

# 质子交换膜燃料电池的分数阶非线性状态空间模型研究

戚志东<sup>†</sup>, 何永康, 戈卫平, 孙琦

(南京理工大学 自动化学院, 江苏 南京 210094)

**摘要:** 针对质子交换膜燃料电池(PEMFC)发电过程中的分数阶和非线性特性, 本文提出了一种分数阶子空间辨识方法建立了 PEMFC 非线性状态空间模型. 首先, 为了降低建模复杂度, 采用典型相关分析法和相关分析法确定了模型输入变量; 其次, 将分数阶微分理论与 Hammerstein 模型子空间辨识方法相结合, 采用 Poisson 矩函数对输入输出数据进行预处理, 构造了子空间辨识方法的输入输出矩阵, 并引入分数阶短时记忆法减少辨识算法计算量; 最后, 选取多项式作为 Hammerstein 模型前端静态非线性环节, 采用模糊遗传算法优化系统分数阶阶次和系数矩阵. 仿真结果验证了算法的有效性, 改进的辨识算法可以明显减小计算时间, 所得 PEMFC 辨识模型能够准确地描述 PEMFC 的动态过程.

**关键词:** 质子交换膜燃料电池; 分数阶; Hammerstein 模型; 子空间辨识

**引用格式:** 戚志东, 何永康, 戈卫平, 等. 质子交换膜燃料电池的分数阶非线性状态空间模型研究. 控制理论与应用, 2019, 36(3): 420–427

DOI: 10.7641/CTA.2018.80671

## Fractional nonlinear subspace modeling for proton exchange membrane fuel cell

QI Zhi-dong<sup>†</sup>, HE Yong-kang, GE Wei-ping, SUN Qi

(College of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China)

**Abstract:** Aiming at the fractional and nonlinear characteristics of proton exchange membrane fuel cell (PEMFC), a fractional subspace identification method is proposed to establish a nonlinear state space model of PEMFC. Firstly, in order to reduce the modeling complexity, the model input variables are determined by the typical correlation analysis method and correlation analysis method. Secondly, combined with the fractional differential theory and the Hammerstein model subspace identification method, a Poisson moment function is adopted to preprocess the input and output data to construct the input and output matrix of the subspace identification method. Then, a fractional order short-term memory method is introduced to reduce the computational complexity of the identification algorithm. Finally, the polynomial is selected as the static nonlinear link in the front of the Hammerstein model, and a fuzzy genetic algorithm is adopted to optimize the system of fractional orders and coefficient matrices. The simulation results verified the effectiveness of the proposed identification method which can shorten the computation time, and the obtained PEMFC identification model can accurately describe the dynamic process of PEMFC.

**Key words:** proton exchange membrane fuel cell; fractional order; Hammerstein model; subspace identification

**Citation:** QI Zhidong, HE Yongkang, GE Weiping, et al. Fractional nonlinear subspace modeling for proton exchange membrane fuel cell. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(3): 420–427

## 1 引言

质子交换膜燃料电池(proton exchange membrane fuel cell, PEMFC)是一个包括流动、传热、传质和电化学反应等多种物理化学现象的复杂系统, 具有典型的分数阶和非线性特性<sup>[1–2]</sup>. PEMFC 分数阶建模与控制是很有意义的研究方向.

近年来, 研究人员尝试采用分数阶理论建立 PEMFC 模型, 做出了有益的探索. 卞慧娟<sup>[3]</sup>对电堆气体传质和热扩散过程进行机理分析, 分别建立了电堆气压和温度的分数阶微分方程. 张明<sup>[4]</sup>采用内部机理方法、系统结构方法和等效电路方法建立电堆的分数阶传递函数模型. Miassa 等人<sup>[2]</sup>根据等效电路方法分别

收稿日期: 2018–09–07; 录用日期: 2018–12–04.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: qizhidong@sina.com; Tel.: +86 18795930315.

本文责任编辑: 张承慧.

国家自然科学基金项目(61374153)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61374153).

建立了PEMFC的分数阶和整数阶阻抗模型. 上述方法中电堆都被简化为单输入单输出系统, 忽略的因素较多.

在PEMFC发电过程中, 气体流量、气体压力、负载电流、堆温和室温等都会影响系统的输出电压和功率, 因此建立电堆的多输入多输出模型有望更加准确地描述实际系统. 目前这方面的研究还比较少<sup>[5-7]</sup>, 冷博阳<sup>[8]</sup>在恒温条件下, 由分数阶气体传输方程和稳态电压方程建立了电堆的多输入单输出分数阶状态空间模型, 但其模型复杂, 不利于实际应用. Hu<sup>[9]</sup>将PEMFC视为弱非线性系统, 通过子空间辨识算法得到了空冷堆电特性分数阶状态空间模型. 但以上模型对PEMFC非线性特性考虑不足.

综上所述, 目前还没有同时准确描述PEMFC分数阶和非线性特性的状态空间模型. Hammerstein模型是一种典型的非线性模型, 可以描述PEMFC等非线性系统<sup>[10]</sup>. 本文首次结合分数阶理论和子空间辨识方法建立了一种PEMFC分数阶Hammerstein状态空间模型. 为了使输入输出数据分数阶可导, 利用泊松矩函数<sup>[11]</sup>对数据进行滤波, 为了降低算法计算量, 引入分数阶短时记忆法<sup>[12]</sup>重构增广输入输出方程, 实现辨识数据和分数阶阶次的分离. 辨识结果表明, 本文提出的建模方法大大缩短了算法的计算时间, 所建立的PEMFC分数阶Hammerstein状态空间模型能够准确描述系统发电过程并且避免了复杂的内部机理分析.

