

带启动时间和工作故障的M/M/1/N排队系统性能分析

杨喜娟^{1,3†}, 李忠学², 黎锁平³, 武 福²

(1. 兰州交通大学 电子与信息工程学院, 甘肃 兰州 730070;

2. 兰州交通大学 机电学院, 甘肃 兰州 730070; 3. 兰州理工大学 电气工程与信息工程学院, 甘肃 兰州 730050)

摘要: 在M/M/1/N可修排队系统中引入了工作故障和启动时间. 服务台在忙期允许出现故障, 且在故障期间不是完全停止服务而是以较低的服务速率为顾客服务. 同时, 从关闭期到正规忙期有服从指数分布的启动时间. 通过分析此模型的二维连续时间Markov过程, 求解出系统平稳方程, 建立此系统的有限状态拟生灭过程(QBD). 根据系统参数, 求解出水平相依的子率阵, 从而得到系统稳态概率向量的矩阵几何表示形式. 在系统稳态概率向量的基础上, 求解出系统吞吐率、系统稳态可用度、系统稳态队长及系统处于各个状态的概率等性能指标的解析表达式. 文中的敏感性分析体现了这种方法的有效性和可用性, 同时, 对系统各性能受系统参数的影响进行了探索. 实验表明, 文中提出模型的稳定性较好, 且更贴近实际服务过程, 因此这种模型将被广泛应用于各种实际服务中.

关键词: 可修排队系统; 工作故障; 拟生灭过程; 矩阵几何方法; 性能分析

引用格式: 杨喜娟, 李忠学, 黎锁平, 等. 带启动时间和工作故障的M/M/1/N排队系统性能分析. 控制理论与应用, 2019, 36(4): 561 – 569

DOI: 10.7641/CTA.2018.80415

Performance analysis of M/M/1/N queue with setup time and working breakdown

YANG Xi-juan^{1,3†}, LI Zhong-xue², LI Suo-ping³, WU Fu²

(1. School of Electronic and Information Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu 730070, China;

2. School of Mechanical Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu 730070, China;

3. School of Electrical and Information Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu 730050, China)

Abstract: In this paper, the working breakdown and setup time strategies are introduced into the M/M/1/N repairable queueing system. The server is subject to breakdown when it is busy, rather than completely stopping service, it will decrease its service rate. Meanwhile, setup time, following exponential distribution, exists from idle period to regular busy period. The steady state equations are obtained by analyzing the two dimensional continuous time Markov process of the system, and the finite quasi birth and death (QBD) process of the system is established. According to system parameters, the level dependent sub-rate matrices are solved and the matrix geometric representation of the steady state probability vector of the system is obtained. Based on the steady state probability vector, the analytic expression of the performances, such as the throughput of the system, the steady state availability, the steady state queueing length and probability of each states, are obtained. The effectiveness and availability of the approach are fully shown in the sensitivity analysis and the influences of the parameters on the performances of the system are explored preliminarily. Experiments demonstrate that the proposed model is more stable and closer to the actual service process. Therefore, the model will be widely used in various practical services.

Key words: repairable queueing system; working breakdown; quasi birth and death process; matrix geometric method; performance analysis

Citation: YANG Xi-juan, LI Zhong-xue, LI Suo-ping, et al. Performance analysis of M/M/1/N queue with setup time and working breakdown. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(4): 561 – 569

收稿日期: 2018-06-05; 录用日期: 2018-11-14.

†通信作者. E-mail: yangxj331@163.com; Tel.: +86 13609366919.

本文责任编辑: 赵千川.

国家自然科学基金项目(61663024), 欧盟国际合作项目(573879), 教育部春晖计划合作科研项目(Z2016001), 甘肃省重点研发计划项目(18YF1GD099), 甘肃省中小企业创新基金项目(18CX5JA014), 兰州市人才创新创业项目(2017-RC-82), 兰州交通大学青年基金(2015007)资助. Supported by the National Natural Science Foundation of China (61663024), the EU International Cooperation Project (573879), the Ministry of Education “Chunhui Plan” (Z2016001), the Key Research and Development Project of Gansu Province (18YF1GD099), the Innovation Fund for Medium and Small-size Enterprise of Gansu Province (18CX5JA014), the Lanzhou Municipal Talent Innovation and the Entrepreneurship Project (2017-RC-82) and the Lanzhou Jiaotong University Youth Fund (2015007).

1 引言

2012年, KALIDASS和KASTURI等^[1]将工作故障策略引入了M/M/1排队系统. 所谓工作故障, 即服务台在出现故障期间并不完全停止而是以较低的速率为顾客服务. 比如, 当计算机中病毒后, 计算机的处理速度会降低, 直至计算机病毒被查杀后, 其速度才恢复正常. 同样, 系统中机器在故障后生产速度降低、备用机器以及各种岗位人员临时找业务不熟练的同事替班等均可以抽象成工作故障. 之后, HU和ZHU等^[2]、MA和CUI等^[3]分别对有负顾客、启动时间和顾客按服务器状态到达的具有工作故障的M/M/1排队系统进行分析, 得到了稳态队长的分布. JIANG和XIN^[4]对故障出现后维修延迟服从伯努利分布的具有工作故障策略单服务台的排队系统进行了分析, 给出稳态系统性能和稳态逗留时间的拉氏变换. LIOU^[5]对带有不耐烦顾客和工作故障的M/M/1排队系统进行了优化分析, 建立了系统关于服务速率的单目标和双目标费用模型, 并使用粒子群算法和 ϵ -约束方法对模型分别进行求解. CHEN等^[6]在N策略M/M/1排队系统中考虑了工作故障, 建立了系统单位时间的费用优化函数, 使用两阶段优化方法得到费用最小时服务速率的取值范围. YANG和CHEN^[7]则在有二次可选服务的M/M/1排队系统中引入了工作故障策略, 得到系统稳态队长的概率分布, 同时优化服务速率, 以得到最小的系统单位时间所需费用.

