞行器内部的所有非线性模型信息, 基于精确反馈线性化理论, 通过实时动态求解内部非线性的抵消项, 消除内部非线性影响, 进而达到控制要求. 而推力矢量飞行器往往需要在大攻角等具有大范围不确定性的区域执行飞行任务, 因此, 基于动态逆控制技术的控制精度和系统稳定性难以得到保证. 为了满足推力矢量飞行器在复杂飞行环境下的高性能要求, 需要进一步研究一种能应对大范围不确定性的控制技术.

推力矢量飞行器具有控制量冗余的特性, 如何合理规划控制分配方案是其控制设计的一个关键点. 针对舵面控制输入冗余的情况, 已有的研究提出了一些控制分配方法^[3-4], 包括链式递增法 (daisy chaining)、直接分配法 (direct allocation)、广义逆方法、数学规划法等. 链式递增法^[5]考虑了不同控制量的工作效率与能耗, 通过优先分配高效低能耗的控制量, 提出逐级分配控制量的方案. 直接分配法^[6]给出了在控制受限情况下的控制可行集, 再通过分析可行解集合获得最接近需求的控制分配方案. 广义逆方法与数学规划法^[7-8]通过设计优化准则求解控制分配方案. 由于推力矢量飞行器的推力大小可调节并且具有相对能耗大、响应速度慢等不同于舵面控制输入的特点, 因此已有的只针对飞行器舵面输入冗余的控制分配方法^[3-8]不能直接运用于推力矢量飞行器的控制分配. 推力矢量飞行器控制分配问题的关键在于如何合理分配不同优先级的控制输入, 同时, 如何快速求解分配方案进而满足控制输入的实时性是控制分配中急需解决的问题.

本文使用自抗扰控制技术 (active disturbance rejection control, ADRC)^[9-12]应对推力矢量飞行器飞行过程中的大范围不确定性. 首先, 通过设计扩张状态观测器 (extended state observer, ESO), 主动估计飞

行系统的总扰动, 即内部非线性不确定性与外部扰动对于飞行系统的总影响. 再利用总扰动的估计值, 设计带有总扰动主动补偿的虚拟控制量, 从而达到应对飞行器内部非线性不确定性和外部扰动的目的. 进一步, 在推力矢量飞行器的物理约束条件下, 根据虚拟控制量分配气动舵面控制输入与推力矢量控制输入. 由于飞行器的气动舵面技术可靠性强以及发动机总能耗受限, 本文首先基于优先分配气动舵面的准则设计气动舵面控制输入, 再基于最小化推力大小的准则设计推力矢量控制输入. 基于这两个分配准则与推力矢量飞行器的物理约束, 提出了控制分配问题所对应的带约束的分级优化问题. 通过严格分析其最优解的性质, 提出了有限步快速求解最优控制分配的算法.

2 问题描述 (Problem description)

推力矢量飞行器控制的核心是角速度控制. 根据文献[13-14], 可以得到推力矢量飞行器的角速度方程¹

$$I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = \begin{bmatrix} L + L_T \\ M + M_T \\ N + N_T \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中: $\omega = [p \ q \ r]^T$ 为飞行器的角速度矢量, p , q 和 r 分别为飞行器的滚转、俯仰和偏航角速度, $I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 为飞行器转动惯量矩阵, $[L_T \ M_T \ N_T]^T$ 为发动机推力产生的力矩, $[L \ M \ N]^T$ 为气动力矩. 发动机推力产生的力矩可进一步表示为

$$\begin{bmatrix} L_T \\ M_T \\ N_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_T F_T \sin \delta_z \\ x_T F_T \cos \delta_z \sin \delta_y \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中: F_T 为发动机推力大小, x_T 为推力作用点在机体系 x 轴的坐标, δ_z 与 δ_y 分别为推力矢量的纵向与横向偏转角度. 气动力矩具有如下表达式:

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \frac{\rho V_T^2 S}{2} \begin{bmatrix} bC_{l_T}(\alpha, \beta, V_T, \delta_e, \delta_a, \delta_r) \\ \bar{c}C_{m_T}(\alpha, \beta, V_T, \delta_e, \delta_a, \delta_r) \\ bC_{n_T}(\alpha, \beta, V_T, \delta_e, \delta_a, \delta_r) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

其中: ρ 为大气密度, V_T 为飞行器的速率, S 为舵面相对面积, b 为舵面径向相对长度, \bar{c} 为相对空气动力弦长度, $[C_{l_T} \ C_{m_T} \ C_{n_T}]^T$ 为气动力矩系数, α 为攻角, β 为侧滑角, δ_e , δ_a 和 δ_r 分别为升降舵、副翼和方向舵的偏转角度.

推力矢量飞行器角速度控制系统(1)的控制输入为飞行器气动舵面偏转角度

$$U_A = [\delta_e \ \delta_a \ \delta_r]^T \quad (4)$$

和推力矢量参数

¹推力矢量发动机安装于机体系 x 轴上.

$$U_F = [F_T \ \delta_z \ \delta_y]^T, \quad (5)$$

控制目标为使得飞行器的角速度 ω 能够跟踪时变参考信号 $\omega^*(t) = [p^*(t) \ q^*(t) \ r^*(t)]^T$.

结合气动力矩的表达式(3), 角速度方程(1)含有关于飞行器飞行状态(角速度、攻角、侧滑角、飞行速率等)和控制输入(气动舵面偏转角度和推力矢量参数)的非线性项. 由于推力矢量飞行器需要在大攻角等具有大不确定性和强非线性的区域完成飞行动作, 如何设计具有强鲁棒性的控制算法从而使闭环系统始终具有良好的性能是推力矢量飞行器控制的一个关键问题. 另一方面, 在推力矢量飞行器的角速度控制问题中, 控制输入变量的个数大于被控角速度变量的个数. 因此, 如何设计控制输入的分配关系就成为推力矢量飞行器控制的另一个关键问题.

下一章将研究如何应对推力矢量飞行器角速度控制问题中的大不确定性和强非线性.

3 基于自抗扰控制的虚拟控制量设计(Active disturbance rejection control based virtual control design)

自抗扰控制的核心思想是设计扩张状态观测器估计系统动态中的总扰动, 再通过对总扰动的主动补偿, 使得系统变为理想的积分串联型, 最后针对理想系统设计控制输入. 由于自抗扰控制能有效应对不确定性并且其设计思路简明, 已在诸多实际控制系统中应用, 包括液位系统^[15]、微电子机械陀螺^[16]、DC-DC电力转换器^[16]以及飞行系统^[17-19].

针对推力矢量飞行器角速度控制问题, 本章将讨论如何依据自抗扰控制思想设计带有主动补偿不确定性的虚拟控制量.