## 2 建模变量选取

PEMFC是一个将氢能转换为电能的发电装置. 空冷型PEMFC发电系统如图1所示.

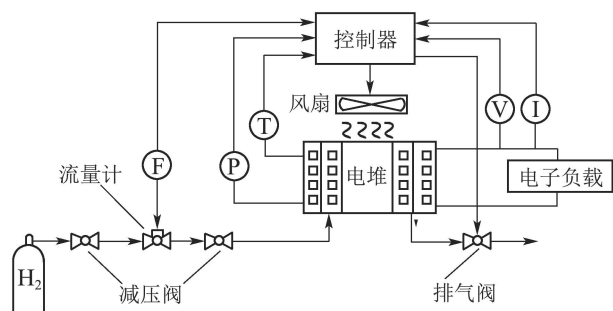


图1 空冷型PEMFC测控系统框图

Fig. 1 Block diagram of air-cooled PEMFC measurement and control system

影响PEMFC发电过程的因素有气体流量、气体压力、堆温、湿度和负载电流等. 氢气经过减压阀和流量计为电堆提供燃料, 风扇为电堆提供空气同时带走电堆热量调节电堆温度, 排气阀调节电堆的温度和湿度, 电子负载可实时改变负载大小. 通过检测装置采集负载电流、氢气流量、氢气压力、输出电压、输出功率、电堆温度、环境温度等变量的电信号传送给控制

器, 进而调节风扇电压、氢气流量来实现电堆的输出电压和温度控制. 显然, PEMFC是一个典型的多输入多输出系统, 为了减小建模复杂度, 本文采用典型相关性分析<sup>[13]</sup>选取与PEMFC电特性相关性最大的输入变量, 并采用相关性分析去除冗余输入变量.

### 2.1 典型相关性分析

典型相关性分析是一种测度两组变量之间相关性的多元统计方法, 与主成分分析法类似. 分别通过两组变量  $X = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ ,  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_p)$  的线性组合, 将两组变量相关性转化为两个变量相关性, 即

$$\begin{cases} \hat{U}_i = X\hat{\alpha}^{(i)}, \\ \hat{V}_i = Y\hat{\beta}^{(i)}, \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $i$  为线性组合组数,  $\hat{\alpha}^{(i)}$ ,  $\hat{\beta}^{(i)}$  分别为线性组合的系数向量. 一组  $\hat{U}_i$ ,  $\hat{V}_i$  的组合称为一对典型变量, 它们之间的相关系数称为典型相关系数. 如果一对典型变量的典型相关系数较大, 选其作为典型变量. 如果相关性不显著即典型相关系数较小, 则说明这对变量不具有代表性, 直接舍弃这对典型变量. 由矩阵  $(X^T Y^T)^T$  的协方差矩阵可得到相关系数矩阵  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{12}$ ,  $\Sigma_{21}$ ,  $\Sigma_{22}$ . 再根据矩阵  $A = \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}$  的特征值算术根求取典型相关系数, 具体计算方法可以参考文献<sup>[14]</sup>.

根据所选典型变量的  $\hat{\alpha}^{(i)}$  中元素的绝对值大小选取输入变量. 因为  $\hat{U}_i$  中系数绝对值较大的  $n$  个变量对  $\hat{U}_i$  起主要作用, 所以当一对变量相关性显著时, 这  $n$  个变量便与中  $q$  个变量的线性组合具有很大相关性, 则选取该  $n$  个变量作为输入变量.

在电堆输入变量中, 多个变量之间均有一定的相关性, 例如氢气流量与氢气压力, 温度与负载电流等, 若两个变量的相关性达到80%, 可以认为这两个变量呈线性关系, 不必同时选为输入变量. 因此, 采用相关性分析可对输入变量进行进一步缩减, 以保留可控可测变量、舍弃不可控不可测变量为原则.

### 2.2 辨识变量选择

先从5个输入变量中确定对电堆输出电压和功率影响最大的输入变量. 在电堆不加控制的情况下, 随机调节可控的输入变量即氢气流量和负载电流, 每隔1 s对所有可测变量各采集100组数据. 首先采用典型相关性分析的方法对100组5个输入参数(氢气流量、氢气压力、负载电流、环境温度和电堆温度)和2个输出参数(输出电压和功率)的数据进行分析, 去除3对相关性不显著的典型变量, 得到2对典型相关系数分别为0.9998, 0.5257的典型变量, 具体分析结果如表1所示.

表1中, 氢气流量、氢气压力和负载电流对应的线性组合系数较大, 即对电堆输出影响较大, 可作为候

选输入变量. 由相关性分析可知, 氢气流量和氢气压力相关性较大, 其相关系数为0.999. 考虑氢气流量直接影响氢气压力, 且可控可测性比后者好, 所以保留氢气流量作为输入变量.

表 1 典型相关性分析结果

Table 1 Results of canonical correlation analysis

输入变量	输出变量	
	0.0799[V]-0.959[P]	1.1393[V]+0.6203[P]
氢气流量	1.7601	-108.3964
氢气压力	-1.7583	109.3878
负载电流	-1.0003	0.0957
电堆温度	0.0059	-0.0796
环境温度	-0.0022	-0.1650

综上, 本文选取氢气流量和负载电流作为辨识模型输入变量, 输出电压和功率作为辨识模型输出变量.

