

基于改进分段 Gauss 伪谱法的带推力高超声速 飞行器再入轨迹规划

蔺 君[†], 何英姿, 黄盘兴

(北京控制工程研究所, 北京 100190; 空间智能控制技术重点实验室, 北京 100190)

摘要: 再入轨迹规划是高超声速飞行器领域的热点问题, 已吸引了众多国内外专家的关注. Gauss 伪谱法以及分段 Gauss 伪谱法是解决含有多约束轨迹规划问题的一类有效工具. 然而, 发动机多次点火熄火导致推力不连续以及点火时刻控制输入的连续性要求是带推力高超声速飞行器再入轨迹优化面临的新挑战. 本文将问题简化为多脉冲再入轨迹规划问题, 基于改进分段 Gauss 伪谱法生成满足多条件约束的最优再入轨迹. 通过设置分段 Gauss 伪谱法连续性条件, 确保飞行器状态与控制输入在分段点处连续衔接. 通过无动力自由再入与带推力再入算例对改进分段 Gauss 伪谱法进行说明, 仿真结果也表明, 改进分段 Gauss 伪谱法可有效求解带推力高超声速飞行器再入轨迹规划.

关键词: 高超声速飞行器; 再入轨迹优化; 分段 Gauss 伪谱法; 多脉冲轨迹规划; 推力

引用格式: 蔺君, 何英姿, 黄盘兴. 基于改进分段 Gauss 伪谱法的带推力高超声速飞行器再入轨迹规划. 控制理论与应用, 2019, 36(10): 1662 – 1671

DOI: 10.7641/CTA.2019.80678

Powered hypersonic vehicle reentry trajectory optimization based on improved multi-phase Gauss spectral method

LIN Jun[†], HE Ying-zi, HUANG Pan-xing

(Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100190, China;
Science and Technology on Space Intelligent Control Laboratory, Beijing 100190, China)

Abstract: Reentry trajectory optimization is a hot topic of hypersonic vehicle, and has gained more and more attentions of the expert. Gauss pseudospectral method (GPM) and multi-phase Gauss pseudospectral method (MGPM) have been demonstrated as effective tools to solve the trajectory optimization with multi-constraints. However, thrust discontinuity caused by multiple ignition on and off and the requirement of control input continuity at ignition time are new challenges to powered hypersonic vehicle reentry trajectory optimization. In this paper, the problem is simplified to a multi-impulse reentry trajectory optimization problem, and a multi-condition constraint reentry trajectory is generated based on improved multi-phase Gauss pseudospectral method. The continuity conditions of MGPM are set to ensure the continuous connection of the states and control between each pair of phases. Numerical examples for reentry trajectory optimization in free flight and powered are used to demonstrate the proposed technique. Simulation results also show the feasible application of improved MGPM in powered reentry trajectory optimization.

Key words: hypersonic vehicles; reentry trajectory optimization; multi-phase Gauss pseudospectral method; multi-impulse trajectory optimization; thrust

Citation: LIN Jun, HE Yingzi, HUANG Panxing. Powered hypersonic vehicle reentry trajectory optimization based on improved multi-phase Gauss spectral method. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(10): 1662 – 1671

1 引言

高超声速飞行器再入过程是一个复杂的控制、制导、规划问题. 高超声速飞行器再入轨迹规划求解的基本思想可分为直接法和间接法. 直接法通过将连续

的最优控制问题离散化、参数化, 转化为参数优化问题, 最终利用优化算法对性能指标直接寻优, 获得最优解. 间接法则基于庞特里亚金极值原理和变分法将最优控制变量表示成状态变量和协态变量的函数, 将

收稿日期: 2018-09-09; 录用日期: 2019-03-13.

[†]通信作者. E-mail: linjbuaa@outlook.com; Tel.: +86 10-68744801-805.

本文责任编辑: 段志生.

国家自然科学基金项目(61873029)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61873029).

最优轨迹优化问题转化为哈密顿边值问题, 通过求解该边值问题, 获得相应的最优控制变量和最优轨迹。

间接法求解最优轨迹问题时, 推导协态方程与横截条件等过程较为复杂和繁琐, 对初值估计精度要求较高, 由于高超声速飞行器模型的非线性及再入过程的各种约束, 使间接法求解的过程更为复杂^[1]。此外, 由于协态量的物理意义不明确也加大了初值估计的难度, 限制了间接法的应用和发展。直接法根据对状态变量和控制变量参数化方法, 可以分为仅离散控制变量的方法和同时离散状态变量和控制状态变量的方法。仅离散控制变量的方法容易陷入局部解, 甚至收敛到不可行解。仅离散状态变量的方法, 需先将控制量转化为状态量, 而后对状态量进行离散化处理。该方法需要抵消控制量, 对于较为复杂的系统, 在转化上存在难度, 导致该方法很难推广, 鲜有应用。同时离散状态变量和控制状态变量, 又称为直接配点法。直接配点法采用多项式拟合状态变量随离散时间节点的变化, 通过配点, 使得多项式的导数在一定精度下与运动方程右函数表示的状态微分匹配, 将微分方程约束转化为代数等式约束, 提高计算效率。