同时, 工作故障策略被拓展到其他排队系统中. KIM和LEE^[8]将工作故障策略拓展到了M/G/1排队系统, 研究了有备用服务台的M/G/1排队系统中两次故障之间的时间周期及其系统队长和逗留时间的分布. RAJADURAI^[9]将工作故障和工作休假两种策略同时应用到M/G/1排队系统, 求得了稳态队长的概率母函数, 并分析了系统参数对系统性能的影响情况. LIU和SONG^[10]考虑了具有工作故障、批量到达的M^x/M/1排队系统, 分析了稳态队长的概率母函数及其随机分解, 得到了稳态条件下顾客等待时间分布的拉普拉斯变换. YE和LIU^[11]分析了具有工作故障和马尔可夫到达过程的MAP/M/1排队系统, 给出了求解稳态逗留时间近似解的递归公式. JIANG和LIU^[12]对顾客需多阶段服务的GI/M/1排队系统进行分析, 设定在各阶段服务中均有可能发生故障, 给出了稳态队长和稳态逗留时间分布的解析式. YANG和WU^[13]在有不耐烦顾客的排队系统中引入了工作故障策略, 对瞬时和稳态性能进行分析, 并给出了各系统参数对系统性能的敏感性分析. LI和ZHANG^[14]则对采用工作故障的离散时间Geo/Geo/1排队系统进行分析, 给出了系统稳态的充要条件, 得到了系统队长、逗留时间的期望等性能指标, 并分析与文献[1]中对应的连续时间排队系统之间的关系. LAN和TANG^[15]在文献[14]的基础上,

考虑了顾客具有按服务器状态到达的可变达到率的Geo/Geo/1排队系统, 得到了各系统参数对系统性能的敏感性分析.

在应用方面, 学者们对具有工作故障策略的机器维修问题进行了初探. YEN和WU等^[16]分析了可工作故障的单个维修工的机器维修问题, 得到稳态概率及各项性能指标, 建立和求解了针对系统中失效机器数和维修工维修速度的费用优化模型. WANG和LIOU^[17]得到了费用优化模型的最优失效机器数和维修速度. LIOU^[18]对带有机修贮备的机器维修问题进行研究, 在考虑多重休假和工作故障的策略下, 建立以总利润为目标的优化模型, 得到最优的系统机器贮备数和维修速率. YEN和CHEN等^[19]对带有机修贮备和工作故障的机器维修问题的稳定性和敏感性进行分析, 给出了系统稳定性和首次故障的平均时间的表达式. CHEN^[20]在文献[19]的基础上, 为了提高服务台的利用率, 引入了恢复机制, 并分析了系统各参数对系统稳定性和首次故障的平均时间的影响情况.

综观上述文献, 仅在文献[13]中将缓冲区的容量设定为有限, 其余均考虑的是无限缓冲的情况. 而在实际生产过程中, 服务台从空闲到正式服务之前需要一段准备时间, 即为启动时间. 而上述文献中仅有文献[2]在研究具有工作故障的排队系统时考虑了启动时间. 受文献[2]和文献[13]的启发, 本文在采用工作故障策略的M/M/1排队系统中同时考虑启动时间和有限缓存两个因素, 以填充在这方面研究的内容. 由于工作故障、启动时间和有限缓存的引入, 使得问题扩展为二维Markov过程, 不能通过经典排队理论进行求解, 增加了问题求解的难度. 本文解决的主要问题是: 1) 建立带有启动时间和工作故障的M/M/1/N排队系统的二维连续时间Markov过程; 2) 通过建立系统平衡方程, 得到系统的有限状态的拟生灭过程; 3) 求解平稳概率向量, 求得系统各项性能指标, 特别是系统吞吐率和稳态可用度的解析表达式, 并对系统性能的敏感性进行分析.

本文的结构安排如下: 第2节, 描述工作故障模型; 第3节, 建立系统的连续时间Markov模型, 求得系统平稳状态方程, 通过矩阵分析的方法, 求解系统稳态概率向量; 第4节, 利用系统稳态概率向量, 求解系统吞吐率、系统稳态可用度及其他系统性能指标, 并对系统各性能的敏感性进行分析; 第5节, 结论.

2 模型描述

考虑一个带启动时间和工作故障的M/M/1/N排队模型, 其模型描述如下:

- 1) 系统中有一个服务台, 服务台每次服务一个顾客, 其容量为N;
- 2) 顾客到达系统的速率服从参数为 λ 的指数分

布;

3) 当系统中无顾客时, 服务台进入一个随机长度为 V 、服从参数为 θ 指数分布的休假. 当休假结束时, 如果缓冲区中有顾客, 则服务台进入忙期, 忙期内服务台的服务速率服从参数为 μ 的指数分布. 否则, 服务台进入一个关闭期;

4) 在关闭期内, 如果系统中有顾客到达, 则关闭期结束, 开始一段启动时间服从参数为 s 指数分布的启动期, 启动期结束后进入忙期;

5) 服务台在工作过程中会发生故障, 服务台的故障率和修复率分别服从参数为 α 和 β 的指数分布. 故障发生后, 立刻进行维修. 在维修过程中服务台的服务速率降低为 μ_w . 维修完成后, 服务台继续将服务速率调整为 μ 为顾客进行服务;

6) 到达率、服务速率、休假时间、启动时间、故障率和修复率是相互独立的, 顾客的服务顺序遵循先到先服务(first in first out, FIFO)原则.