首先, 将角速度方程(1)等价写为如下形式:

$$\dot{\omega} = F_\omega + U_v, \quad (6)$$

其中: $F_\omega = [F_p \ F_q \ F_r]^T$, F_p , F_q 和 F_r 分别为滚转、俯仰和偏航通道中的总扰动, U_v 为待设计的虚拟控制量. 依据角速度方程(1), 虚拟控制量 U_v 与实际控制输入之间的关系为

$$U_v = B_u \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_a \\ \delta_r \\ F_T \sin \delta_z \\ F_T \cos \delta_z \sin \delta_y \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中

$$B_u = [B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4 \ B_5] \in \mathbb{R}^{3 \times 5}. \quad (8)$$

根据多元函数的拉格朗日中值定理, 气动力矩(3)可进一步表示为

$$\begin{cases} L(\alpha, \beta, V_T, U_A) = \\ L(\alpha, \beta, V_T, U_{A,L}^*) + \\ \left[\frac{\partial L}{\partial \delta_e} \ \frac{\partial L}{\partial \delta_a} \ \frac{\partial L}{\partial \delta_r} \right]_{(\alpha, \beta, V_T, \xi_{A,L}^*)} \cdot (U_A - U_{A,L}^*), \\ M(\alpha, \beta, V_T, U_A) = \\ L(\alpha, \beta, V_T, U_{A,M}^*) + \\ \left[\frac{\partial L}{\partial \delta_e} \ \frac{\partial L}{\partial \delta_a} \ \frac{\partial L}{\partial \delta_r} \right]_{(\alpha, \beta, V_T, \xi_{A,M}^*)} \cdot (U_A - U_{A,M}^*), \\ L(\alpha, \beta, V_T, U_A) = \\ L(\alpha, \beta, V_T, U_{A,N}^*) + \\ \left[\frac{\partial L}{\partial \delta_e} \ \frac{\partial L}{\partial \delta_a} \ \frac{\partial L}{\partial \delta_r} \right]_{(\alpha, \beta, V_T, \xi_{A,N}^*)} \cdot (U_A - U_{A,N}^*), \end{cases} \quad (9)$$

其中: $U_{A,j}^*$ 为展开点, $\xi_{A,j}^*$ 落在端点为 $U_{A,j}^*$ 和 U_A 的开区间内, 为拉格朗日中值定理获得的中值点($j = L, M, N$). 结合角速度方程(1)与气动力矩表达式(9), $[B_1 \ B_2 \ B_3]$ 是

$$I^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial L}{\partial \delta_e} \ \frac{\partial L}{\partial \delta_a} \ \frac{\partial L}{\partial \delta_r} \right]_{(\alpha, \beta, V_T, \xi_{A,L}^*)} \\ \left[\frac{\partial L}{\partial \delta_e} \ \frac{\partial L}{\partial \delta_a} \ \frac{\partial L}{\partial \delta_r} \right]_{(\alpha, \beta, V_T, \xi_{A,M}^*)} \\ \left[\frac{\partial L}{\partial \delta_e} \ \frac{\partial L}{\partial \delta_a} \ \frac{\partial L}{\partial \delta_r} \right]_{(\alpha, \beta, V_T, \xi_{A,N}^*)} \end{bmatrix} \quad (10)$$

的标称值, 并具有如下性质:

$$\text{Rank}([B_1 \ B_2 \ B_3]) = 3. \quad (11)$$

结合角速度方程(1)和发动机力矩表达式(2), 可得

$$\begin{cases} B_4 = I^{-1} \cdot [0 \ x_T \ 0]^T, \\ B_5 = I^{-1} \cdot [0 \ 0 \ x_T]^T. \end{cases} \quad (12)$$

针对角速度控制方程(6), 本文采用自抗扰控制技术^[9], 设计带有总扰动主动补偿功能的虚拟控制量. 设计如下的二阶扩张状态观测器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\omega}} = U_v + \hat{F}_\omega - \beta_{\omega,1}(\hat{\omega} - \omega), \\ \dot{\hat{F}}_\omega = -\beta_{\omega,2}(\hat{\omega} - \omega), \end{cases} \quad (13)$$

其中: $\hat{\omega} = [\hat{p} \ \hat{q} \ \hat{r}]^T$, \hat{p} , \hat{q} 和 \hat{r} 分别为滚转、俯仰和偏航角速度的估计值, $\hat{F}_\omega = [\hat{F}_p \ \hat{F}_q \ \hat{F}_r]^T$, \hat{F}_p , \hat{F}_q 和 \hat{F}_r 分别为滚转、俯仰和偏航通道中总扰动的估计值, $\beta_{\omega,1}$ 和 $\beta_{\omega,2}$ 为扩张状态观测器的可调参数. 本文采用带宽法^[20]设计扩张状态观测器(13)的参数:

$$\beta_{\omega,1} = 2 \begin{bmatrix} w_p & 0 & 0 \\ 0 & w_q & 0 \\ 0 & 0 & w_r \end{bmatrix}, \quad \beta_{\omega,2} = \begin{bmatrix} w_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & w_q^2 & 0 \\ 0 & 0 & w_r^2 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

其中 w_p , w_q 和 w_r 分别为扩张状态观测器在滚转、俯仰和偏航通道的带宽.

利用扩张状态观测器(13)得到总扰动估计值 \hat{F}_ω , 结合总扰动主动补偿和跟踪误差比例反馈的虚拟控制量设计如下:

$$U_v = -\hat{F}_\omega + \begin{bmatrix} -k_p & 0 & 0 \\ 0 & -k_q & 0 \\ 0 & 0 & -k_r \end{bmatrix} (\omega - \omega^*), \quad (15)$$

其中 k_p, k_q 和 k_r 分别为滚转、俯仰和偏航通道中的跟踪误差比例反馈增益。

4 控制分配方案(Control allocation)

本章将研究在推力矢量飞行器物理约束和已设计的虚拟控制量(15)条件下,如何依据虚拟控制量与实际物理控制输入关系(7),分配气动舵面和推力矢量控制输入。

引入记号 $A_{B,k}$ 来表示变量 A_B 在第 k 个采样时刻的值。推力矢量飞行器在第 k 个采样时刻的物理约束可以表示为如下形式^[3]:

$$U_{A,k} \in D_{A,k}, U_{F,k} \in D_{F,k}, \quad (16)$$

其中:

$$D_{A,k} = [\underline{\delta}_{e,k}, \bar{\delta}_{e,k}] \times [\underline{\delta}_{a,k}, \bar{\delta}_{a,k}] \times [\underline{\delta}_{r,k}, \bar{\delta}_{r,k}] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad (17)$$

$$D_{F,k} = [\underline{F}_{T,k}, \bar{F}_{T,k}] \times [\underline{\delta}_{z,k}, \bar{\delta}_{z,k}] \times [\underline{\delta}_{y,k}, \bar{\delta}_{y,k}] \subset [0, \bar{F}_{T,k}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$$

$\underline{\delta}_{j,k}$ 和 $\bar{\delta}_{j,k}$ ($j = e, a, r, z, y$)表示第 k 个采样时刻对应物理量的约束下界与上界, $\underline{F}_{T,k}$ 和 $\bar{F}_{T,k}$ 表示第 k 个采样时刻推力大小的约束下界与上界。为了第 k 个采样时刻的虚拟控制量与实际物理控制输入之间的误差尽可能小,需要最小化如下指标:

$$\min_{U_{A,k} \in D_{A,k}, U_{F,k} \in D_{F,k}} J_k(U_{A,k}, U_{F,k}), \quad (18)$$

其中

$$J_k(U_A, U_F) \triangleq \|B_{u,k} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_a \\ \delta_r \\ F_T \sin \delta_z \\ F_T \cos \delta_z \sin \delta_y \end{bmatrix} - U_{v,k}\|^2. \quad (19)$$

注1 文献[13, 21–22]将虚拟控制量 U_v 与推力矢量控制输入 U_F 的关系(7)简化为线性形式,降低了控制分配的求解复杂度,但增加了系统的线性化误差。本文依据虚拟控制量 U_v 与推力矢量控制输入 U_F 的精确非线性关系(7)设计控制分配。

4.1 分配准则与优化问题 (Principles of allocation and descriptions of optimization problems)