Gauss 伪谱法是一种基于全局插值多项式的直接配点法, 由 Benson 在 2005 年提出。Gauss 伪谱法将未知的状态和控制时间历程在一系列高斯点上离散化, 而后用这些离散的状态与控制分别构造 Lagrange 插值多项式去逼近真实的状态与控制, 再通过状态量求导来代替动力学微分方程, 将连续系统最优控制问题转化为受一系列代数约束的参数优化问题。Gauss 伪谱法可保证转化得到的非线性规划问题的 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件与原最优控制问题一阶最优必要条件的离散形式具有一致性, 使 Gauss 伪谱法的解满足间接法的一阶最优必要条件^[2]。Huntington 提出修正高斯伪谱方法, 有效解决 Gauss 伪谱法在含有路径约束和动态微分约束时的求解问题, 同时给出了在边界处的控制输入的求解新方法^[3]。

高斯伪谱法相对其他直接法的主要区别是以插值代替积分, 利用离散点的设置, 构造出极为稀疏的约束雅克比矩阵, 对于数值优化算法的求解极为有利, 能够以较少的离散点、较高的速度、较高的精度得到优化问题的解。

Fahroo 和 Ross 分析了 3 种伪谱法 Legendre-Gauss (LG), Legendre-Gauss-Radau (LGR), Legendre-Gauss-Lobatto (LGL) 选取高斯节点及处理边界条件时的区别, 给出了选取伪谱法的一般方法^[4]。基于高斯伪谱法的轨迹优化在如货运飞船和制品返回舱返回轨道设计^[5]、火星大气进入轨迹优化^[6]、系绳式合成孔径雷达干涉测量 (interferometric synthetic aperture radar, InSAR) 系统快速展开最优路径设计^[7]、火箭上升段的轨迹优化^[8-9]、月球定点着陆轨道优化^[10]、高超再入轨迹优化^[11]、带有禁飞区^[12-13]、航路点约束^[14]、总

吸热量约束^[15]的高超声速再入轨迹优化等方面均得到了有效的应用。

然而, 针对高超声速飞行器再入轨迹优化这一问题, 现阶段的研究均是针对无动力再入展开, 再入过程飞行器机动能力有限。为了提高再入过程多次变轨能力, 发展带推力高超声速飞行器, 可在再入过程中进行多次点火熄火。而当前的再入轨迹优化问题研究均未考虑带推力高超声速飞行器再入过程中多次点火这一需求。本文针对这一需求, 展开带推力高超声速飞行器再入轨迹优化研究。

带推力高超声速飞行器, 较无动力飞行器再入过程除了存在路径约束、动压、热流、过载等约束外, 发动机推力作用时刻, 推力作用时长, 均是额外考虑的约束因素和优化参数。这导致再入轨迹优化问题更为复杂, 主要体现在: 1) 高超声速飞行器多次点火熄火, 带来的推力不连续问题; 2) 发动机点火熄火时刻, 保证控制变量连续性问题。分段高斯伪谱法通过分段节点处的状态连接和控制输入连接条件, 可保证系统具有较好的连续性, 从而使得带推力高超声速飞行器再入轨迹平滑, 控制输入连续。

2 再入轨迹规划描述

高超声速飞行器再入推力由火箭发动机或冲压式发动机提供, 为了便于描述, 给出如下假设:

假设 1 发动机点火过程中, 可控制点火次数最大为 N , 每次点火的点火时刻记为 $t_p (p = 1, 2, \dots, N)$, 点火推进时长记为 $\kappa_p (p = 1, 2, \dots, N)$ 。

假设 2 火箭发动机或冲压发动机的推力沿飞行器的纵轴。

由假设 1, 可以将飞行器再入起始时间至终端分为 $2N + 1$ 个区间段, 满足

$$t_0 < t_1 < t_1 + \kappa_1 < t_2 < t_2 + \kappa_2 < \dots < t_{N-1} < t_{N-1} + \kappa_{N-1} < t_N < t_N + \kappa_N < t_f = t_{N+1},$$

其中: t_0 为再入起始时间, t_f 为终端时间。

在发动机点火与熄火状态, 再入飞行器动力学模型具有较大的区别, 在系统中加入发动机点火、熄火控制模型 $u(t)$, 为图 1 所示形式的分段函数。

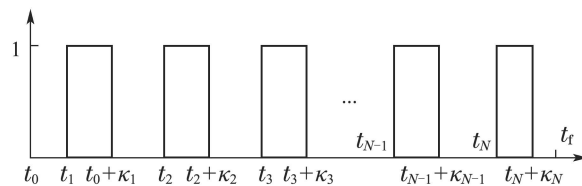


图 1 发动机点火、熄火控制模型

Fig. 1 Thrust ignition on-off model

则, 发动机推力可以表示为 $T = -\dot{m}_f I_{sp} g_0 u(t)$, 其中: \dot{m}_f 为推进剂消耗量, I_{sp} 为推进剂比冲, \dot{m}_f 由发动

机特性决定。

2.1 带推力再入运动模型

忽略地球自转角速度, 可将带推力高超声速飞行器运动学方程写为^[16]

$$\begin{cases} \dot{r} = V \sin \gamma, \\ \dot{\theta} = \frac{V \cos \gamma \sin \psi}{r \cos \phi}, \\ \dot{\phi} = \frac{V \cos \gamma \cos \psi}{r}, \\ \dot{V} = \frac{T \cos \alpha - D}{m} - g \sin \gamma, \\ \dot{\gamma} = \frac{T \sin \alpha + L}{mV} \cos \sigma + \frac{V \cos \gamma}{r} - \frac{g \cos \gamma}{V}, \\ \dot{\psi} = \frac{T \sin \alpha + L}{mV \cos \gamma} \sin \sigma + \frac{V}{r} \cos \gamma \sin \psi \tan \phi, \end{cases} \quad (1)$$