3 平稳方程和系统稳态概率向量求解

令 $N(t)$ 表示 t 时刻缓冲区中的顾客数, 取值最大为 N . 令 $C(t)$ 为 t 时刻服务台的工作状态, 根据模型描述有

$$C(t) = \begin{cases} 0, & \text{系统处于启动期或关闭期,} \\ 1, & \text{系统处于休假期,} \\ 2, & \text{系统处于正规忙期,} \\ 3, & \text{系统处于故障忙期.} \end{cases}$$

则 $\{N(t), C(t)\}$ 是一个连续时间Markov过程, 其状态空间 $\Omega = \{(0, 0), (0, 1) \cup (k, j) : 1 \leq k \leq N, j = 0, 1, 2, 3\}$. 其中: $(0, 0)$ 表示系统处于关闭期, $(k, 0), k \geq 1$ 表示系统处于启动期, 且当前系统中有 k 个顾客; $(k, 1), k \geq 0$ 表示系统处于休假期, 且当前系统中有 k 个顾客; $(k, 2), k \geq 1$ 表示系统处于正规忙期, 且当前系统中有 k 个顾客; $(k, 3), k \geq 1$ 表示系统处于故障忙期, 且当前系统中有 k 个顾客. 系统的状态转移图如图1所示.

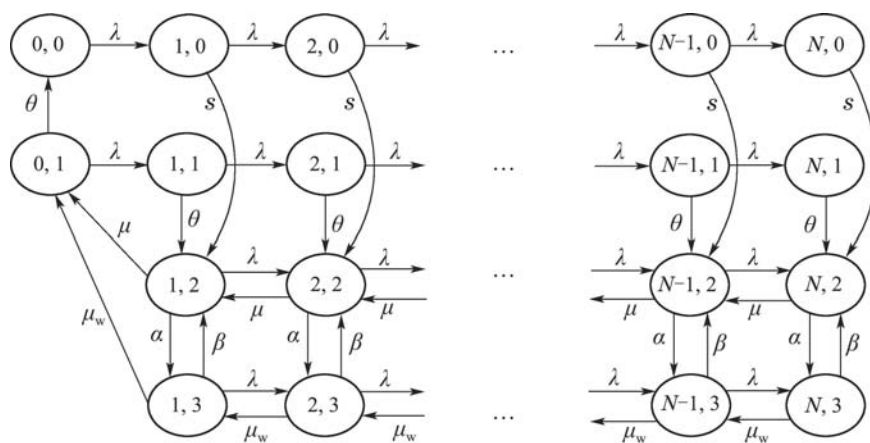


图1 系统的状态转移图

Fig. 1 State transition diagram of the system

根据模型的定义及状态空间可以看出, 当系统中没有顾客, 即 $k = 0$ 时, 仅有 $(0, 0)$ 和 $(0, 1)$ 两个状态, 对 $k = 0$ 状态单独进行分析. 根据图1, 系统的平稳状态方程为

$$-\lambda P(0, 0) + \theta P(0, 1) = 0, \quad (1)$$

$$-(\lambda + \theta)P(0, 1) + \mu P(1, 2) + \mu_w P(1, 3) = 0, \quad (2)$$

$$-(\lambda + s)P(1, 0) + \lambda P(0, 0) = 0, \quad (3)$$

$$-(\lambda + \theta)P(1, 1) + \lambda P(0, 1) = 0, \quad (4)$$

$$-(\lambda + \mu + \alpha)P(1, 2) + sP(1, 0) + \theta P(1, 1) + \mu P(2, 2) + \beta P(1, 3) = 0, \quad (5)$$

$$-(\lambda + \mu_w + \beta)P(1, 3) + \alpha P(1, 2) + \mu_w P(2, 3) = 0, \quad (6)$$

$$\begin{cases} -(\lambda + s)P(i, 0) + \lambda P(i - 1, 0) = 0, \\ 2 \leq i \leq N - 1, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} -(\lambda + \theta)P(i, 1) + \lambda P(i - 1, 1) = 0, \\ 2 \leq i \leq N - 1, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} -(\lambda + \mu + \alpha)P(i, 2) + sP(i, 0) + \theta P(i, 1) + \lambda P(i - 1, 2) + \mu P(i + 1, 2) + \beta P(i, 3) = 0, \\ 2 \leq i \leq N - 1, \end{cases} \quad (9)$$

$$-(\lambda + \mu_w + \beta)P(i, 3) + \alpha P(i, 2) + \lambda P(i - 1, 3) + \mu_w P(i + 1, 3) = 0, \quad 2 \leq i \leq N - 1, \quad (10)$$

$$-sP(N, 0) + \lambda P(N - 1, 0) = 0, \quad (11)$$

$$-\theta P(N, 1) + \lambda P(N - 1, 1) = 0, \quad (12)$$

$$-(\mu + \alpha)P(N, 2) + sP(N, 0) + \theta P(N, 1) +$$

$$\lambda P(N-1, 2) + \beta P(N, 3) = 0, \quad (13)$$

$$-(\mu_w + \beta)P(N, 3) + \lambda P(N-1, 3) + \alpha P(N, 2) = 0. \quad (14)$$

由于 $k=0$ 状态的特殊性, 将 $k=0$ 状态用 $k=1$ 状态进行表示. 由式(1)和式(2), 有

$$P(0, 1) = \frac{1}{\lambda + \theta} [\mu P(1, 2) + \mu_w P(1, 3)], \quad (15)$$

$$P(0, 0) = \frac{\theta}{\lambda} P(0, 1) = \frac{\theta}{\lambda(\lambda + \theta)} [\mu P(1, 2) + \mu_w P(1, 3)]. \quad (16)$$

将式(15)–(16)分别代入式(4)(3), 可得

$$-(\lambda + s)P(1, 0) + \frac{\theta}{\lambda + \theta} [\mu P(1, 2) +$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -(\lambda + s) & 0 & s & 0 \\ 0 & -(\lambda + \theta) & \theta & 0 \\ \frac{\theta\mu}{\lambda + \theta} & \frac{\lambda\mu}{\lambda + \theta} & -(\lambda + \mu + \alpha) & \alpha \\ \frac{\theta\mu_w}{\lambda + \theta} & \frac{\lambda\mu_w}{\lambda + \theta} & \beta & -(\lambda + \mu_w + \beta) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -(\lambda + s) & 0 & s & 0 \\ 0 & -(\lambda + \theta) & \theta & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda + \mu + \alpha) & \alpha \\ 0 & 0 & \beta & -(\lambda + \mu_w + \beta) \end{bmatrix},$$

$$\mu_w P(1, 3)] = 0, \quad (17)$$

$$-(\lambda + \theta)P(1, 1) + \frac{\lambda}{\lambda + \theta} [\mu P(1, 2) + \mu_w P(1, 3)] = 0. \quad (18)$$