由于控制输入的冗余,求解优化问题(18)往往会得到无穷个解。因此,可利用控制输入的冗余,来优化系统的物理指标。

相对于推力矢量技术,飞行器气动舵面技术具有

能量消耗小、安装成本低、物理技术成熟等优势。因此,在进行控制量分配时,考虑如下准则:

准则1 优先分配气动舵面控制量。

根据准则1,在不改变推力矢量参数并且考虑物理约束(16)的情况下,本文优先分配气动舵面控制量使得控制分配指标函数 J_k 最小化,其对应的优化问题可以表述为:求解

$$\Omega_{1,k}^* = \arg \min_{U_{A,k} \in D_{A,k}} J_k(U_{A,k}, U_{F,k-1}). \quad (20)$$

在优先分配完气动舵面控制量后,设计推力矢量参数时,同样应在满足物理约束(16)的情形下,最小化控制分配指标函数 J_k ,其对应的优化问题可以表述为:求解

$$\Omega_{2,k}^* = \arg \min_{[U_{A,k}^T, U_{F,k}^T]^T \in \Omega_{1,k}^* \times D_{F,k}} J_k(U_{A,k}, U_{F,k}). \quad (21)$$

在此基础上,推力矢量参数的设计应让发动机的能消耗尽可能小,即:

准则2 最小化推力大小。

基于准则2的优化问题可以表述为:求解

$$\Omega_{3,k}^* = \arg \min_{[U_{A,k}^T, U_{F,k}^T]^T \in \Omega_{2,k}^*} F_{T,k}^2. \quad (22)$$

最终,获得气动舵面和推力矢量控制输入 $\Omega_{3,k}^*$ 。控制分配方案的流程图可见图1。

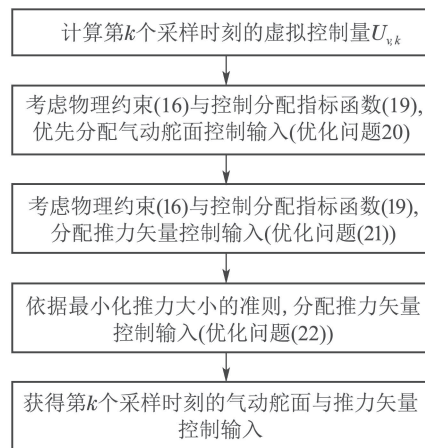


图1 控制分配方案流程图

Fig. 1 Flow chart of control allocation

优化问题(20)–(22)是基于准则1和准则2建立的带有不等式约束的分级优化问题。

下一章将严格分析优化问题(20)–(22)最优解的性质,并提出有限步计算最优解的方法。

4.2 优化问题分析与求解 (Analyses and solutions of optimization problems)

首先,针对优化问题(20),下述定理描述其最优解的性质。

定理1 优化问题(20)有唯一解 $\Omega_{1,k}^* = U_{A,k}^*$:若

$\bar{B}_{1,k}^{-1}C_{1,k} \in D_{A,k}$, 则

$$U_{A,k}^* = \bar{B}_{1,k}^{-1}C_{1,k}; \quad (23)$$

若 $\bar{B}_{1,k}^{-1}C_{1,k} \notin D_{A,k}$, 则

$$U_{A,k}^* = \arg \min_{U_{A,k} \in \partial D_{A,k}} \|\bar{B}_{1,k}U_{A,k} - C_{1,k}\|^2, \quad (24)$$

其中: $\partial D_{A,k}$ 表示集合 $D_{A,k}$ 的边界,

$$\bar{B}_{1,k} = [B_{1,k} \ B_{2,k} \ B_{3,k}], \quad (25)$$

$$C_{1,k} = U_{v,k} - \bar{B}_{2,k} \begin{bmatrix} F_{T,k-1} \sin \delta_{z,k-1} \\ F_{T,k-1} \cos \delta_{z,k-1} \sin \delta_{y,k-1} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$\bar{B}_{2,k} = [B_{4,k} \ B_{5,k}]. \quad (27)$$

定理 1 的证明参见附录. 定理 1 指出了优化问题 (20) 最优解的唯一性, 并且说明了该唯一解 $U_{A,k}^*$ 仅可能是固定点 $\bar{B}_{1,k}^{-1}C_{1,k}$ 或者落在 $D_{A,k}$ 的边界上.

注 2 根据定理 1, 可得到有限步计算最优解 $U_{A,k}^*$ 的算法. 首先, 若固定点 $\bar{B}_{1,k}^{-1}C_{1,k}$ 在物理约束 $D_{A,k}$ 的范围内, 依据式 (23) 计算最优解. 若固定点 $\bar{B}_{1,k}^{-1}C_{1,k}$ 不在物理约束 $D_{A,k}$ 的范围内, 根据式 (24), 将 $D_{A,k}$ 的边界分类为 8 个顶点:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_e \in \{\underline{\delta}_e, \bar{\delta}_e\}, \\ [\delta_e \ \delta_a \ \delta_r]^T, \ \delta_a \in \{\underline{\delta}_a, \bar{\delta}_a\}, \\ \delta_r \in \{\underline{\delta}_r, \bar{\delta}_r\}. \end{array} \right\}, \quad (28)$$

12 条棱:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_i \in [\underline{\delta}_i, \bar{\delta}_i], \\ [\delta_e \ \delta_a \ \delta_r]^T, \ \delta_j \in \{\underline{\delta}_j, \bar{\delta}_j\}, \\ \delta_l \in \{\underline{\delta}_l, \bar{\delta}_l\}, \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} i, j, l \in \{e, a, r\}, \\ i, j, l \text{ 互不相同.} \end{array} \right\}, \quad (29)$$

6 个面:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_i \in [\underline{\delta}_i, \bar{\delta}_i], \\ [\delta_e \ \delta_a \ \delta_r]^T, \ \delta_j \in [\underline{\delta}_j, \bar{\delta}_j], \\ \delta_l \in \{\underline{\delta}_l, \bar{\delta}_l\}, \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} i, j, l \in \{e, a, r\}, \\ i, j, l \text{ 互不相同.} \end{array} \right\}, \quad (30)$$

可通过有限步计算获得最优解 $U_{A,k}^*$.

基于定理 1, 优化问题 (21)–(22) 的最优解可以进一步表示为

$$\Omega_{2,k}^* = \{U_{A,k}^*\} \times \Omega_{4,k}^*, \quad (31)$$

$$\Omega_{3,k}^* = \{U_{A,k}^*\} \times \Omega_{5,k}^*, \quad (32)$$

其中:

$$\Omega_{4,k}^* = \arg \min_{U_{F,k} \in D_{F,k}} J_k(U_{A,k}^*, U_{F,k}), \quad (33)$$

$$\Omega_{5,k}^* = \arg \min_{U_{F,k} \in \Omega_{4,k}^*} F_{T,k}^2. \quad (34)$$

接下来, 具体分析优化问题 (33)–(34) 最优解的性质.

针对优化问题 (33), 记其对应的无约束优化问题的最优解为

$$\tilde{\Omega}_{4,k}^* = \arg \min_{U_{F,k} \in \mathbb{R}^3} J_k(U_{A,k}^*, U_{F,k}). \quad (35)$$

记投影函数为

$$P: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \ P \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

球坐标变换为

$$F_B: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \ F_B \left(\begin{bmatrix} F_T \\ \delta_z \\ \delta_y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} F_T \sin \delta_z \\ F_T \cos \delta_z \sin \delta_y \\ F_T \cos \delta_z \cos \delta_y \end{bmatrix}. \quad (37)$$

下述引理描述了最优解 $\Omega_{4,k}^*$ 的性质.