其中: r 为地心距; θ 为经度; ϕ 为纬度; V 为飞行速度; γ 为航迹倾角; ψ 为航迹方位角; T 为发动机推力; α 为攻角; σ 为倾侧角; L 和 D 分别为升力和阻力:

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 C_D S_{\text{ref}}, \quad L = \frac{1}{2} \rho V^2 C_L S_{\text{ref}},$$

其中: S_{ref} 为参考面积, 升力系数 C_L 、阻力系数 C_D 通过气动数据查表获得, 大气密度 ρ 可通过国际标准大气表查表得到。

2.2 再入过程约束

飞行器再入过程中, 需要考虑强约束条件, 包括动压、过载和热流密度约束。

$$\begin{cases} \text{动压: } Q = \frac{1}{2} \rho V^2 \leq Q_{\text{max}}, \\ \text{过载: } n = \frac{\sqrt{L^2 + D^2}}{mg} \leq n_{\text{max}}, \\ \text{热流: } \dot{q} = K_n \sqrt{\rho} V^{3.15} \leq \dot{q}_{\text{max}}, \end{cases}$$

其中 $K_n = \frac{C}{\sqrt{R_n \rho_0} V_0^{3.15}}$ 。

根据其任务不同, 高超声速飞行器再入终端约束, 可分为

$$\begin{cases} \text{定点约束: } \theta(t_f) = \theta_f, \phi(t_f) = \phi_f, r(t_f) = r_f, \\ \text{打击约束: } \theta(t_f) = \theta_f, \phi(t_f) = \phi_f, r(t_f) = r_f, \\ \psi(t_f) = \psi_f, \alpha(t_f) = \alpha_f. \end{cases}$$

在高超声速再入过程中, 还应考虑控制变量的约束, 包括控制输入的取值范围, 控制输入的变化速率, 即

$$\begin{aligned} |\alpha| &\leq \alpha_{\text{max}}, & |\dot{\alpha}| &\leq \dot{\alpha}_{\text{max}}, \\ |\sigma| &\leq \sigma_{\text{max}}, & |\dot{\sigma}| &\leq \dot{\sigma}_{\text{max}}. \end{aligned}$$

带推力高超声速飞行器再入轨迹规划还应满足发动机总的工作时间应小于其允许的最大工作时间, 即

$$\sum_{i=1}^N \kappa_i \leq t_z,$$

其中 t_z 由发动机比冲及推进剂总量决定。

3 再入轨迹规划方法

带推力高超声速飞行器再入过程中, 由于发动机的多次点火、熄火, 产生不连续推力, 这使得飞行器在点火后一段时间会产生速度增量, 使得飞行器再入过程的动压、热流和过载约束更为突出。

首先给出基于Gauss伪谱法的数值轨迹优化算法, 而后, 通过将问题转化为多脉冲再入轨迹优化问题, 设计多段Gauss伪谱法及连接条件约束生成满足多种约束的最优再入轨迹。

3.1 高斯伪谱法

考虑一般性的非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad t \in [t_0, t_f] \quad (2)$$

满足边界条件

$$\mathcal{Y}(\mathbf{x}(t_0), t_0, \mathbf{x}(t_f), t_f) = 0 \quad (3)$$

和路径约束

$$\Gamma(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \leq 0. \quad (4)$$

对一般性的Bolza型最优控制性能指标

$$J = \Phi(\mathbf{x}(t_0), t_0, \mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt, \quad (5)$$

寻找最优控制变量 $\mathbf{u}(t)$, 使之最小。

对时间变量 t 做变换, 取

$$\tau = \frac{2t}{t_f - t_0} - \frac{t_f + t_0}{t_f - t_0},$$

进行时间归一化。此时, 系统(2)为

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau), \quad \tau \in [-1, 1]. \quad (6)$$

边界条件(3)为

$$\mathcal{Y}(\mathbf{x}(-1), t_0, \mathbf{x}(1), t_f) = 0. \quad (7)$$

路径约束(4)为

$$\Gamma(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) \leq 0. \quad (8)$$

优化性能指标(5)为

$$J = \Phi(\mathbf{x}(-1), t_0, \mathbf{x}(1), t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \int_{-1}^1 g(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau. \quad (9)$$

Gauss伪谱法选取 N 阶Legendre-Gauss点, 并以 $\tau_0 = -1$ 为节点, 构成 $N+1$ 个Lagrange插值多项式, 并以此为基础函数构造状态变量的近似表达式, 即

$$\mathbf{x}(\tau) \approx \mathbf{X}(\tau) = \sum_{i=0}^N L_i(\tau) \mathbf{X}(\tau_i), \quad (10)$$

其中Lagrange插值基函数

$$L_i(\tau) = \prod_{j=0, j \neq i}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}.$$

对式(10)在LG点求微分

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(\tau_k) &\approx \dot{\mathbf{X}}(\tau_k) = \\ \sum_{i=0}^N \dot{L}_i(\tau_k) \mathbf{X}(\tau_i) &= \sum_{i=0}^N \mathbf{D}_{ki} \mathbf{X}(\tau_i), \end{aligned} \quad (11)$$