联立式(5)–(14), 以及式(17)和式(18), 可得系统的最小生成元 Q 为

$$Q = \begin{bmatrix} B_1 & C & & & \\ A & B & C & & \\ & A & B & C & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & A & B & C \\ & & & & A & B_N \end{bmatrix}, \quad (19)$$

其中:

$$C = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_w \end{bmatrix},$$

$$B_N = \begin{bmatrix} -s & 0 & s & 0 \\ 0 & -\theta & \theta & 0 \\ 0 & 0 & -(\mu + \alpha) & \alpha \\ 0 & 0 & \beta & -(\mu_w + \beta) \end{bmatrix}.$$

从文献[21–22], 可知 $\{N(t), C(t)\}$ 为有限状态的拟生灭过程(quasi birth and death process, QBD).

设 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$ 为系统的平稳概率向量, 每一个子向量 $\pi_i (\pi_{i0}, \pi_{i1}, \pi_{i2}, \pi_{i3}) (1 \leq i \leq N)$ 为4维行向量, 则系统平稳方程组为

$$\begin{cases} \pi Q = 0, \\ \pi e = 1, \end{cases} \quad (20)$$

其中 e 为单位列向量. 由式(19)–(20)可得

$$\pi_1 B_1 + \pi_2 A = 0, \quad (21)$$

$$\pi_1 C + \pi_2 B + \pi_3 A = 0, \quad (22)$$

$$\pi_i C + \pi_{i+1} B + \pi_{i+2} A = 0, \quad i = 2, \dots, N-2, \quad (23)$$

$$\pi_{N-1} C + \pi_N B_N = 0, \quad (24)$$

$$\pi e = 1. \quad (25)$$

由于矩阵 C 为对角线矩阵, 运用文献[23]提出的矩阵分析方法求解稳态概率向量. 将对角线矩阵 C 表示为 $C = \lambda I$ (I 为4阶单位矩阵). 令 $R_N = I$, 则

$$\pi_N = \pi_N R_N. \quad (26)$$

将式(26)代入式(24)可得

$$\pi_{N-1} = -\pi_N B_N C^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \pi_N B_N = \pi_N R_{N-1}, \quad (27)$$

这里 $R_{N-1} = -\frac{1}{\lambda} B_N$, 称为子率阵.

由式(23)(26)和式(27), 可得

$$\begin{aligned} \pi_i &= -\frac{1}{\lambda} (\pi_{i+1} B + \pi_{i+2} A) = \\ &= -\frac{1}{\lambda} \pi_N (R_{i+1} B + R_{i+2} A) = \pi_N R_i, \end{aligned} \quad (28)$$

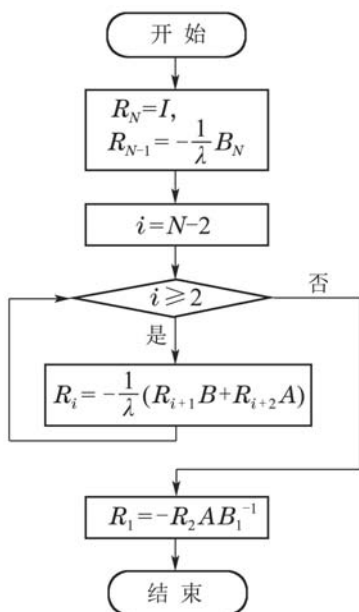
其中:

$$R_i = -\frac{1}{\lambda} (R_{i+1} B + R_{i+2} A), \quad i = 2, 3, \dots, N-2.$$

由式(21)有

$$\pi_1 = -\pi_2 A B_1^{-1} = -\pi_N R_2 A B_1^{-1} = \pi_N R_1, \quad (29)$$

其中 $R_1 = -R_2 A B_1^{-1}$. 求解 $R_i, i = 1, 2, \dots, N$ 的过程如图2所示.

图2 R_i 计算流程图Fig. 2 The calculation flow diagram of R_i

由式(22)(28)–(29), 有

$$\pi_N(R_1C + R_2B + R_3A) = 0. \quad (30)$$

由式(25)及 R_i , $i = 1, 2, \dots, N$, 可得

$$\pi e = \pi_N(R_1 + R_2 + \dots + R_{N-1} + I)e = 1. \quad (31)$$

联立式(30)–(31)可求得 π_N , 根据式(27)–(29), 稳态概率向量 π 得以求解.

4 系统性能及分析

在系统稳态概率向量的基础上, 求解系统性能的主要指标, 并对系统参数对系统性能的影响情况进行分析.

4.1 稳态系统性能

1) 系统吞吐量

$$TP = \sum_{k=1}^N [P(k, 2) \cdot \mu + P(k, 3) \cdot \mu_w] = \sum_{k=1}^N [\pi_{k2}\mu + \pi_{k3}\mu_w].$$

2) 系统稳态可用度

$$Avai = \sum_{k=1}^N [P(k, 2) + P(k, 3)] = \sum_{k=1}^N [\pi_{k2} + \pi_{k3}].$$

3) 系统稳态队长

Length =

$$\sum_{i=1}^N [i \cdot P(i, 0) + i \cdot P(i, 1) + i \cdot P(i, 2) + i \cdot P(i, 3)] = \sum_{i=1}^N (i \cdot \sum_{j=0}^3 \pi_{ij}).$$