### 3 分数阶Hammerstein模型子空间辨识

Hammerstein系统是一类以线性动态过程为主体, 在输入端存在非线性环节的非线性系统, 该系统已经在工业过程建模中得到了广泛的运用. PEMFC是一个包含气液流动、传热传质、电化学反应的非线性系统, 可采用Hammerstein模型结构描述其发电过程. 本文将分数阶微积分原理与子空间辨识方法相结合, 提出一种分数阶Hammerstein模型, 其结构形式见图2.

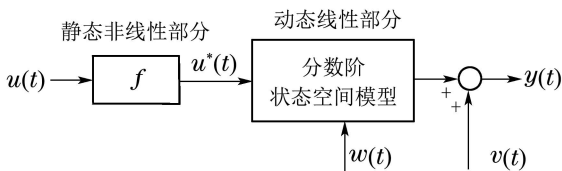


图 2 数阶Hammerstein模型结构

Fig. 2 Structure of fractional Hammerstein model

图2中:  $u(t)$ ,  $y(t)$ 分别为可测输入和输出量,  $u^*(t)$ 为中间变量,  $w(t)$ ,  $v(t)$ 为系统过程噪声和测量噪声. 上述分数阶Hammerstein模型的数学表达式为

$$\begin{cases} D^\gamma x(t) = Ax(t) + Bu^*(t) + w(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du^*(t) + v(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $0 < \gamma < 2$ 为系统分数阶阶次.  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{l \times m}$ ,  $m$ 和 $l$ 分别为输入和输出的围数,  $n$ 为系统的阶次.  $f$ 是 $m$ 维输入映射到 $m$ 维输出的非线性函数, 可以描述为一组已知基函数的线性组合

$$u^*(t) = f(u(t)) = \sum_{k=1}^r \alpha_k \varphi_k(u(t)), \quad (3)$$

其中:  $r \in N$ , 基函数的系数矩阵 $\alpha_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . 基函数 $\varphi_k(): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, k = 1, 2, \dots, r$ , 常见的基函数有多项式基函数、高斯径向基函数等.

### 3.1 构造增广输入输出矩阵

当分数阶阶次已知时, 令

$$\alpha \triangleq [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r], \quad (4)$$

$$\tilde{u}(t) \triangleq [\varphi_1^T(u(t)) \ \varphi_2^T(u(t)) \ \dots \ \varphi_r^T(u(t))]^T. \quad (5)$$

分数阶Hammerstein模型状态空间方程可以改写为

$$\begin{cases} D^\gamma x(t) = Ax(t) + B\alpha\tilde{u}(t) + w(t), \\ y(t) = Cx(t) + D\alpha\tilde{u}(t) + v(t). \end{cases} \quad (6)$$

对上式两边求导迭代, 得到增广输入输出方程

$$Y_q(t) = \Gamma_q x(t) + H_q \tilde{U}_q(t) + G_q W_q(t) + V_q(t), \quad (7)$$

其中:  $\Gamma_q$ 是增广能观矩阵,  $q$ 为固定值, 满足 $q > n$ .

$$Y_q(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ D^\gamma y(t) \\ \vdots \\ D^{(q-1)\gamma} y(t) \end{bmatrix}, \quad \Gamma_q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{q-1} \end{bmatrix},$$

$$G_q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ C & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{q-2} & CA^{q-3} & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{U}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{u}(t) \\ D^\gamma \tilde{u}(t) \\ \vdots \\ D^{(q-1)\gamma} \tilde{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^\gamma \varphi_1(u(t)) \\ \vdots \\ D^\gamma \varphi_r(u(t)) \\ D^{2\gamma} \varphi_1(u(t)) \\ \vdots \\ D^{2\gamma} \varphi_r(u(t)) \\ \vdots \\ D^{(q-1)\gamma} \varphi_1(u(t)) \\ \vdots \\ D^{(q-1)\gamma} \varphi_r(u(t)) \end{bmatrix},$$

$$H_q = \begin{bmatrix} D\alpha & 0 & \dots & 0 \\ CB\alpha & D\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{q-2}B\alpha & CA^{q-3}B\alpha & \dots & D\alpha \end{bmatrix},$$

矩阵 $W_q(t)$ ,  $V_q(t)$ 的定义同 $Y_q(t)$ 类似.

选择合适的采样时间 $T_s$ , 令 $t_k = kT_s (k = 1, 2, \dots, N)$ ,  $N$ 为采样数. 令 $u(k) = u(t_k)$ ,  $y(k) = y(t_k)$ , 可以得到

$$\begin{aligned} Y_{q,N-k+1} &= \Gamma_q X_{N-k+1} + H_q \tilde{U}_{q,N-k+1} + \\ &G_q W_{q,N-k+1} + V_{q,N-k+1}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中:

$$X_{N-k+1} = [D^{(q-1)\gamma} x(k) \ \dots \ D^{(q-1)\gamma} x(N)],$$

$$Y_{q,N-k+1} = [Y_q(k) \ Y_q(k+1) \ \cdots \ Y_q(N)],$$

$\tilde{U}_{q,N-k+1}, W_{q,N-k+1}, V_{q,N-k+1}$  的矩阵形式与  $Y_{q,N-k+1}$  的矩阵形式类似, 不再赘述.

### 3.2 短时记忆原理

在上述推导增广输入输出方程过程中, 假设方程的辨识数据均是  $(q-1)\gamma$  阶可导的, 而实际数据很难满足该要求, 本文采用 Poisson 矩函数对辨识数据进行预处理来解决此问题. Poisson 矩函数的表达式如下<sup>[11]</sup>:

$$G(s) = \left(\frac{\beta}{s + \lambda}\right)^{(q-1)\gamma+1}, \quad (9)$$

式中  $\beta$  和  $\lambda$  为滤波器增益和常数.