其中: $\mathbf{D}_{ki} \in \mathbb{R}^{N \times (N+1)}$ 为微分矩阵,

$$\mathbf{D}_{ki} = \begin{cases} \frac{(1 + \tau_k) \dot{P}_N(\tau_k) + P_N(\tau_k)}{(\tau_k - \tau_i)[(1 + \tau_i) \dot{P}_N(\tau_i) + P_N(\tau_i)]}, & i \neq k, \\ \frac{(1 + \tau_k) \ddot{P}_N(\tau_i) + 2\dot{P}_N(\tau_i)}{2[(1 + \tau_i) \dot{P}_N(\tau_i) + P_N(\tau_i)]}, & i = k. \end{cases}$$

$P_N(\tau)$ 为 N 阶 Legendre 多项式, 定义为

$$\begin{cases} P_0 \equiv 1, \\ P_N(\tau) = \frac{1}{2^N N!} \frac{d^N}{d\tau^N} (\tau^2 - 1)^N, \end{cases} \quad \tau \in [-1, 1].$$

Legendre 多项式具有递推关系

$$P_N(\tau) = \frac{2N - 1}{N} \tau P_{N-1}(\tau) - \frac{N - 1}{N} P_{N-2}(\tau).$$

记 $\dot{P}_N(\tau)$, $\ddot{P}_N(\tau)$ 为 Legendre 多项式 $P_N(\tau)$ 的一阶导数和二阶导数, 则有

$$\begin{cases} \dot{P}_N(\tau) = \frac{NP_{N-1}(\tau) - N\tau P_N(\tau)}{1 - \tau^2}, \\ \ddot{P}_N(\tau) = \frac{2\tau \dot{P}_N(\tau) - N(N + 1)}{1 - \tau^2}. \end{cases}$$

从而, \mathbf{D}_{ki} 可通过 Legendre 多项式递推关系及其导数计算公式进行迭代计算, 避免高阶符号运算带来的巨大计算量及计算耗时, 提高计算效率.

系统方程(6)在选取的 Gauss 节点可改写为代数约束形式, 即

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^N \mathbf{D}_{ki} \mathbf{X}(\tau_i) = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{f}(\mathbf{X}(\tau_k), \mathbf{U}(\tau_k); t_0, t_f), \\ k = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (12)$$

系统状态方程(10)在终端时刻则转化为代数约束, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\tau_f) &= \\ \mathbf{X}(\tau_0) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{f}(\mathbf{X}(\tau_k), \mathbf{U}(\tau_k); t_0, t_f). \end{aligned} \quad (13)$$

优化性能指标(目标函数)(9)可由 Gauss 积分公式近似为

$$\begin{aligned} J &= \Phi(\mathbf{X}(\tau_0), t_0, \mathbf{X}(\tau_f), t_f) + \\ &\frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N \omega_k g(\mathbf{X}(\tau_k), \mathbf{U}(\tau_k), \tau_k; t_0, t_f). \end{aligned} \quad (14)$$

类似地, 边界条件(7)在 LG 点离散化后, 近似为

$$\Upsilon(\mathbf{X}(\tau_0), t_0, \mathbf{X}(\tau_f), t_f) = 0, \quad (15)$$

路径约束(8)为

$$\begin{cases} \Gamma(\mathbf{X}(\tau_k), \mathbf{U}(\tau_k), \tau_k; t_0, t_f) \leq 0, \\ k = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (16)$$

最终, 连续 Bolza 问题(6)–(9)的解, 可通过求解含有目标函数(14)、动态过程约束(12)、终端时刻附加约束(13)、边界约束(15)及路径约束(16)的非线性规划来确定.

3.2 分段高斯伪谱法

带推力高超声速飞行器再入过程严重依赖发动机推力开关机时间, 再入段被分割成多个阶段的不连续最优控制问题, 在优化过程中需要考虑分段点处系统状态和控制输入的连接问题.

忽略发动机动态特性, 并假设发动机产生的推力及比冲恒定, 可知推进时间(或推进剂消耗量)决定速度增量. 在推进阶段 $[t_p, t_p + \kappa_p]$ 期间, 消耗的推进剂总量为 $\dot{m}_t \kappa_p$, 由齐奥尔可夫斯基公式, 在 t_p 时刻增加的速度为

$$\Delta V_p = V_e \ln\left(\frac{m_p}{m_p - \dot{m}_t \kappa_p}\right),$$

其中: $0 \leq \Delta V_p \leq \Delta V_{\max}$, ΔV_{\max} 由推进剂总量决定, 且满足

$$m_p \geq m_{p+1}, \text{ 当且仅当 } \Delta V_p = 0 \text{ 时, } m_p = m_{p+1}.$$

通过如上简化, 对再入过程中推进时长的优化, 转变为对时间节点处速度增量的优化, 使得带推力高超声速飞行器再入轨迹优化问题转化为多脉冲轨迹规划问题.

定义结点为脉冲施加的时刻, 带推力高超飞行器再入过程发动机点火 N 次, 高斯伪谱再入轨迹优化则被分为了 $N + 1$ 段. 假设每段结点数均为 K , 分段 Gauss 伪谱总的配点数为 $(N + 1) \times (K + 1) + 1$. 假设动力学系统的维度为 n , 系统控制输入维度为 q , 总的优化变量为 $((N + 1) \times (K + 1) + 1) \times (n + q)$.