4) 系统稳态正规忙期的概率

$$P_n = \sum_{i=1}^N P(i, 2) = \sum_{i=1}^N \pi_{i2}.$$

5) 系统稳态故障忙期的概率

$$P_b = \sum_{i=1}^N P(i, 3) = \sum_{i=1}^N \pi_{i3}.$$

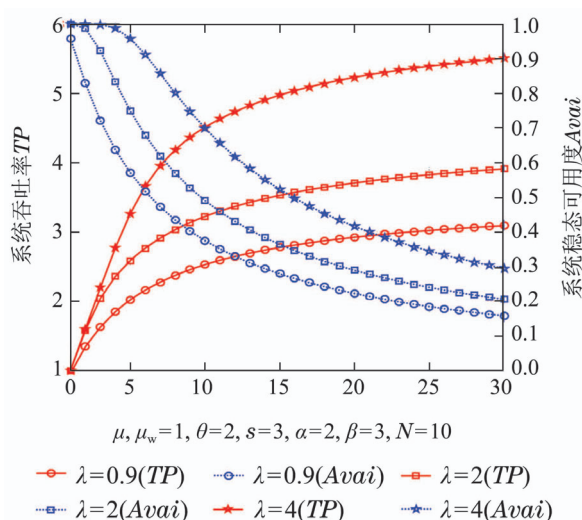
6) 系统处于关闭期的概率. 由式(16)可得, 此概率为

$$P_{\text{Idel}} = P(0, 0) = \frac{\theta}{\lambda(\lambda + \theta)} (\mu\pi_{12} + \mu_w\pi_{13}).$$

4.2 敏感性分析

为了分析系统参数对上述系统性能的影响情况, 通过MATLAB R2016a软件平台进行了变动系统参数的数学仿真, 仿真结果及分析如下:

图3(a)–(d)描述了系统各参数的变化对系统吞吐量 TP 和系统稳态可用度 $Avai$ 的影响情况. 整体来看, TP 和 $Avai$ 均随着参数 λ , N , s , θ 的增大而增大, 而 $TP(Avai)$ 随着 $\alpha(\mu, \mu_w, \beta)$ 的增大而减小. 同时, 从图3(b)可见, 随着 μ_w 接近于 μ , 不同取值的 α 参数所对应的 TP 和 $Avai$ 的取值分别趋近于相等. 出现这一现象的解释是, 当 μ_w 接近于 μ 时, 系统处于故障忙期的服务速率接近于正规忙期的服务效率, 即无论是否有故障, 系统的服务速率保持不变, 从而 TP 和 $Avai$ 的取值分别趋于相等. 从图3(c)可见, TP 和 $Avai$ 随着参数 s 和 θ 的增大有增大的趋势. 这是因为随着 s 或 θ 的增大, 系统所需的启动时间和处于休假的时间相应减小, 从而系统处于正规忙期或故障忙期的概率增大, 促使 TP 和 $Avai$ 均增大. 但相对而言, 参数 s 或 θ 对 TP 和 $Avai$ 的影响均较小. 相应地, 图3(d)的曲线变化也表明, 当参数 N 增加到一定程度后, 参数 N 对 TP 和 $Avai$ 的影响会变得很小, 系统的吞吐率和系统可用度保持基本稳定.

(a) μ 对 TP 和 $Avai$ 的影响(λ 取值不同)

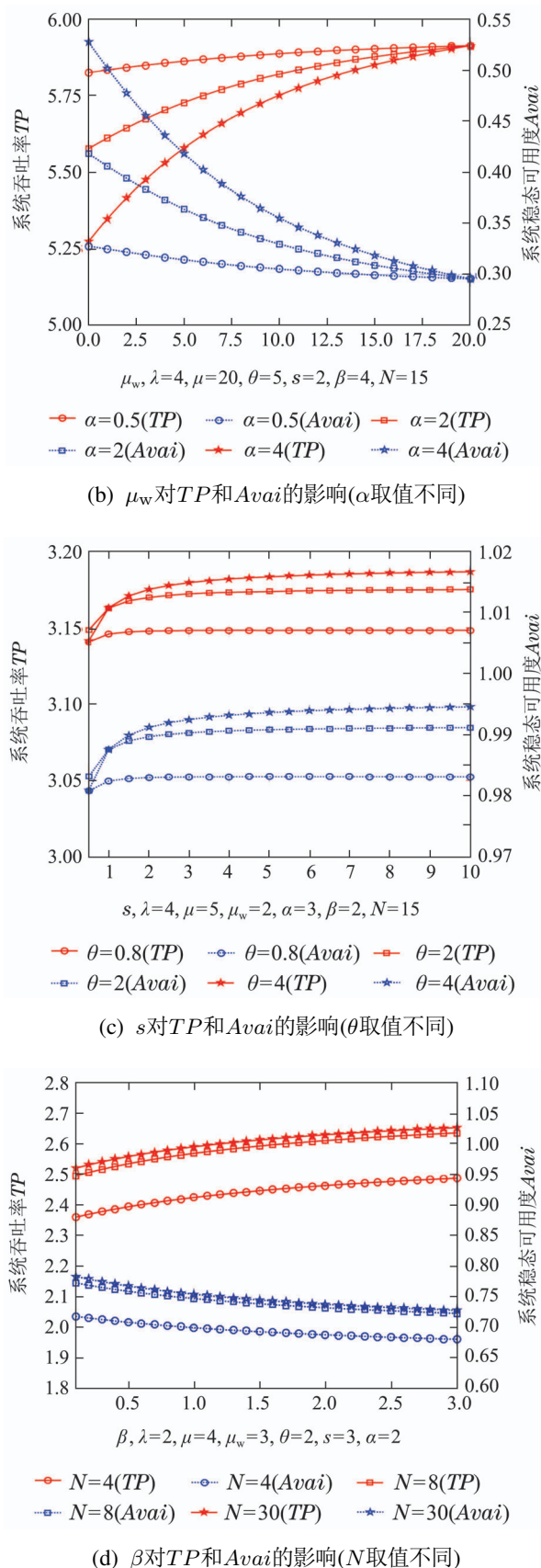
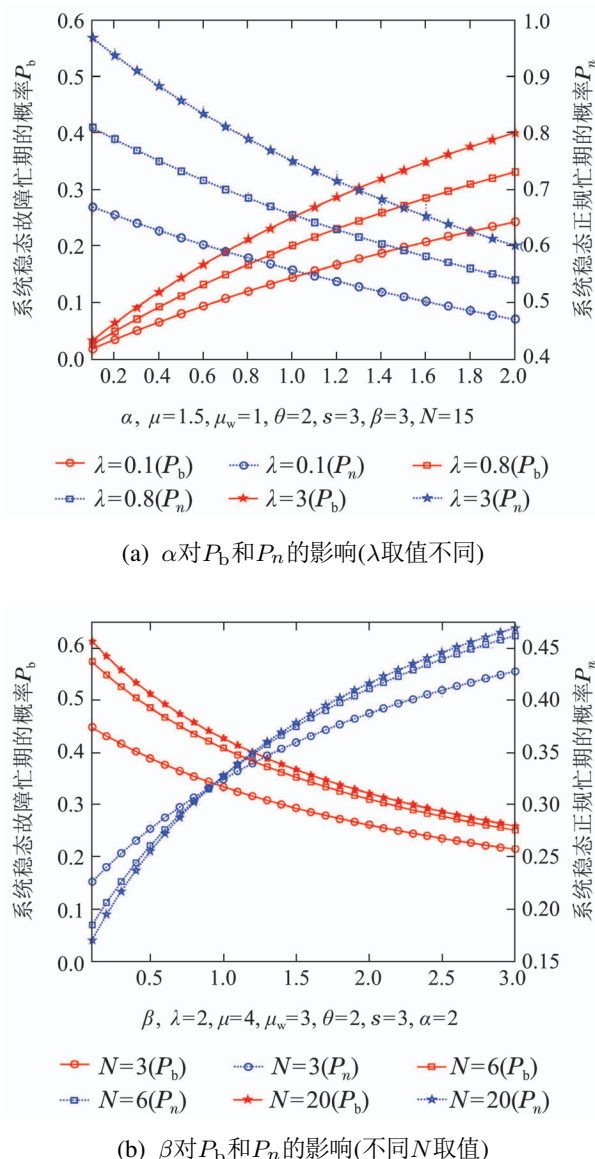