引理 1 若 $\tilde{\Omega}_{4,k}^* \cap D_{F,k} = \emptyset$, 则

$$\Omega_{4,k}^* = \arg \min_{U_{F,k} \in \partial D_{F,k}} \|\bar{B}_{2,k}(P(F_B(U_{F,k}))) - C_{2,k}\|^2, \quad (38)$$

其中

$$C_{2,k} = U_{v,k} - \bar{B}_{1,k}U_{A,k}^*. \quad (39)$$

若 $\tilde{\Omega}_{4,k}^* \cap D_{F,k} \neq \emptyset$, 则 $F_B(\Omega_{4,k}^*)$ 为直线

$$L_{1,k} = \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (\bar{B}_{2,k}^T \bar{B}_{2,k})^{-1} \bar{B}_{2,k}^T C_{2,k}, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{array} \right\}$$

的一部分.

引理 1 的证明参见附录. 引理 1 说明: 1) 当无约束优化问题 (35) 的最优解 $\tilde{\Omega}_{4,k}^*$ 与约束集合 $D_{F,k}$ 无交集时, 最优解 $\Omega_{4,k}^*$ 仅可能落在约束集合 $D_{F,k}$ 的边界上; 2) 若无约束优化问题 (35) 的最优解 $\tilde{\Omega}_{4,k}^*$ 与约束集合 $D_{F,k}$ 有交集时, 最优解 $\Omega_{4,k}^*$ 经过球坐标变换 F_B 后落在直线 $L_{1,k}$ 上. 由于球坐标变换 F_B 为同胚映射, 引理 1 揭示了: 若 $\tilde{\Omega}_{4,k}^* \cap D_{F,k} \neq \emptyset$, 最优解 $\Omega_{4,k}^*$ 落在一个一维流形(曲线)上.

基于对最优解 $\Omega_{4,k}^*$ 的分析, 下述定理进一步分析了最优解 $\Omega_{5,k}^*$ 的性质.

定理 2 若 $\tilde{\Omega}_{4,k}^* \cap D_{F,k} = \emptyset$, 则

$$\Omega_{5,k}^* = \arg \min_{U_{F,k} \in \Omega_{4,k}^*} F_{T,k}^2, \quad (40)$$

其中

$$\Omega_{4,k}^* = \arg \min_{U_{F,k} \in \partial D_{F,k}} \|\bar{B}_{2,k}(P(F_B(U_{F,k}))) - C_{2,k}\|^2. \quad (41)$$

若 $\tilde{\Omega}_{4,k}^* \cap D_{F,k} \neq \emptyset$, 则

$$\Omega_{5,k}^* = \arg \min_{U_{F,k} \in \partial \Omega_{4,k}^*} \|F_B(U_{F,k})\|^2. \quad (42)$$

定理 2 的证明参见附录. 定理 2 揭示了: 若无约束优化问题 (35) 的最优解 $\tilde{\Omega}_{4,k}^*$ 与约束集合 $D_{F,k}$ 无交集

时, 优化问题(35)的最优解 $\Omega_{5,k}^*$ 仅可能落在 $D_{F,k}$ 的边界上; 若最优解 $\tilde{\Omega}_{4,k}^*$ 与约束集合 $D_{F,k}$ 有交集时, 最优解 $\Omega_{5,k}^*$ 仅可能落在 $\Omega_{4,k}^*$ 的边界上. 由引理1可知, 若最优解 $\tilde{\Omega}_{4,k}^*$ 与约束集合 $D_{F,k}$ 有交集时, $\Omega_{4,k}^*$ 为某个闭曲线, 因此, $\Omega_{4,k}^*$ 的边界即指闭曲线的端点.

利用映射 F_B 的同胚性, $D_{F,k}$ 的连通性以及

$$F_B(\tilde{\Omega}_{4,k}^*) = L_{1,k}, \quad (43)$$

可将判断最优解 $\tilde{\Omega}_{4,k}^*$ 与约束集合 $D_{F,k}$ 是否相交的问题转化为判断 $F_B(D_{F,k})$ 的边界与直线 $L_{1,k}$ 是否相交. 由于最优解 $\Omega_{5,k}^*$ 的可能解集(40)和(42)均落在边界, 因此, 类似注2的算法(28)–(30), 可通过对边界类型的分类, 经过有限步计算求得 $\Omega_{5,k}^*$.

综合引理1, 定理1和定理2的结果, 本文提出有限步求解控制分配方案, 获得最优控制输入 $\Omega_{3,k}^*$ 的方法: 首先计算得到最优解 $\Omega_{1,k}^*$, 再分析最优解 $\tilde{\Omega}_{4,k}^*$ 与约束集合 $D_{F,k}$ 的相交情况, 然后分情况求解得到 $\Omega_{5,k}^*$, 最后依据(32)得到 $\Omega_{3,k}^*$.

5 仿真结果(Simulation results)

本章节针对带有推力矢量设计的F-16飞行器模型^[13,24], 在仿真环境下验证本文提出的推力矢量飞行器控制算法的有效性.

考虑推力矢量飞行器的大攻角区域的机动动作, 角速度的参考信号 $\omega^*(t)$ 设计为

$$\omega^*(t) = [0 \quad q^*(t) \quad 0]^T, \quad (44)$$

其中 $q^*(t)$ 是由微分跟踪器^[25]平滑处理阶跃指令信号

$$q_{\text{step}}(t) = \begin{cases} 0(^{\circ})/s, & 0 \leq t < 1, \\ 15(^{\circ})/s, & 1 \leq t < 5, \\ 0(^{\circ})/s, & 5 \leq t < 10, \\ -15(^{\circ})/s, & 10 \leq t < 15.5, \\ 0(^{\circ})/s, & 15.5 \leq t < 20 \end{cases} \quad (45)$$

得到的.

滚转、俯仰和偏航通道的扩张状态观测器(13)带宽以及跟踪误差比例反馈增益选取如下:

$$\begin{bmatrix} w_p \\ w_q \\ w_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} k_p \\ k_q \\ k_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 15 \end{bmatrix}. \quad (46)$$

基于本文提出的自抗扰控制设计(13)–(15)与控制分配方案, 仿真效果如图2–5所示.

图2为推力矢量飞行器滚转、俯仰和偏航角速度的闭环响应曲线, 其中俯仰角速度快速跟踪给定的指令信号、滚转和偏航角速度稳定在 $0.02(^{\circ})/s$ 以内. 结合图3, 飞行器攻角在11 s时达到 68° , 说明本文所提出的控制算法有效实现推力矢量飞行器在大攻角机动下

的性能要求. 图4为扩张状态观测器的估计效果, 可以看出扩张状态观测器能够有效估计飞行器角速度以及角速度通道中的总扰动, 从而带有总扰动主动补偿的自抗扰控制设计能达成推力矢量飞行器高质量的飞行动作.