在区间 $[t_p, t_{p+1}]$ 上进行归一化,

$$\tau_p = \frac{2t}{t_{p+1} - t_p} - \frac{t_{p+1} + t_p}{t_{p+1} - t_p},$$

则在此区间上的性能指标为

$$\begin{aligned} J^{(p)} &= \Phi^{(p)}(\mathbf{X}_0^{(p)}, t_0^{(p)}, \mathbf{X}_f^{(p)}, t_f^{(p)}) + \frac{t_f^{(p)} - t_0^{(p)}}{2} \times \\ &\sum_{k=1}^{N_k} \omega_k^{(p)} g^{(p)}(\mathbf{X}_k^{(p)}, \mathbf{U}_k^{(p)}, \tau_k^{(p)}; t_0^{(p)}, t_f^{(p)}), \end{aligned} \quad (17)$$

从而, 总的性能指标为

$$J = \sum_{p=1}^{N+1} J^{(p)}. \quad (18)$$

在各个时间区间, 路径约束和边界约束则为

$$\Gamma^{(p)}(\mathbf{X}_k^{(p)}, \mathbf{U}_k^{(p)}, \tau_k^{(p)}; t_0^{(p)}, t_f^{(p)}) \leq 0, \quad (19)$$

$$\Upsilon^{(p)}(\mathbf{X}_0^{(p)}, t_0^{(p)}, \mathbf{X}_f^{(p)}, t_f^{(p)}) = 0, \quad (20)$$

$$k = 1, 2, \dots, K; p = 1, 2, \dots, N + 1,$$

其中:

$$\mathbf{X}_k^{(p)} \equiv \mathbf{X}^{(p)}(\tau_k^{(p)}), \mathbf{U}_k^{(p)} \equiv \mathbf{U}^{(p)}(\tau_k^{(p)}).$$

系统动力学方程在离散Gauss点转化为多段代数约束:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^K \mathbf{D}_{ki}^{(p)} \mathbf{X}_i^{(p)} - \\ \frac{t_f^{(p)} - t_0^{(p)}}{2} \mathbf{f}(\mathbf{X}_k^{(p)}, \mathbf{U}_k^{(p)}, \tau_k^{(p)}; \tau_0^{(p)}, \tau_f^{(p)}) = \mathbf{0}, \\ k = 1, 2, \dots, K; p = 1, 2, \dots, N + 1. \end{cases} \quad (21)$$

在各个时间区间内, 终端状态约束为

$$\begin{cases} \mathbf{X}_f^{(p)} = \\ \mathbf{X}_0^{(p)} + \frac{t_f^{(p)} - t_0^{(p)}}{2} \times \\ \sum_{i=1}^K \omega_i^{(p)} \mathbf{f}^{(p)}(\mathbf{X}_i^{(p)}, \mathbf{U}_i^{(p)}, \tau_i^{(p)}; t_0^{(p)}, t_f^{(p)}), \\ p = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (22)$$

为保证各段界面的连续性, 系统状态和时间应满足

$$t_0^{(p+1)} = t_f^{(p)}, \mathbf{X}_0^{(p+1)} = \mathbf{X}_f^{(p)}, p = 1, \dots, N. \quad (23)$$

在各个时间结点, 速度矢量会产生一个增量. 因而, 在结点 t_p 处速度矢量和控制输入应满足连接约束

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0^{(p+1)} &= \mathbf{V}_f^{(p)} + \Delta \mathbf{V}_p, \\ \mathbf{U}_0^{(p+1)} &= \mathbf{U}_f^{(p)}, p = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (24)$$

通过如上数值离散化, 带推力高超声速飞行器再入轨迹规划简化为分段Gauss伪谱求解目标函数为式(17)–(18), 路径约束为式(19), 边界条件约束为式(20), 动态过程约束为式(21), 附加约束为式(22)及保证分段Gauss连续的约束条件(23)–(24)的最优控制问题.

4 高超飞行器再入仿真算例

本节基于CAV-H气动数据, 利用GPM及MGPM方法分别设计无动力高超声速飞行器自由飞行再入轨迹及带推力下的再入轨迹, 并根据仿真结果, 分析再入过程中推力对飞行器落点的影响.

4.1 气动数据近似计算

对于高超声速飞行器通常给出的是CFD计算或吹风得到的气动数据表, 以CAV-H为例, 飞行器的气动数据见附表A1^[17].

通常, 阻力系数 C_D 可以表示为

$$C_D = C_{D0} + C_{D1}\alpha^2 + C_{D2} \times e^{C_{D3} \cdot Ma},$$

升力系数 C_L 为

$$C_L = C_{L0} + C_{L1}\alpha + C_{L2} \times e^{C_{L3} \cdot Ma}.$$

从而, 用于高超声速飞行器近似计算的升力系数及阻力系数参数为

$$\begin{aligned} C_{L0} &= -0.2342, C_{L1} = 0.05136, \\ C_{L2} &= 0.2943, C_{L3} = -0.1007, \\ C_{D0} &= 0.02467, C_{D1} = 0.0007143, \\ C_{D2} &= 0.3252, C_{D3} = -0.279. \end{aligned}$$

将近似拟合得到的气动参数与原始气动数据进行对比, 见图2–3所示.