图3 系统参数对TP和Avai的敏感性分析
Fig. 3 Sensitivity analysis of system parameters to TP and Avai

图4(a)–(d)描述了系统各参数的变化对 P_b 和 P_n 的

影响情况. 整体来看, P_b 和 P_n 均随着参数 s, θ 的增大而增大, 随着 μ, μ_w 的增大而减小. 同时, 依图4(a)和图4(b)可见, $P_b(P_n)$ 随着 $\alpha(\beta)$ 的增大而增大, 随着 $\beta(\alpha)$ 的增大而减小, 这一现象与实际生活中的服务过程相一致, 即当服务器的故障率(修复率)增加, 系统处于故障忙期(正规忙期)的概率增大, 反之亦然. 且在图4(a)的实验过程中发现, 当参数 λ 较小时, P_b 和 P_n 均随着参数的增大而增大, 而当 λ 增大到一定程度后, P_b 和 P_n 均保持不变. 依图4(b)可见, P_b 随着参数 N 的增大而增大, 而当参数 β 较小时, P_n 随着参数 N 的增大而减小, 随着参数 β 的增大, 在这一点处, 不同的参数 N 对应的 P_n 值相等; 之后, P_n 随着参数 N 的增大而增大.

图5(a)–(d)描述了系统各参数的变化对Length和 P_{Idel} 的影响情况. 整体来看, Length(P_{Idel})随着参数 α, λ, N 的增大而增大(减小), 同时, 随着 $\mu, \mu_w, s, \theta, \beta$ 的增大而减小(增大). 依图5(d)可见, 随着 λ 的增大, 参数 N 的不同取值对应的 P_{Idel} 均趋近于0, 且越大的参数 N 对应的 P_{Idel} 越先趋近于0.