定义运算符  $M\{\cdot\}$

$$M\{f(t) = g(t) * f(t), \quad (10)$$

其中:  $f(t)$  为关于时间  $t$  的任意函数;  $g(t)$  为  $G(s)$  的拉普拉斯逆变换;  $*$  为卷积运算符, 则根据分数阶微积分的相关性质有

$$\begin{aligned} M\{D^\alpha f(t)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{G_k(s)s^\alpha F(s)\} = \\ \mathcal{L}^{-1}\{s^\alpha G_k(s)F(s)\} &= D^\alpha g_k(t) * f(t). \end{aligned} \quad (11)$$

使用 Poisson 矩函数对辨识数据进行预处理后, 原本对于辨识数据的各阶分数阶可导条件转化为对 Poisson 矩函数的各阶可导. 函数  $g(t)$  显然满足  $(q-1)\gamma$  阶可导, 因此可以得到

$$\begin{aligned} M\{Y_q(k)\} &= \begin{bmatrix} M\{y(k)\} \\ M\{D^\gamma y(k)\} \\ \vdots \\ M\{D^{(q-1)\gamma} y(k)\} \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} g(t) * y(t) \\ g(t) * D^\gamma y(t) \\ \vdots \\ g(t) * D^{(q-1)\gamma} y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g(t) * y(t) \\ D^\gamma g(t) * y(t) \\ \vdots \\ D^{(q-1)\gamma} g(t) * y(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

由上式可知, 通过 Poisson 矩函数对数据进行预处理本质是对原始数据进行滤波, 降低高频噪声对于辨识结果的干扰.

仿照以上步骤对式(8)整体滤波, 便可得到满足假设条件的系统模型

$$\begin{aligned} M\{Y_{\gamma,q,N}\} &= \Gamma_q M\{X_{\gamma,q,N}\} + H_q M\{\tilde{U}_{\gamma,q,N}\} + \\ E_q M\{W_{\gamma,q,N}\} &+ M\{V_{\gamma,q,N}\}. \end{aligned} \quad (13)$$

经过滤波后, 可以求解输入输出数据的高阶分数阶导数. 但是从分数阶微积分 GL 定义可知, 求解滤波后的  $M\{Y_{\gamma,q,N}\}, M\{\tilde{U}_{\gamma,q,N}\}$  依然需要  $q(N-k+1)$  分数阶微分运算. 当对分数阶微分阶次进行遍历迭代时, 依然需要同样的计算量. 随着迭代次数的增加, 计算量将会产生灾难. 为了解决这一难题, 将分数阶短记忆法<sup>[12]</sup>引入输入输出数据的微分计算. 根据短时记忆

原理可知, 当  $t \gg a$  时, 函数某一时刻的值主要取决于最近一段时间的函数值, 因此可将对矩函数  $D^{(q-1)\gamma} g(k)$  的各阶分数阶求导转化为时刻矩函数值向量与 GL 定义系数的乘积, 即

$$\begin{aligned} D^{(q-1)\gamma} g(k) &= \frac{1}{T_s^{(q-1)\gamma}} \sum_{j=0}^L \omega_j^{((q-1)\gamma)} g(k-j) = \\ \left[ \frac{1}{T_s^{(q-1)\gamma}} \ \frac{\omega_1^{((q-1)\gamma)}}{T_s^{(q-1)\gamma}} \ \cdots \ \frac{\omega_L^{((q-1)\gamma)}}{T_s^{(q-1)\gamma}} \right] &\begin{bmatrix} g(k) \\ g(k-1) \\ \vdots \\ g(k-L) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (14)$$

式中  $L$  为短时记忆长度. 因此, 式(13)改写为

$$\begin{aligned} (\Omega_q \otimes I_m) M\{Y_{L,N}\} &= \\ \Gamma_q M\{X_{L,N}\} + H_q (\Omega_q \otimes I_{mr}) M\{\tilde{U}_{L,N}\} + \\ G_q (\Omega_q \otimes I_m) M\{W_{L,N}\} &+ (\Omega_q \otimes I_m) M\{V_{L,N}\}, \end{aligned} \quad (15)$$

式中:  $\otimes$  为 kronecker 算子,  $\Omega_q$  为短时记忆矩阵,  $\tilde{U}_{L,N}$  和  $Y_{L,N}$  为滤波后的增广输入输出矩阵:

$$\begin{aligned} \Omega_q &\triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{T_s^\alpha} & \frac{\omega_1^{(\alpha)}}{T_s^\alpha} & \cdots & \frac{\omega_L^{(\alpha)}}{T_s^\alpha} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{T_s^{(q-1)\alpha}} & \frac{\omega_1^{((q-1)\alpha)}}{T_s^{(q-1)\alpha}} & \cdots & \frac{\omega_L^{((q-1)\alpha)}}{T_s^{(q-1)\alpha}} \end{bmatrix}, \\ Y_{L,N} &\triangleq \begin{bmatrix} y(L+1) & y(L+2) & \cdots & y(N) \\ y(L) & y(L+1) & \cdots & y(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(1) & y(2) & \cdots & y(N-L) \end{bmatrix}, \\ \tilde{U}_{L,N} &\triangleq \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(u(L+1)) \\ \vdots \\ \varphi_r(u(L+1)) \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \varphi_1(u(N)) \\ \vdots \\ \varphi_r(u(N)) \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} \varphi_1(u(1)) \\ \vdots \\ \varphi_r(u(1)) \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \varphi_1(u(N-L)) \\ \vdots \\ \varphi_r(u(N-L)) \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### 3.3 求取增广可观测矩阵