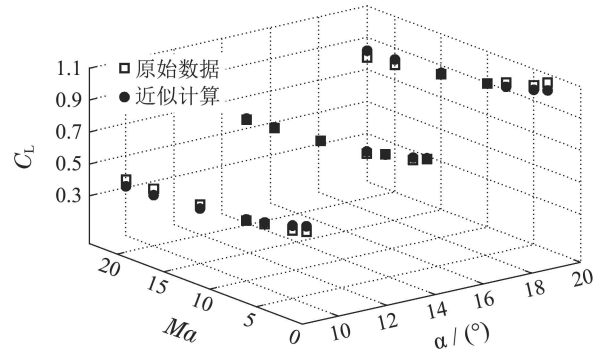


图2 升力系数近似计算

Fig. 2 Lift coefficients approximation

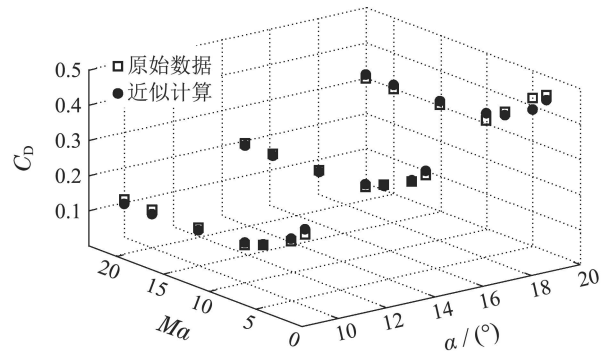


图3 阻力系数近似计算

Fig. 3 Drag coefficients approximation

由图2–3可见, 近似计算得到的升力系数曲线和阻力系数曲线与原始数据的统计偏差小于5%, 气动拟合曲线可用于高超声速再入轨迹计算.

4.2 再入走廊

设计飞行器的再入攻角剖面为

$$\alpha = \begin{cases} 20, & V > 5000, \\ 15 + 5 \sin\left(\frac{V - 4000}{2000} \pi\right), & 3000 \leq V \leq 5000, \\ 10, & V < 3000. \end{cases}$$

同时选取 $\dot{q}_{\max} = 800 \text{ kW/m}^2$, $Q_{\max} = 100 \text{ kPa}$, $n_{\max} = 4$, $K_n = 1.65 \times 10^{-8}$, 可得到飞行器 H-V 剖面再入走廊如图 4.

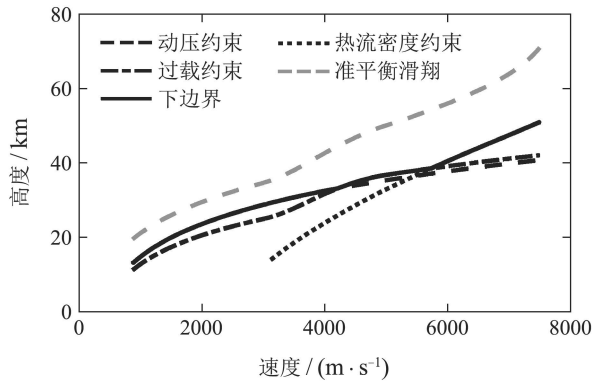


图 4 H-V剖面飞行再入走廊

Fig. 4 Flight reentry corridor in H-V profile

4.3 带推力高超声速飞行器再入轨迹优化

本文仿真算例基于 64 位 Windows 桌面操作系统, 系统配置为 I7-6700(3.4 GHz) 处理器及 16 GB 运行内存. 在 MATLAB 9.2 环境下, 利用 GPM 进行轨迹优化设计.

飞行器初始条件和终端条件如表 1 所示.

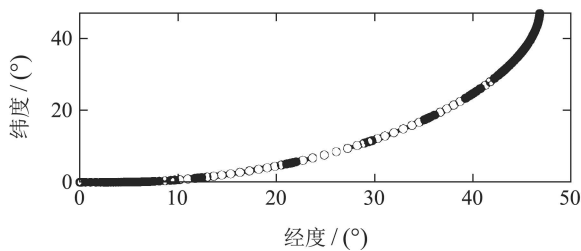
表 1 再入条件

Table 1 Reentry conditions		
状态	初始条件	终端条件
h/km	80	24
$\theta/(\text{°})$	0	—
$\phi/(\text{°})$	0	—
$V/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	6500	760
$\gamma/(\text{°})$	-3	-5
$\psi/(\text{°})$	90	0
$\alpha/(\text{°})$	18	14
$\sigma/(\text{°})$	-40	0

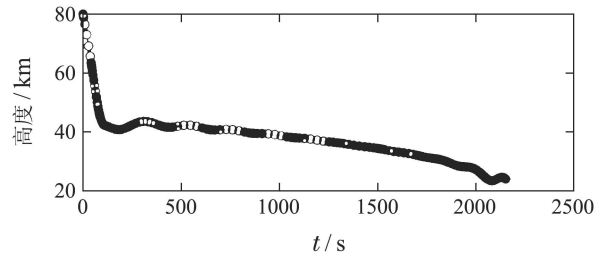
目标函数为横向跨度最大, 即 $J = \max \phi_f$.