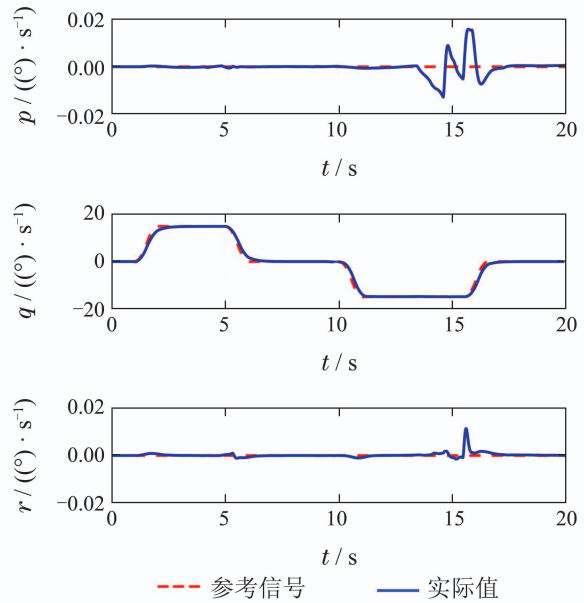


图2 滚转、俯仰和偏航角速度曲线

Fig. 2 Response curves of roll, pitch and yaw rates

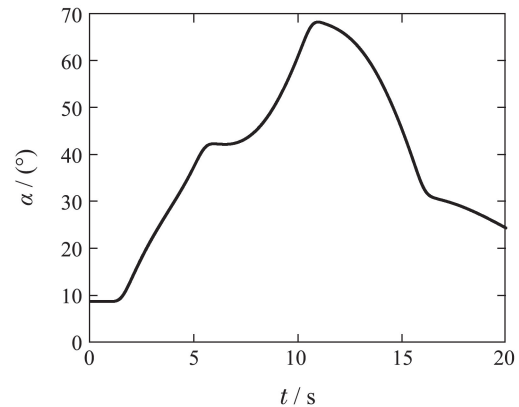
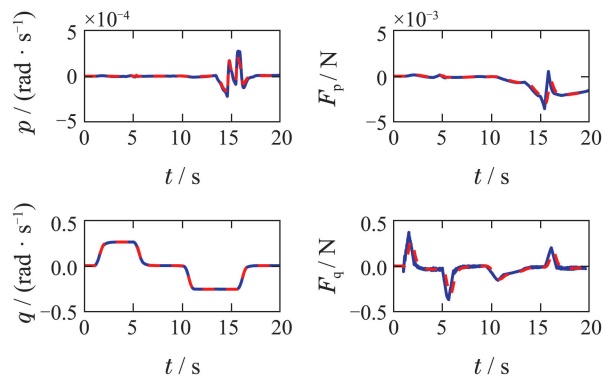


图3 攻角曲线

Fig. 3 Response curves of angle of attack



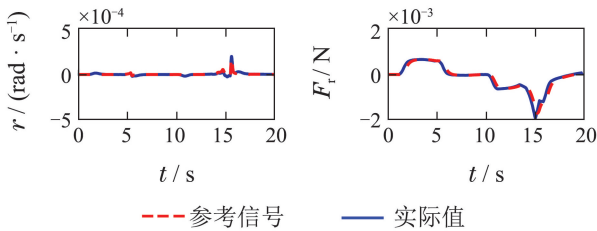


图 4 扩张状态观测器的估计效果

Fig. 4 Response curves of the estimations from extended state observer

图5为气动舵面与推力矢量控制输入, 在0~5 s内以及17~20 s, 由于飞行器攻角小于40°, 气动舵面能力较强从而足以实现虚拟控制量的分配要求, 因此推力矢量控制输入几乎保持不变. 同时, 在仿真时间内, 图5中推力大小变化缓慢. 这说明所设计的控制分配方案不仅能够优先使用气动舵面控制输入, 同时达到了降低发动机能耗的目标.

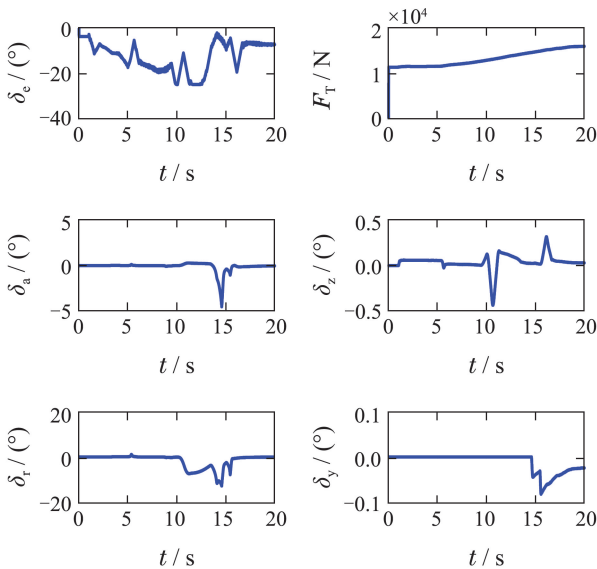


图 5 控制输入曲线

Fig. 5 Response curves of control inputs

为了进一步验证本文提出的推力矢量控制算法的鲁棒性, 对飞行器的 43 个气动参数在其标称值的 ±20% 范围按均匀分布进行随机拉偏, 图6为1000组气动参数随机拉偏情况下飞行器滚转、俯仰和偏航角速度的闭环响应曲线. 从图6中可以看出, 在气动参数不同偏差组合的情况下, 飞行器的角速度闭环响应具有极强的一致性, 可见本文设计的自抗扰控制算法具有较强的鲁棒性, 能应对推力矢量飞行器在复杂飞行环境下的大范围不确定性.

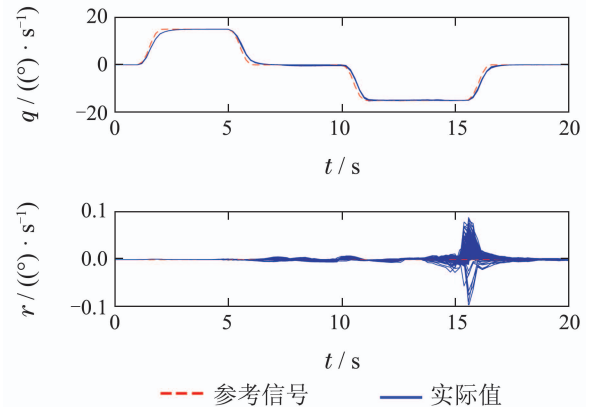
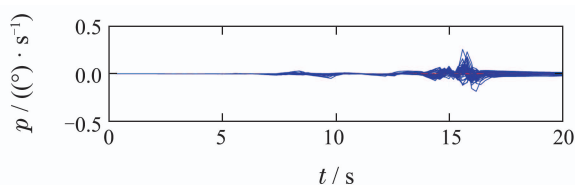


图 6 1000条气动参数随机拉偏情况下的滚转、俯仰和偏航角速度曲线

Fig. 6 Response curves of roll, pitch and yaw rates for 1000 cases of random derivations of aerodynamic moment coefficients

6 总结(Conclusions)

本文考虑推力矢量飞行器的角速度控制问题. 针对推力矢量飞行器控制系统的大不确定性与强非线性特点, 采用自抗扰控制技术设计虚拟控制量, 实现对总扰动主动补偿. 由于推力矢量飞行器控制输入冗余, 针对气动舵面与推力矢量控制输入的分配问题, 在控制输入的物理约束条件下, 基于优先分配气动舵面与最小化推力大小的准则, 在保证虚拟控制量达到设计值的情况下优化控制输入. 本文进一步将所提出的控制分配方案等价抽象为一个带有不等式约束的分级优化问题. 通过严格分析优化问题最优解的性质, 提出有限步求解最优控制分配方案的算法, 满足了控制设计的实时性要求. 在仿真环境下, 提出的控制算法有效控制推力矢量飞行器在大攻角区域的机动, 并能应对气动参数大范围偏差.