对式(15)移项并对方程两边同时乘列满秩矩阵的正交投影  $(\Gamma_q^\perp)^\top$ , 整理后可得

$$\begin{aligned} [(\Gamma_q^\perp)^\top - (\Gamma_q^\perp)^\top H_q] &\left[ \frac{(\Omega_q \otimes I_m) M\{Y_{L,N}\}}{(\Omega_q \otimes I_{mr}) M\{\tilde{U}_{L,N}\}} \right] = \\ (\Gamma_q^\perp)^\top \cdot G_q (\Omega_q \otimes I_m) M\{W_{L,N}\} &+ \\ (\Gamma_q^\perp)^\top (\Omega_q \otimes I_m) M\{V_{L,N}\}, \end{aligned} \quad (16)$$

对矩阵  $\begin{bmatrix} (\Omega_q \otimes I_m)M\{Y_{L,N}\} \\ (\Omega_q \otimes I_{mr})M\{\tilde{U}_{L,N}\} \end{bmatrix}$  进行奇异值分解可以

得到其主元分析<sup>[15]</sup>

$$\begin{bmatrix} (\Omega_q \otimes I_m)M\{Y_{L,N}\} \\ (\Omega_q \otimes I_{mr})M\{\tilde{U}_{L,N}\} \end{bmatrix} = [\theta_1 \quad \theta_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}, \quad (17)$$

从而可以得到

$$\begin{bmatrix} \Gamma_q^\perp \\ -H_q^T \Gamma_q^\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{21} \\ \theta_{22} \end{bmatrix} Q, \quad (18)$$

其中:  $Q$  为非奇异矩阵, 并有合适的阶次, 一般取单位阵.  $\theta_{21}$  和  $\theta_{22}$  为  $\theta_2$  分解出来的具有合适维度的矩阵. 由上式求得

$$\Gamma_q = \theta_{21}^\perp, \quad (19)$$

$$-\theta_{21} H_q = \theta_{22}^\perp. \quad (20)$$

由式(19)和式(20)即可得到  $\Gamma_q$  和  $H_q$  的估计值, 进一步可以求取系统矩阵.

### 3.4 求取系统矩阵和多项式矩阵 $\alpha$

从式(19)中  $\hat{\Gamma}_q$  很容易得到  $A$  和  $C$  的估计

$$\hat{C} = \hat{\Gamma}_q(1:l,:), \quad (21)$$

$$\hat{A} = \hat{\Gamma}_q(1:m(l-1),:)\dagger \hat{\Gamma}_q(m+1:ml,:), \quad (22)$$

式中:  $\dagger$  为 Moore-Penrose 伪逆,  $(1:m(l-1),:)$  为 MATLAB 表达式, 表示取矩阵的第 1 到  $m(l-1)$  行. 从式(20)中  $\hat{H}_q$  可以直接得到  $B\alpha$  和  $D\alpha$ .

$$\hat{H}_q = \begin{bmatrix} I_{m \times m} & 0 \\ 0 & \hat{\Gamma}_q(1:m(l-1),:) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D\alpha \\ B\alpha \end{bmatrix}. \quad (23)$$

为了精确地确定系数矩阵  $B, D, \alpha$ , 将辨识问题转化为一个优化问题, 形式如下:

$$(\hat{B} \hat{D} \hat{\alpha}) = \arg \min \left\{ \left\| \begin{bmatrix} \hat{B} \hat{\alpha} \\ \hat{D} \hat{\alpha} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \alpha \right\|_2^2 \right\}. \quad (24)$$

通过奇异值分解(SVD)可以解决该优化问题<sup>[16]</sup>

$$\begin{bmatrix} \hat{B} \hat{\alpha} \\ \hat{D} \hat{\alpha} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_{s1} & U_{s2} \end{bmatrix}}_U \underbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_{s1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{s2} \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} V_{s1}^T \\ V_{s2}^T \end{bmatrix}}_V, \quad (25)$$

式中:  $U$  和  $V$  都为正交矩阵,  $S$  为对角矩阵.

在基函数已知的条件下,  $\alpha$  的辨识结果是唯一的. 因此得到

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = (V_{s1}^T(1:m, 1:m))^{-1} V_{s1}^T, \\ \begin{bmatrix} \hat{B} \\ \hat{D} \end{bmatrix} = U_{s1} \Sigma_{s1} (V_{s1}^T(1:m, 1:m))^{-1}. \end{cases} \quad (26)$$

### 3.5 分数阶阶次 $\gamma$ 优化

分数阶 Hammerstein 模型的分数阶阶次对模型的准确性至关重要, 可采用模糊遗传算法来确定. 模糊

遗传算法<sup>[17-18]</sup>是一种利用模糊逻辑自动调节交叉和变异概率的改进型遗传算法, 具有收敛速度快, 避免不成熟收敛等优点.

为了使辨识模型在各时刻输出电压和功率尽可能接近电堆的实测数据, 模糊遗传算法的目标函数可取为

$$J = \min \sum_{i=1}^N [(\hat{V}_i - V_i)^2 + (\hat{P}_i - P_i)^2], \quad (27)$$

式中:  $N$  为实验数据个数,  $\hat{V}_i, \hat{P}_i$  为 PEMFC 辨识模型输出电压和功率,  $V_i, P_i$  为实测输出电压和功率.

分数阶 Hammerstein 模型的子空间辨识算法具体流程如图 3 所示.