4.3.1 无动力自由再入

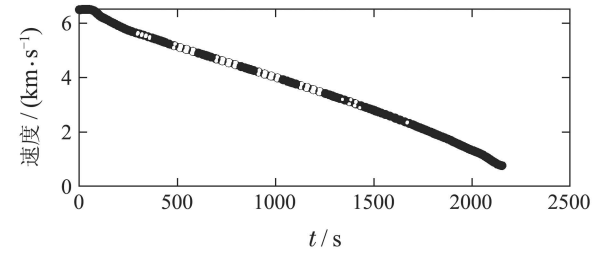
假设飞行器无动力再入, 再入轨迹如图 5 所示, 其中“o”表示 LG 节点处的取值. 仿真运行耗时约为 19 s, 飞行器总飞行时间约为 2154 s.



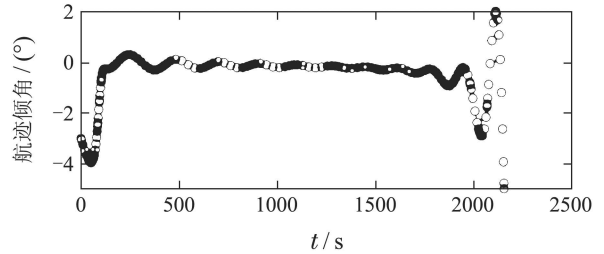
(a) 经纬



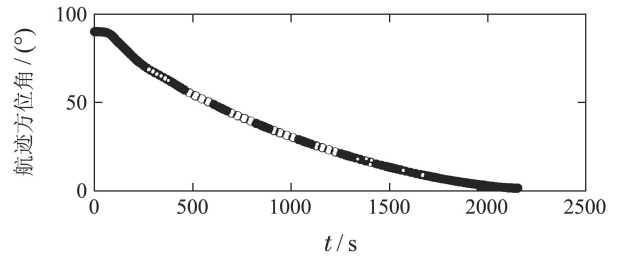
(b) 高度



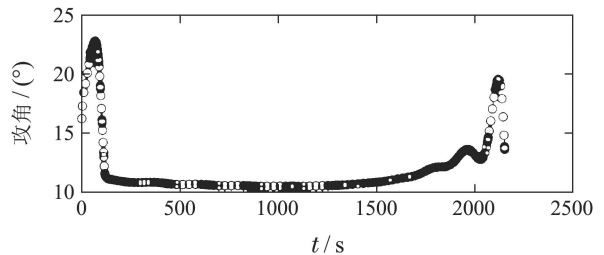
(c) 速度



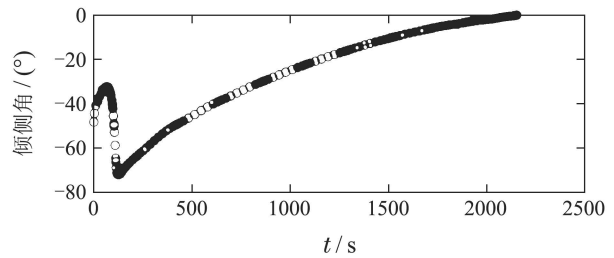
(d) 航迹倾角



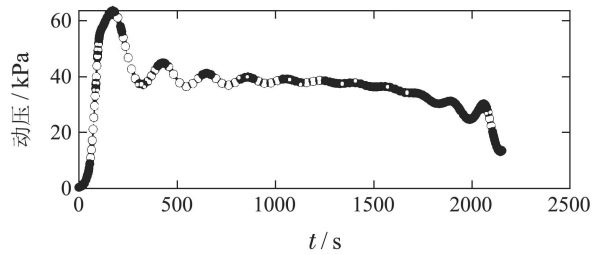
(e) 航迹方位角



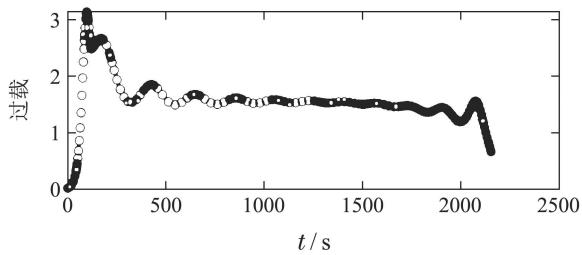
(f) 攻角



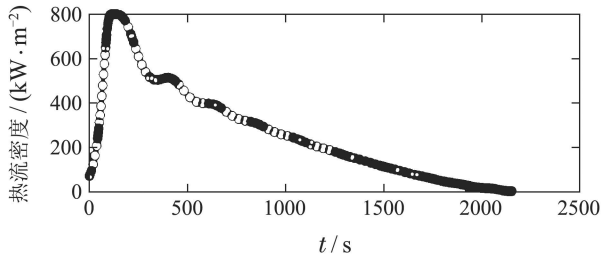
(g) 倾侧角



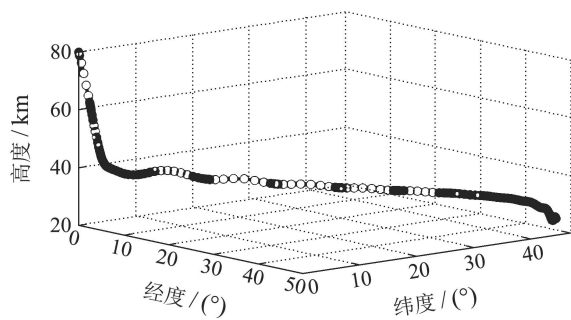
(h) 动压



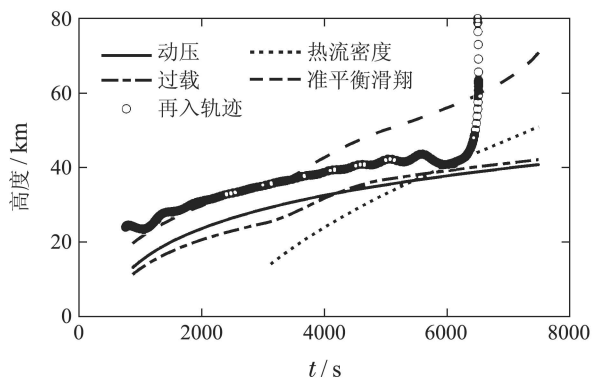
(i) 过载



(j) 热流密度



(k) 3D再入轨迹



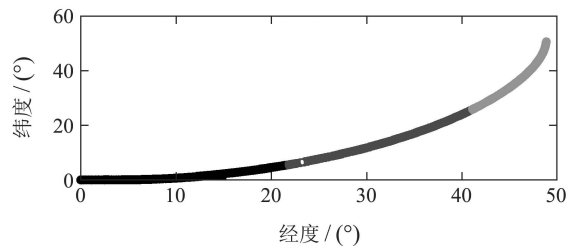
(l) 再入走廊