参考文献(References):

- [1] MARCOS A, BALAS G J. Development of linear-parameter-varying models for aircraft [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2004, 27(2): 218 – 228.
- [2] LANE S H, STENGEL R F. Flight control design using non-linear inverse dynamics [J]. *Automatica*, 1988, 24(4): 471 – 483.
- [3] JOHANSEN T A, FOSSEN T I. Control allocation—a survey [J]. *Automatica*, 2013, 49(5): 1087 – 1103.
- [4] YANG Enquan, GAO Jinyuan. Research and development on advanced fighter control allocation methods [J]. *Flight Dynamics*, 2005, 23(3): 1 – 4. (杨恩泉, 高金源, 先进战斗机控制分配方法研究进展 [J]. *飞行力学*, 2005, 23(3): 1 – 4.)
- [5] BUFFINGTON J M, ENNS D F. Lyapunov stability analysis of daisy chain control allocation [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1996, 19(6): 1226 – 1230.
- [6] DURHAM W C. Constrained control allocation [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1993, 16(4): 717 – 725.
- [7] VIRNIG J, BODDEN D. Multivariable control allocation and control law conditioning when control effectors limit [C] // *Proceedings of*

- Guidance, Navigation, and Control Conference*. Scottsdale: AIAA, 1994: 572 – 582.
- [8] PETERSEN J A, BODSON M. Constrained quadratic programming techniques for control allocation [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2006, 14(1): 91 – 98.
- [9] HAN J. From PID to active disturbance rejection control [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, 56(3): 900 – 906.
- [10] HUANG Y, XUE W. Active disturbance rejection control: methodology and theoretical analysis [J]. *ISA Transactions*, 2014, 53(4): 963 – 976.
- [11] GAO Zhiqiang. On the foundation of active disturbance rejection control [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(12): 1498 – 1510. (高志强. 自抗扰控制思想探究 [J]. *控制理论与应用*, 2013, 30(12): 1498 – 1510.)
- [12] LI Jie, QI Xiaohui, WAN Hui, et al. Active disturbance rejection control: theoretical results summary and future researches [J]. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(3): 281 – 295. (李杰, 齐晓慧, 万慧, 等. 自抗扰控制: 研究成果总结与展望 [J]. *控制理论与应用*, 2017, 34(3): 281 – 295.)
- [13] SONNEVELDT L, CHU Q, MULDER J. Nonlinear flight control design using constrained adaptive backstepping [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2007, 30(2): 322 – 336.
- [14] THUKRAL A, INNOCENTI M. A sliding mode missile pitch autopilot synthesis for high angle of attack maneuvering [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1998, 6(3): 359 – 371.
- [15] SUN L, DONG J, LI D, et al. A practical multivariable control approach based on inverted decoupling and decentralized active disturbance rejection control [J]. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2016, 55(7): 2008 – 2019.
- [16] ZHENG Q, GAO Z. On practical applications of active disturbance rejection control [C] // *Proceedings of the 29th Chinese Control Conference*. Beijing: IEEE, 2010: 6095 – 6100.
- [17] YANG Ruiguang, SUN Mingwei, CHEN Zengqiang. ADRC-based attitude control optimization and simulation [J]. *Journal of System Simulation*, 2010, 22(11): 2689 – 2693. (杨瑞光, 孙明玮, 陈增强. 飞行器自抗扰姿态控制优化与仿真研究 [J]. *系统仿真学报*, 2010, 22(11): 2689 – 2693.)
- [18] LI J, QI X, HAN S. Attitude decoupling control for quadrotor aircraft based on active disturbance rejection control technique [J]. *Electronics Optics & Control*, 2013, 20(3): 44 – 48.
- [19] SUN M, CHEN Z, YUAN Z. A practical solution to some problems in flight control [C] // *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, Held Jointly with the 28th Chinese Control Conference*. Shanghai: IEEE, 2009: 1482 – 1487.
- [20] YOO D, YAU S S, GAO Z. Optimal fast tracking observer bandwidth of the linear extended state observer [J]. *International Journal of Control*, 2007, 80(1): 102 – 111.
- [21] ZHANG Shuguang, GAO Hao. Coordination of control deflector commands to thrust vectored aircraft [J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 1996, 14(3): 361 – 365. (张曙光, 高浩. 推力矢量飞机操纵指令的协调分配 [J]. *西北工业大学学报*, 1996, 14(3): 361 – 365.)
- [22] GAO Yanxi, WANG Yanyang. A study on the thrust vectoring control and aircraft's post stall maneuver [J]. *Flight Dynamics*, 1997, 15(1): 23 – 29. (高彦玺, 王衍洋. 推力矢量控制与飞机过失速机动仿真研究 [J]. *飞行力学*, 1997, 15(1): 23 – 29.)
- [23] YUAN Yaxiang, SUN Wenyu. *Optimization Theory and Methods* [M]. Beijing: Science Press, 1997: 1 – 600. (袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 1997: 1 – 600.)
- [24] SONNEVELDT L. *Nonlinear F-16 model description* [EB/OL]. Netherlands: Delft University of Technology, 2006. https://www.researchgate.net/publication/237135027_Nonlinear_F-16_Model_Description.
- [25] HAN Jingqing, YUAN Loulin. The discrete form of the tracking differentiator [J]. *Systems Science and Mathematical Sciences*, 1999, 19(3): 268 – 273. (韩京清, 袁露林. 跟踪微分器的离散形式 [J]. *系统科学与数学*, 1999, 19(3): 268 – 273.)
- [26] LAX P D. *Functional Analysis* [M]. New York: Wiley-Interscience, 2002: 52 – 62.

附录 定理与引理证明 (Appendix Proofs of theorems and lemmas)

为了证明文中叙述的定理与引理, 首先介绍如下引理:

引理 A1 考虑拓扑空间 $(K_i, \tau_i) (i = 1, 2)$, 其中 τ_i 为空间 K_i 上的拓扑. 若映射 $F: K_1 \rightarrow F(K_1) \subset K_2$ 在拓扑空间 (K_1, τ_1) 与 $(F(K_1), \tau_2|_{F(K_1)})$ 意义下为同胚映射, 其对应的逆映射为 $F^{-1}: F(K_1) \rightarrow K_1$. 对于 $\forall M_1 \subset K_1$, 则有 $F(\partial M_1) = \partial(F(M_1))$, $\partial M_1 = F^{-1}(\partial(F(M_1)))$.

证 首先, 证明

$$F(\partial M_1) \subset \partial(F(M_1)). \quad (\text{A1})$$

任意取 $x \in F(\partial M_1)$, 则

$$\exists \tilde{x} \in \partial M_1, \text{ s.t. } x = F(\tilde{x}). \quad (\text{A2})$$

考虑在拓扑空间 $(F(K_1), \tau_2|_{F(K_1)})$ 中, 任意包含 x 的开邻域 $U(x)$. 由于 $F: K_1 \rightarrow F(K_1)$ 为同胚映射, 则有 $F^{-1}(U(x))$ 为 \tilde{x} 的开邻域. 由于 $\tilde{x} \in \partial M_1$, 可得

$$\exists \tilde{x}_U \in F^{-1}(U(x)), \text{ s.t. } \tilde{x}_U \notin M_1. \quad (\text{A3})$$

因此, $F(\tilde{x}_U) \in U(x)$ 并且 $F(\tilde{x}_U) \notin F(M_1)$. 结合开邻域 $U(x)$ 选取的任意性, 可知 $x \in \partial(F(M_1))$, 即式(A1)成立. 更进一步, 可得

$$\partial M_1 = F^{-1}(F(\partial M_1)) \subset F^{-1}(\partial(F(M_1))). \quad (\text{A4})$$

类似地, 可以证明

$$\partial(F(M_1)) \subset F(\partial M_1), F^{-1}(\partial(F(M_1))) \subset \partial M_1. \quad (\text{A5})$$

证毕.