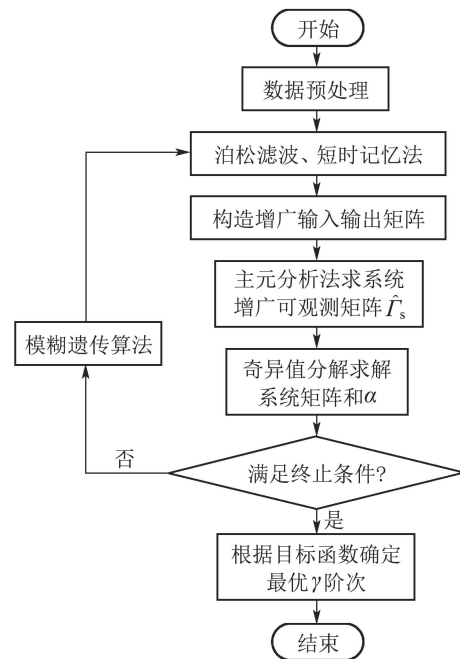


图 3 分数阶 Hammerstein 模型子空间辨识流程示意图

Fig. 3 Subspace identification process for fractional Hammerstein model

## 4 PEMFC 分数阶 Hammerstein 模型建立与验证

### 4.1 模型建立

模型建立过程主要包括数据采集和预处理、多项式阶次和分数阶微分阶次的选择及系统系数矩阵的求解, 具体过程如下:

1) 采集输入输出变量的实测数据. 子空间辨识算法必须保证输入数据是持续激励且采样连续的信号, 考虑到电堆的负载、氢气流量等影响因素时常以阶跃形式出现, 选择随机阶跃信号作为输入. 氢气流量和负载电流的幅值变化范围限定在电堆额定工作范围内, 每秒采集一组数据, 共计 750 组 50 W 空冷型 PEMFC 电堆正常工作数据.

2) 数据预处理. 对采集的数据进行数据完整性和正确性分析, 剔除一部分变化率偏离 PEMFC 系统工

作实际的测试数据. 用前500组数据辨识PEMFC分数阶Hammerstein模型, 后250组数据验证辨识模型有效性.

3) 构造增广输入输出矩阵. 首先构造式(19)中  $M\{Y_{L,N}\}M\{\tilde{U}_{L,N}\}$  滤波后矩阵, Poission矩函数参数选取  $\lambda=1, \beta=1, q=5$ . 由于高斯径向基函数存在不确定参数且形式复杂, 因此选择多项式基函数, 短时记忆矩阵中的记忆步长选为  $L=99$ .

4) 选取系统阶次. 通过赤池信息准则证明三阶系统可以对PEMFC电特性进行较好的描述, 因此可考虑PEMFC状态空间模型为三阶系统.

5) 选择多项式阶次和分数阶微分阶次. 由于多项式阶次过高将会增大计算量且对模型精度影响不大, 阶次过低不能很好的描述非线性特性, 且对输出误差影响较大. 假设系统分数阶阶次为1, 确定多项式阶次后再确定系统分数阶微分阶次. 仿真结果表明, 当多项式阶次为四、五、六阶时, 辨识效果较好, 模型输出与实际输出对比曲线如图4-5所示.

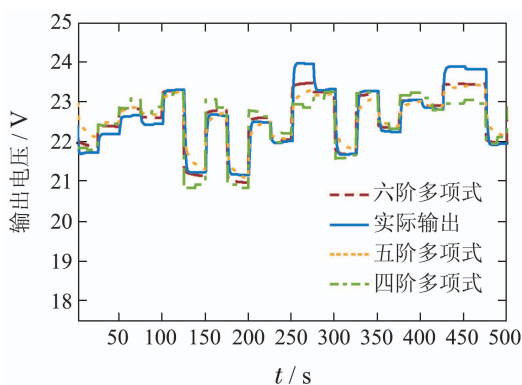


图4 不同多项式阶次辨识输出电压结果

Fig. 4 Output voltage identification results of different polynomial order

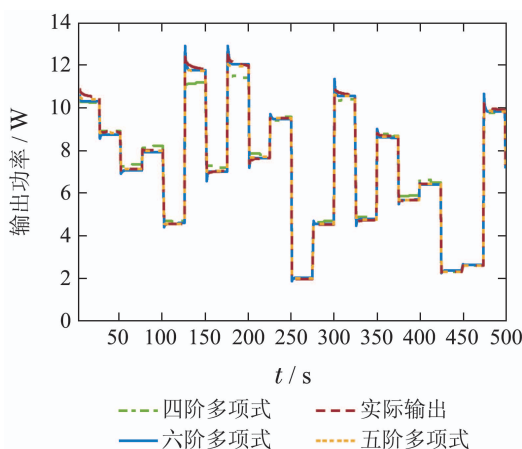


图5 不同多项式阶次辨识输出功率结果

Fig. 5 Output power identification results of different polynomial order

从图4-5可以看出, 采用六阶多项式的模型辨识结

果与实际模型输出平均误差最小. 因此, 本文采用六阶多项式基函数做PEMFC分数阶Hammerstein模型的非线性静态环节.

分数阶系统阶次通常在0~2范围内选取, 即  $0 < \gamma < 2$ . 本文采用模糊遗传算法对进行寻优, 当时, 目标函数取得最小值, 即系统辨识误差最小.