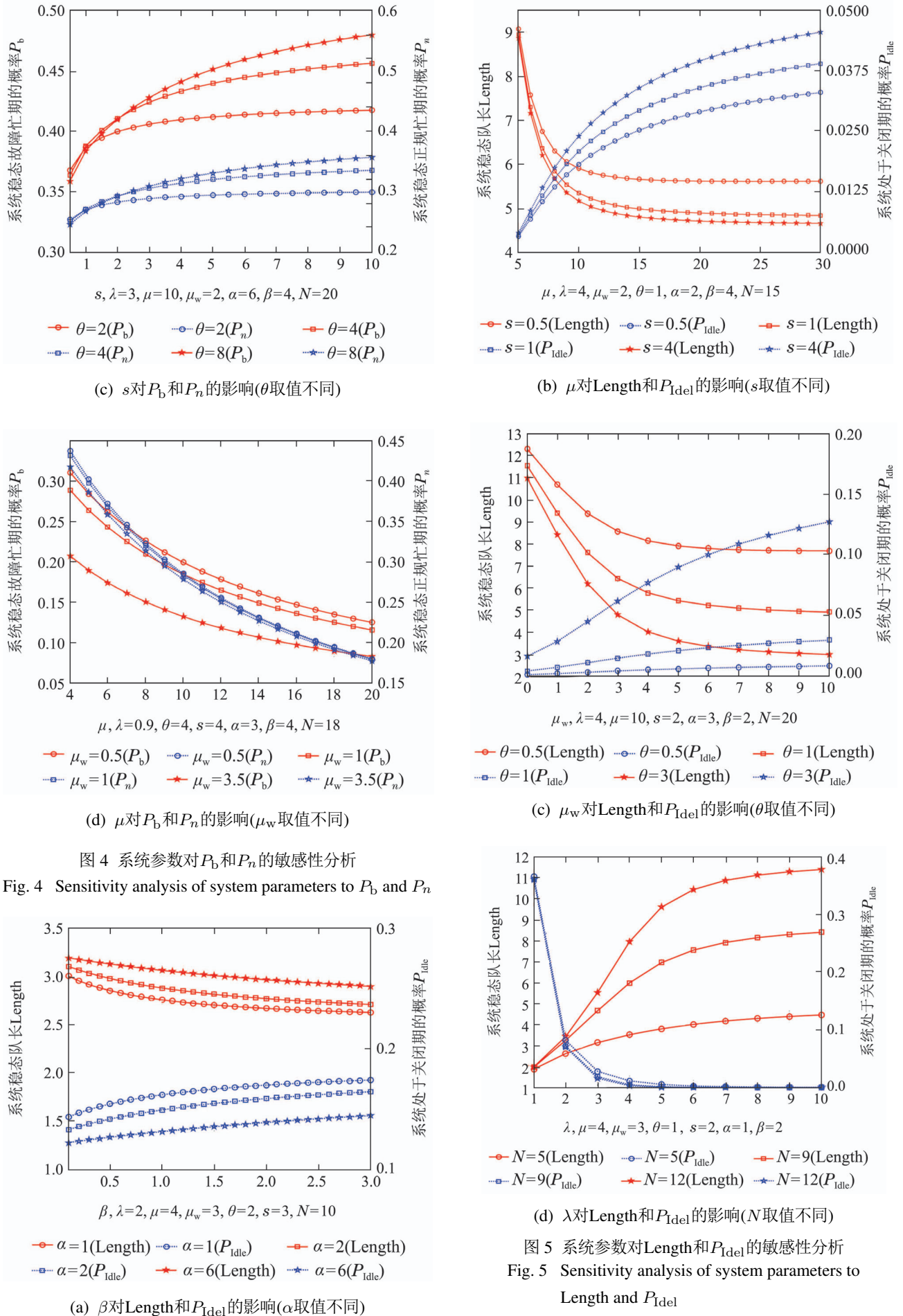
图5 系统参数对Length和 P_{Idle} 的敏感性分析Fig. 5 Sensitivity analysis of system parameters to Length and P_{Idle}

图6分析了在M/M/1/N休假模型、M/M/1/N工作休假模型和M/M/1/N工作故障模型3种不同的排队系统中, μ 对系统稳态队长Length和系统吞吐率TP的影响情况, 其中, 在M/M/1/N工作休假模型中, μ_w 为工作休假的服务速率。

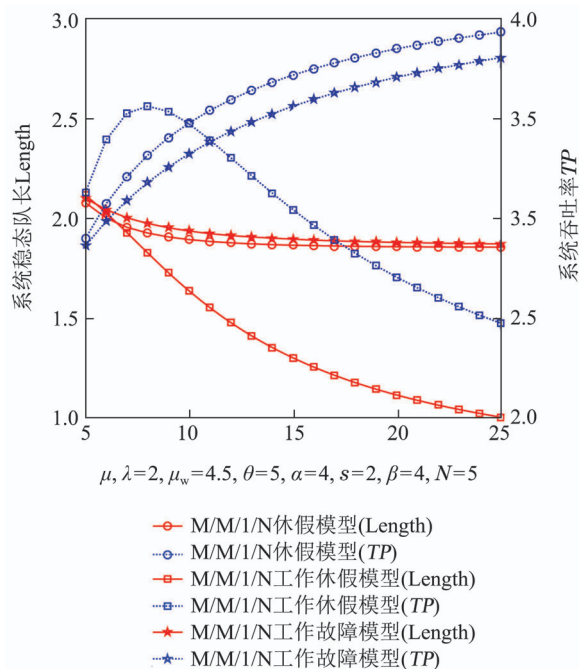


图6 不同排队系统中 μ 对Length和TP的影响

Fig. 6 The influence of μ on Length and TP in different queueing system

由图可见, Length在3种排队系统中均随着 μ 的增大而减小的趋势, 相比较M/M/1/N工作休假模型, M/M/1/N工作故障模型和M/M/1/N休假模型Length随 μ 的变化较小, 且在实验过程中, M/M/1/N工作故障模型中Length的取值始终较其他两种排队模型大. 而在M/M/1/N工作故障模型和M/M/1/N休假模型中, TP均随着 μ 的增大而增大, 且在同参数下, M/M/1/N休假模型的TP较M/M/1/N工作故障模型的TP大. 而在M/M/1/N工作休假模型中, 当 μ 较小时, TP均随着 μ 的增大而增大, 而当 μ 增加到一定值后, TP却随着 μ 的增大而减小. 由此可见, 相比M/M/1/N工作休假模型而言, M/M/1/N工作故障模型的性能的稳定性较好, 趋近于M/M/1/N 休假模型。

综合上述各图, 系统参数对系统性能的影响归纳如下: 1) 系统中服务台的容量并不是越大越好, 当服务台容量超过一定值时, 系统吞吐率、系统可用度受其的影响很小, 因此, 需要根据系统环境设置合理的服务台容量; 2) 若要增大系统吞吐率, 减少系统稳态队长, 有效的方法是增加系统正规忙期和故障忙期的服务率, 以及系统的故障修复率, 减小系统的工作休假时间和启动时间, 且前者比后者更有效; 3) M/M/1/

N工作故障模型性能的稳定性较好于M/M/1/N工作休假模型, 且更接近于M/M/1/N休假模型。

5 结论

根据实际生产过程中有启动时间和服务台容量有限的特点, 本文对带有启动时间和工作故障的M/M/1/N排队系统进行研究. 在此系统中, 服务台在出现故障时仍以低速为顾客服务. 这种模型在制造业生产过程和维修过程中广泛存在. 使用矩阵分析的方法求解此模型的有限状态拟生灭过程, 能够解出系统稳态概率向量, 从而给出系统各项性能指标的解析表达式. 本文将启动时间、有限缓存和工作故障策略同时引入排队系统, 使排队系统的研究内容更接近于实际应用. 同时, 文中使用的矩阵几何方法及对各项性能指标的敏感性分析将为研究复杂不可靠系统提供很好的理论依据, 对进一步研究具有工作故障的M/M/1/N系统很有启发性. 在后续的研究中, 将尝试建立此模型的优化目标函数, 选用高效的优化算法, 以得到系统容量、服务台在正规忙期和故障忙期的服务速率等系统参数的最优组合. 同时对制造业等实际复杂服务系统中存在工作故障的实际生产或维修等过程进行分析, 以为实际生产提供理论指导。