定理1的证明.

证 矩阵 $\bar{B}_{1,k}$ 亦可视为线性映射. 由式(11)与式(25)可知, $\bar{B}_{1,k}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是范数拓扑意义下的线性同胚映射. 结合式(20), 可知

$$\Omega_{1,k}^* = \bar{B}_{1,k}^{-1} \left(\arg \min_{X \in \bar{B}_{1,k}(D_{A,k})} \|X - C_{1,k}\|^2 \right). \quad (\text{A6})$$

根据式(17)可知 $D_{A,k}$ 为闭集, 结合 $\bar{B}_{1,k}$ 为线性同胚映射, 可知 $\bar{B}_{1,k}(D_{A,k})$ 为闭凸集. 由泛函分析知识^[26], 优化问题

$$\min_{X \in \bar{B}_{1,k}(D_{A,k})} \|X - C_{1,k}\|^2 \quad (\text{A7})$$

存在唯一解 X^* . 利用两点间直线距离最短公理, 用反证法可得: 若 $C_{1,k} \in \bar{B}_{1,k}(D_{A,k})$, 则 $X^* = C_{1,k}$; 若 $C_{1,k} \notin \bar{B}_{1,k}$

$(D_{A,k})$, 则 $X^* \in \partial \bar{B}_{1,k}(D_{A,k})$. 因为 $\bar{B}_{1,k}$ 为线性同胚映射, 结合引理 A1, 可得 $\Omega_{1,k}^* = U_{A,k}^*$: 若 $\bar{B}_{1,k}^{-1} C_{1,k} \in D_{A,k}$, 则 $U_{A,k}^*$ 满足式(23); 若 $\bar{B}_{1,k}^{-1} C_{1,k} \notin D_{A,k}$, 则 $U_{A,k}^*$ 满足式(24).

证毕.

引理 1 的证明.

证 引理 1 的证明分为 $\tilde{\Omega}_{4,k}^* \cap D_{F,k} = \emptyset$ 和 $\tilde{\Omega}_{4,k}^* \cap D_{F,k} \neq \emptyset$ 两种情况.

首先, 证明当 $\tilde{\Omega}_{4,k}^* \cap D_{F,k} = \emptyset$ 时, 式(38)成立. 因为 F_B 为同胚映射, $D_{F,k}$ 为连通有界闭集, 所以 $F_B(D_{F,k})$ 为连通有界闭集, 即

$$F_B(D_{F,k}) \subset [\underline{x}_1, \bar{x}_1] \times [\underline{x}_2, \bar{x}_2] \times [\underline{x}_3, \bar{x}_3]. \quad (A8)$$

根据式(A8), $F_B(D_{F,k})$ 可以表示为

$$F_B(D_{F,k}) = \bigcup_{a \in [\underline{x}_3, \bar{x}_3]} \hat{D}(a) \times \{a\}, \quad (A9)$$

其中

$$\hat{D}(a) \triangleq \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in F_B(D_{F,k}), x_3 = a \right\} \subset [\underline{x}_1, \bar{x}_1] \times [\underline{x}_2, \bar{x}_2] \quad (A10)$$

为拓扑空间 $(\mathbb{R}^2 \times \{a\}, \tau_{\|\cdot\|}|_{\mathbb{R}^2 \times \{a\}})$ 中的有界闭集, $\tau_{\|\cdot\|}|_{\mathbb{R}^2 \times \{a\}}$ 为 \mathbb{R}^3 的范数拓扑在子空间 $\mathbb{R}^2 \times \{a\}$ 中的限制.

由式(12)与式(27)可得

$$\text{Rank} \bar{B}_{2,k} = 2, \quad (A11)$$

所以矩阵 $\bar{B}_{2,k}$ 对应的线性映射

$$\bar{B}_{2,k} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \bar{B}_{2,k}(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3 \quad (A12)$$

在拓扑空间 $(\mathbb{R}^2, \tau_{\|\cdot\|})$ 与 $(\bar{B}_{2,k}(\mathbb{R}^2), \tau_{\|\cdot\|}|_{\bar{B}_{2,k}(\mathbb{R}^2)})$ 意义下为同胚映射, 其中 $\tau_{\|\cdot\|}$ 表示范数拓扑, $\tau_{\|\cdot\|}|_{\bar{B}_{2,k}(\mathbb{R}^2)}$ 为 \mathbb{R}^3 的范数拓扑在子空间 $\bar{B}_{2,k}(\mathbb{R}^2)$ 中的限制. $\bar{B}_{2,k}$ 的逆映射为

$$\begin{aligned} \bar{B}_{2,k}^+ : \bar{B}_{2,k}(\mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \bar{B}_{2,k}^+ \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) &= (\bar{B}_{2,k}^T \bar{B}_{2,k})^{-1} \bar{B}_{2,k}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (A13)$$

因此, $\bar{B}_{2,k}(\hat{D}(a))$ ($a \in [\underline{x}_3, \bar{x}_3]$) 为平面 $\bar{B}_{2,k}(\mathbb{R}^2)$ 中的有界闭集.

记集合 $\bar{B}_{2,k}(\hat{D}(a))$ 到点 $C_{2,k}$ 距离最短的点为 \tilde{X}_1^* , 即

$$\tilde{X}_1^* \triangleq \arg \min_{X \in \bar{B}_{2,k}(\hat{D}(a))} \|X - C_{2,k}\|^2. \quad (A14)$$

由反证法可知, \tilde{X}_1^* 只能是 $C_{2,k}$ 到平面 $\bar{B}_{2,k}(\mathbb{R}^2)$ 的垂足 $X_{c,1}^*$ 或者落在 $\partial \bar{B}_{2,k}(\hat{D}(a))$ 上.

为了进一步研究原优化问题(33)与 \tilde{X}_1^* 的关系, 定义投影映射

$$P_a : \mathbb{R}^2 \times \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^2, P_a \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (A15)$$

映射 P_a 在拓扑空间 $(\mathbb{R}^2 \times \{a\}, \tau_{\|\cdot\|}|_{\mathbb{R}^2 \times \{a\}})$ 与 $(\mathbb{R}^2, \tau_{\|\cdot\|})$ 意义下为同胚映射. 投影映射 P_a 对应的逆映射为

$$P_a^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{a\} \subset \mathbb{R}^3, P_a^{-1} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ a \end{bmatrix}. \quad (A16)$$

由于垂足 $X_{c,1}^*$ 满足

$$P_a^{-1}(\bar{B}_{2,k}^+(X_{c,1}^*)) = \begin{bmatrix} (\bar{B}_{2,k}^T \bar{B}_{2,k})^{-1} \bar{B}_{2,k}^T C_{2,k} \\ a \end{bmatrix} \in F_B(\tilde{\Omega}_{4,k}^*). \quad (A17)$$