PEMFC分数阶Hammerstein模型的辨识结果如下:

$$\begin{cases} D^{0.92}x(t) = Ax(t) + Bu^*(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du^*(t), \end{cases} \quad (28)$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0200 & -0.2743 & -0.2362 \\ -0.0662 & -0.1590 & -0.2694 \\ -0.3491 & -0.1085 & -0.0146 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.2954 & -0.1963 & 0.2772 \\ 0.2545 & 0.3424 & -0.4172 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.4893 & 0.9922 \\ -0.1215 & -0.2464 \\ 0.1982 & 0.4015 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -0.1380 & -0.2796 \\ 0.0486 & 0.0985 \end{bmatrix},$$

$$u^*(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -1.2729 \times 10^2 & -5.2372 \times 10^3 \\ -4.7491 & -38.9102 \end{bmatrix} u^2(t) + \begin{bmatrix} 7.6045 \times 10^4 & 78.045 \\ 1.9584 \times 10^2 & 1.3977 \end{bmatrix} u^3(t) + \begin{bmatrix} 4.6370 \times 10^4 & 2.0839 \times 10^2 \\ 8.3714 \times 10^2 & 3.7725 \end{bmatrix} u^4(t) + \begin{bmatrix} 1.4402 \times 10^5 & 39.0438 \\ 2.6000 \times 10^3 & 0.7455 \end{bmatrix} u^5(t) + \begin{bmatrix} 2.5168 \times 10^4 & -1.2289 \times 10^3 \\ 4.5456 \times 10^2 & -22.1554 \end{bmatrix} u^6(t).$$

#### 4.2 模型验证

PEMFC分数阶Hammerstein模型辨识结果如图6-7所示, 可以看出基于短时记忆法的辨识模型与未加入短时记忆法的辨识模型得到的PEMFC输出电压、功率的大小和变化趋势一致, 建模精度都能够满足要求. 图8-9为输出变量绝对误差曲线图, 从图中可以看出, 加入短时记忆法后建模误差小于8.74%, 辨识模型输出与实测输出值已基本吻合, 能够准确描述PEMFC的输出特性.

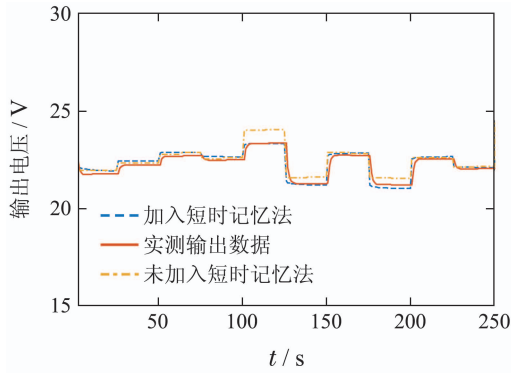


图6 辨识输出电压

Fig. 6 Identification of output voltage

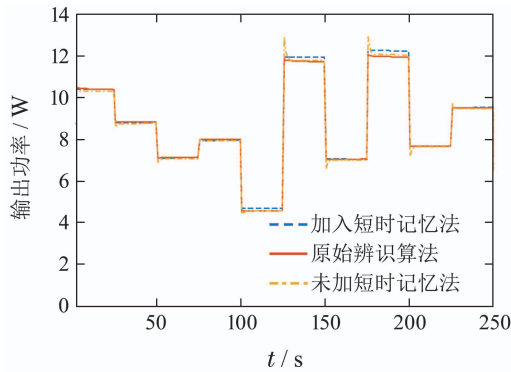


图7 辨识输出功率

Fig. 7 Identification of output power

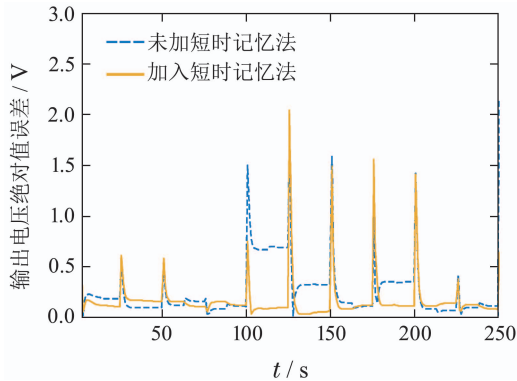


图8 输出电压误差绝对值

Fig. 8 Absolute value of output voltage error

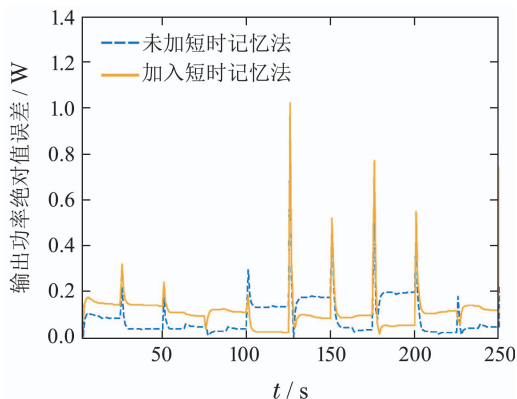


图9 输出功率误差绝对值

Fig. 9 Absolute value of output power error

当辨识数据组数分别取500, 750, 1000, 1250, 1500, 1750时, 采用短时记忆法前后模型辨识时间如表2所示. 从表中可以看出, 数据为500组时, 采用短时记忆法的计算时间是采用前的三分之一. 当数据量达到1750组时, 算法时间减小到四分之一. 本文提出的改进方法可以将算法的计算时间缩短3倍以上, 大大提高了辨识算法的计算效率.

表2 采用短时记忆法前后的辨识时间对比

Table 2 Comparison of recognition time before and after using short-term memory method

短时记忆法	数据组数					
	500	750	1000	1250	1500	1750
采用前/s	5.03	5.98	7.42	8.43	9.85	10.44
采用后/s	15.35	19.91	25.78	30.24	35.44	40.24

## 5 总结

为了更好地描述PEMFC系统的分数阶、多变量和非线性特性, 本文建立了PEMFC的分数阶Hammerstein模型. 为了降低建模复杂度, 采用典型相关性分析和相关性分析选取建模输入变量. 引入Possion矩函数对输入输出数据滤波以满足数据各阶分数阶可导的要求, 并采用短时记忆法减少辨识计算量. 仿真结果表明, 本文提出的分数阶Hammerstein模型辨识算不仅避免了PEMFC复杂的内部机理分析, 而且可以准确描述电堆的输出特性, 同时大大缩短了辨识时间, 为后续控制器的设计提供了准确实用的控制模型.