参考文献:

- [1] KALIDASS K, KASTURI R. A queue with working breakdowns. *Computers & Industrial Engineering*, 2012, 63(4): 779 – 783.
- [2] HU Bin, ZHU Yijun, ZHOU Zonghao. The M/M/1 vacation queueing with negative customers, set-up times and spare servers. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2012, 32(2): 349 – 355. (胡彬, 朱翼隼, 周宗好. 负顾客、带启动期和备用服务员的M/M/1休假排队系统. *系统工程理论与实践*, 2012, 32(2): 349 – 355.)
- [3] MA Z Y, CUI G H, WANG P C, et al. M/M/1 vacation queueing system with working breakdowns and variable arrival rate. *Journal of Computational Information Systems*, 2015, 11(5): 1 – 8.
- [4] JIANG T, XIN B G. Computational analysis of the queue with working breakdowns and delaying repair under a Bernoulli-schedule-controlled policy. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 2018. DOI: 10.1080/03610926.2017.1422756.
- [5] LIOU C D. Markovian queue optimisation analysis with an unreliable server subject to working breakdowns and impatient customers. *International Journal of Systems Science*, 2015, 46(21): 65 – 82.
- [6] CHEN J, YEN T, WANG K. Cost optimization of a single-server queue with working breakdowns under the N policy. *Journal of Testing and Evaluation*, 2016, 44(5): 2059 – 2067.
- [7] YANG D Y, CHEN Y H. Computation and optimization of a working breakdown queue with second optional service. *Journal of Industrial and Production Engineering*, 2018, 35(3): 181 – 188.
- [8] KIM B K, LEE D H. The M/G/1 Queue with disasters and working breakdowns. *Applied Mathematical Modelling*, 2014, 38(5/6): 1788 – 1798.
- [9] RAJADURAI P. Sensitivity analysis of an M/G/1 retrial queueing system with disaster under working vacations and working breakdowns. *RAIRO—Operations Research*, 2018, 52(1): 35 – 54.

- [10] LIU Z, SONG Y. The $M^X/M/1$ queue with working breakdowns. *RAIRO-Operations Research*, 2014, 48(3): 399 – 413.
- [11] YE Q Q, LIU L W. Analysis of MAP/M/1 queue with working breakdowns. *Communication in Statistics—Theory and Methods*, 2017. DOI: 10.1080/03610926.2017.1346808.
- [12] JIANG T, LIU L W. The GI/M/1 queue in a multi-phase service environment with disasters and working breakdowns. *International Journal of Computer Mathematics*, 2017, 94(4): 707 – 726.
- [13] YANG D Y, WU Y Y. Analysis of a finite-capacity system with working breakdowns and retention of impatient customers. *Journal of Manufacturing Systems*, 2017, 44(2017): 207 – 216.
- [14] LI T, ZHANG L Y. Discrete-time Geo/Geo/1 queue with negative customers and working breakdowns. *International Journal of Applied Mathematics*, 2017, 47(4): 442 – 448.
- [15] LAN S, TANG Y. Performance analysis of a discrete-time queue with working breakdowns and dearching for the optimum service rate in working breakdown period. *Journal of Systems Science & Information*, 2017, 5(2): 176 – 192.
- [16] YEN T C, WU H, WANG K H, et al. Optimal control of the machine repair problem with removable repairman subject to working breakdowns. *Journal of Testing & Evaluation*, 2014, 43(6): 1487 – 1496.
- [17] WANG K H, LIOU C D. Particle swarm optimization for the machine repair problem with working breakdowns. *International Conference in Swarm Intelligence*. Switzerland: Springer Nature, 2017, 10385: 238 – 245.
- [18] LIOU C D. Optimization analysis of the machine repair problem with multiple vacations and working breakdowns. *Journal of Industrial & Management Optimization*, 2014, 11(1): 83 – 104.
- [19] YEN T C, CHEN W L, CHEN J Y. Reliability and sensitivity analysis of the controllable repair system with warm standbys and working breakdown. *Computers & Industrial Engineering*, 2016, 97: 84 – 92.
- [20] CHEN W L. System reliability analysis of retrial machine repair systems with warm standbys and a single server of working breakdown and recovery policy. *Systems Engineering*, 2018, 21(1): 59 – 69.
- [21] NEUTS M F. *Matrix-Geometric Solution in Stochastic Model: an Algorithmic Application*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1981.
- [22] TIAN Naishuo, YUE Dequan. *Quasi-Birth and Death Process and Matrix Geometric Solution*. Beijing: Science Press, 2002. (田乃硕, 岳德权. 拟生灭过程与矩阵几何解. 北京: 科学出版社, 2002.)
- [23] ELHAFS E H, MOLLE M. On the solution to QBD processes with finite state space. *Stochastic Analysis and Applications*, 2007, 25(4): 763 – 779.

作者简介:

杨喜娟 讲师, 博士研究生, 研究方向为随机控制及应用、智能制造系统, E-mail: yangxj331@163.com;

李忠学 副教授, 研究方向为智能制造系统、机电系统控制, E-mail: lizx@mail.lzjtu.cn;

黎锁平 教授, 博士, 博士生导师, 研究方向为随机控制与随机过程、数据通信与差错控制, E-mail: lsuop@163.com;

武 福 教授, 研究方向为先进制造理论及技术、先进制造过程控制与优化, E-mail: wufu@mail.lzjtu.cn.