另一方面, 由 $\tilde{\Omega}_{4,k}^* \cap D_{F,k} = \emptyset$ 与 F_B 为同胚映射, 可得

$$F_B(\tilde{\Omega}_{4,k}^*) \cap F_B(D_{F,k}) = F_B(\tilde{\Omega}_{4,k}^* \cap D_{F,k}) = \emptyset. \quad (A18)$$

结合式(A17)与式(A18), 可知

$$X_{c,1}^* \notin \bar{B}_{2,k}(\hat{D}(a)), \quad (A19)$$

即 \tilde{X}_1^* 不可能为垂足 $X_{c,1}^*$. 因此, \tilde{X}_1^* 只能落在 $\partial \bar{B}_{2,k}(\hat{D}(a))$ 上. 由映射 P_a , $\bar{B}_{2,k}$ 和 F_B 的同胚性质, 通过引理 A1 可得

$$\begin{aligned} \arg \min_{U_{F,k} \in F_B^{-1}(\hat{D}(a) \times \{a\})} J(U_{A,k}^*, U_{F,k}) &= \\ F_B^{-1}(P_a^{-1}(\bar{B}_{2,k}^+(\arg \min_{X \in \bar{B}_{2,k}(\hat{D}(a))} \|X - C_{2,k}\|^2))) &= \\ F_B^{-1}(P_a^{-1}(\bar{B}_{2,k}^+(\arg \min_{X \in \bar{B}_{2,k}(\partial \hat{D}(a))} \|X - C_{2,k}\|^2))) &= \\ \arg \min_{U_{F,k} \in \partial F_B^{-1}(\hat{D}(a) \times \{a\})} J(U_{A,k}^*, U_{F,k}), & \quad (A20) \end{aligned}$$

其中 $\partial F_B^{-1}(\hat{D}(a) \times \{a\})$ 为子空间拓扑 $(F_B^{-1}(\mathbb{R}^2 \times \{a\}), \tau_{\|\cdot\|}|_{F_B^{-1}(\mathbb{R}^2 \times \{a\})})$ 意义下的边界. 进一步结合

$$D_{F,k} = \bigcup_{a \in [\underline{x}_3, \bar{x}_3]} F_B^{-1}(\hat{D}(a) \times \{a\}), \quad (A21)$$

可得

$$\begin{aligned} \Omega_{4,k}^* &= \arg \min_{U_{F,k} \in \bigcup_{a \in [\underline{x}_3, \bar{x}_3]} F_B^{-1}(\hat{D}(a) \times \{a\})} J(U_{A,k}^*, U_{F,k}) \subset \\ &\bigcup_{a \in [\underline{x}_3, \bar{x}_3]} \arg \min_{U_{F,k} \in F_B^{-1}(\hat{D}(a) \times \{a\})} J(U_{A,k}^*, U_{F,k}) = \\ &\bigcup_{a \in [\underline{x}_3, \bar{x}_3]} \arg \min_{U_{F,k} \in \partial F_B^{-1}(\hat{D}(a) \times \{a\})} J(U_{A,k}^*, U_{F,k}) \subset \\ &\bigcup_{a \in [\underline{x}_3, \bar{x}_3]} \partial F_B^{-1}(\hat{D}(a) \times \{a\}) \subset \partial D_{F,k}. \end{aligned} \quad (A22)$$

再利用 $\Omega_{4,k}^*$ 的定义(33), 可以将 $\Omega_{4,k}^*$ 进一步表示为

$$\Omega_{4,k}^* = \arg \min_{U_{F,k} \in \partial D_{F,k}} J_k(U_{A,k}^*, U_{F,k}), \quad (A23)$$

即式(38)成立.

接下来,证明当 $\tilde{\Omega}_{4,k}^* \cap D_{F,k} \neq \emptyset$ 时, $F_B(\Omega_{4,k}^*)$ 为直线 $L_{1,k}$ 的一部分. 因为无约束优化问题(35)的最优解满足

$$\tilde{\Omega}_{4,k}^* = \left\{ \begin{bmatrix} F_T \\ \delta_z \\ \delta_y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} F_T \sin \delta_z \\ F_T \cos \delta_z \sin \delta_y \end{bmatrix} = (\bar{B}_{2,k}^T \bar{B}_{2,k})^{-1} \bar{B}_{2,k}^T C_{2,k} \right\}.$$

结合球坐标变换 F_B 的定义(37), 可知 $F_B(\tilde{\Omega}_{4,k}^*) = L_{1,k}$, 进一步可得

$$F_B(\Omega_{4,k}^*) = F_B(\tilde{\Omega}_{4,k}^* \cap D_{F,k}), \tag{A24}$$

即 $F_B(\Omega_{4,k}^*)$ 为直线 $L_{1,k}$ 的一部分. 证毕.

定理2的证明.

证 若 $\tilde{\Omega}_{4,k}^* \cap D_{F,k} = \emptyset$, 根据引理1, 可知式(40)与式(41)成立.

考虑 $\tilde{\Omega}_{4,k}^* \cap D_{F,k} \neq \emptyset$ 的情况, 利用 F_B 的同胚性质, 可得

$$\Omega_{5,k}^* = \arg \min_{U_{F,k} \in \Omega_{4,k}^*} F_T^2 = F_B^{-1} \left(\arg \min_{X \in F_B(\Omega_{4,k}^*)} \|X\|^2 \right). \tag{A25}$$

由引理1可知: $F_B(\Omega_{4,k}^*)$ 为直线 $L_{1,k}$ 的一部分. 记线段 $F_B(\Omega_{4,k}^*)$ 到原点距离最短的点为 \tilde{X}_2^* , 即

$$\tilde{X}_2^* \triangleq \arg \min_{X \in F_B(\Omega_{4,k}^*)} \|X\|^2. \tag{A26}$$

\tilde{X}_2^* 只可能是原点到直线 $L_{1,k}$ 的垂足 $X_{c,2}^*$ 或者 \tilde{X}_2^* 落在 $\partial F_B(\Omega_{4,k}^*)$ 上, 其中 $\partial F_B(\Omega_{4,k}^*)$ 为子空间拓扑 $(L_{1,k}, \tau_{\|\cdot\|}|_{L_{1,k}})$ 意义下的边界, 即 $F_B(\Omega_{4,k}^*)$ 的端点.

利用 $L_{1,k}$ 表达式, 可知垂足 $X_{c,2}^*$ 满足

$$X_{c,2}^* = \begin{bmatrix} (\bar{B}_{2,k}^T \bar{B}_{2,k})^{-1} \bar{B}_{2,k}^T C_{2,k} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{A27}$$

又由实际物理约束(17), 可知

$$[\underline{\delta}_j, \bar{\delta}_j] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), j = z, y. \tag{A28}$$

结合式(A27)(A28)和 F_B 的定义(37), 可知

$$X_{c,2}^* \notin F_B(\Omega_{4,k}^*). \tag{A29}$$

所以 \tilde{X}_2^* 仅可能在落在 $\partial F_B(\Omega_{4,k}^*)$ 上. 再利用映射 F_B 的同胚性质, 通过引理A1与式(A25), 可得式(42). 证毕.

作者简介:

陈森 (1992-), 男, 博士, 目前研究方向为不确定非线性系统控制, E-mail: chensen14@mails.ucas.ac.cn;

薛文超 (1985-), 男, 博士, 副研究员, 目前研究方向为不确定非线性系统控制, E-mail: wenchaoxue@amss.ac.cn;

黄一 (1967-), 女, 博士, 研究员, 目前研究方向为不确定非线性系统控制, E-mail: yhuang@amss.ac.cn.