## 参考文献:

- [1] CAO H IL, DENG Z H, LI X, et al. Dynamic modeling of electrical characteristics of solid oxide fuel cells using fractional derivatives. *International Journal of Hydrogen Energy*, 2010, 35(4): 1749 – 1758.
- [2] MIASSA A, OLIVIER B, EIMMANUEL G. Identification of a PEMFC fractional order model. *International Journal of Hydrogen Energy*, 2016, 42(2): 1499 – 1509.
- [3] BIAN Huijuan. *Dynamic model of PEMFC output voltage and fuzzy fractional order PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> control*. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2016.  
(卞慧娟. PEMFC输出电压动态建模与模糊分数阶PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup>控制. 南京: 南京理工大学, 2016.)
- [4] ZHANG Ming. *PEMFC system based on fractional control system*. Beijing: Beijing University of Chemical Technology, 2012.  
(张明. 基于分数阶微积分的PEMFC建模与辨识. 北京: 北京化工大学, 2012.)
- [5] HERNEZ A, HISSEL D, OUTBIB R. Non-linear state space modelling of a PEMFC. *Fuel Cells*, 2010, 6(1): 38 – 46.
- [6] RAMOS R, JAIRO C, ESPINOSA. Non-linear state space model and control strategy for pem fuel cell systems. *Dyna*, 2011, 78(166): 60 – 67.
- [7] XU Xiayin. Subspace model of PEMFC temperature. *Industrial Computer*, 2015, 28(9): 77 – 78.  
(徐夏吟. 质子交换膜燃料电池温度子空间辨识模型. 工业控制计算机, 2015, 28(9): 77 – 78.)



- [8] LENG Boyang. *Research on PEMFC fractional order state space modeling and PID-DMC control*. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2016.  
(冷博阳. PEMFC分数阶状态空间建模与PID-DMC控制研究. 南京: 南京理工大学, 2016.)
- [9] HU C. *Research on PEMFC fractional order state space modeling and adaptive control*. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2017.
- [10] L C X, ZHU X J, CAO G Y. Identification of the Hammerstein model of a PEMFC stack based on least squares support vector machines. *Journal of Power Sources*, 2008, 175(1): 303 – 316.
- [11] THOMASSIN M, MALTI R. Subspace method for continuous-time fractional system identification. *System Identification*, 2009, 42(10): 880 – 885.
- [12] LIAO Zeng, PENG Cheng, WANG Yong. Subspace identification in time-domain for fractional order systems based on short memory principle. *Journal of Applied Science*, 2011, 29(2): 209 – 215.  
(廖增, 彭程, 王永. 基于短记忆原理的分数阶系统时域子空间辨识. 应用科学学报, 2011, 29(2): 209 – 215.)
- [13] HE X Q. *Multivariate Statistical Analysis*. Beijing: Renmin University of China press, 2004.
- [14] SONG Heda, ZHOU Ping, WANG Hong. Nonlinear subspace modeling of multivariate molten iron quality in blast furnace ironmaking and its application. *Journal of Automation*, 2016, 42(11): 1664 – 1679.  
(宋贺达, 周平, 王宏. 高炉炼铁过程多元铁水质量非线性子空间建模及应用. 自动化学报, 2016, 42(11): 1664 – 1679.)
- [15] JIN Qibing, LIU Xiaolei. A new subspace identification algorithm using principle component analysis. *Computer Simulation*, 2016, 42(11): 1664 – 1679.  
(靳其兵, 刘晓雷. 基于主元分析的子空间辨识算法. 计算机仿真, 2007, 24(3): 101 – 103.)
- [16] GOMEX J, BAEYENS E. Subspace identification of multivariable Hammerstein and wiener model. *Journal of Automation*, 2002, 35(1): 55 – 60.
- [17] QI Zhidong, ZHU Xinjian. Temperature modeling and control of DMFC based on FGA-ANFIS technology. *Control Theory & Application*, 2008, 25(4): 738 – 742.  
(戚志东, 朱新坚. 基于一种FGA - ANFIS技术的DMFC温度建模和控制. 控制理论与应用, 2008, 25(4): 738 – 742.)
- [18] DUAN Ping, ZHANG Jianchang, DING Chengjun. The fuzzy genetic algorithm for the mobile robot's wall tracking control. *Control Theory & Application*, 2016, 42(11): 1664 – 1679.  
(段萍, 张建畅, 丁承君. 基于模糊遗传算法的移动机器人墙跟踪控制策略. 控制理论与应用, 2006, 23(3): 416 – 420.)

### 作者简介:

**戚志东** 副教授, 博士, 主要研究方向为新能源发电技术研究,  
E-mail: qizhidong@sina.com;

**何永康** 硕士研究生, 主要研究方向为质子交换膜燃料电池 (PEMFC) 分数阶建模与控制研究, E-mail: 2237417466@qq.com;

**戈卫平** 硕士研究生, 主要研究方向为质子交换膜燃料电池 (PEMFC) 分数阶建模与控制研究, E-mail: 1326718282@qq.com;

**孙琦** 硕士研究生, 主要研究方向为质子交换膜燃料电池 (PEMFC) 分数阶建模与控制研究, E-mail: sunqint@163.com.