由地面经纬图5(a)显示,再入轨迹的最大横向跨度可达 47.0673° ,约为(5233.8 km);纵深可达 46.8328° ,约为(5207.7 km).高超声速飞行器再入轨迹的终端条件图5(b)–(e),包括高度、速度、航迹倾斜角、航迹方位角均可满足.再入攻角和倾侧角图5(f)–(g)均位于控制输入边界以内.动压、过载、热流密度图5(h)–(j)均严格小于允许的最大值.由无动力再入轨迹图5(k)–(l)可见,高超声速飞行器可在飞行走廊内实现较平滑飞行.

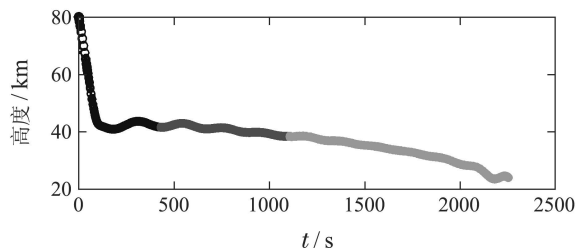
4.3.2 带推力再入轨迹优化

假设带推力高超声速飞行器再入过程中进行两次点火,产生瞬时速度增量,速度增量均为100 m/s.再入的初始状态和终端状态如表1,目标函数为横向跨度最大.

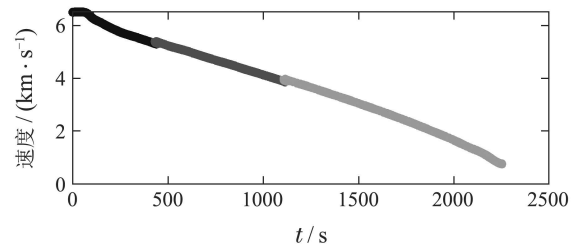
完整的再入轨迹从而被分为3段,假设在再入过程中的高度波谷位置产生推力,采用分段高斯伪谱的带推力高超声速飞行器再入轨迹如图6所示.仿真运行耗时约为14 s,飞行器总飞行时间约为2254 s.



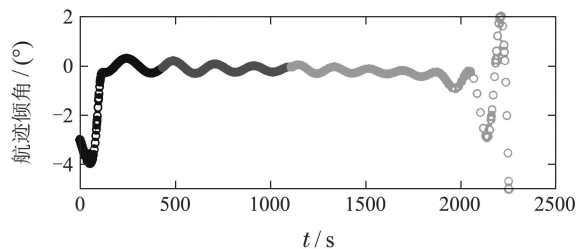
(a) 经纬



(b) 高度



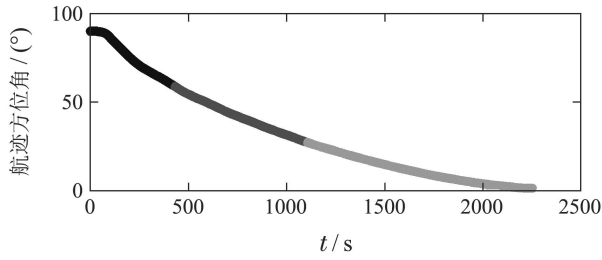
(c) 速度



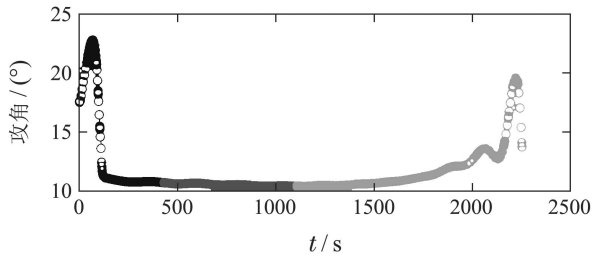
(d) 航迹倾角

图5 高斯伪谱无动力自由再入轨迹优化

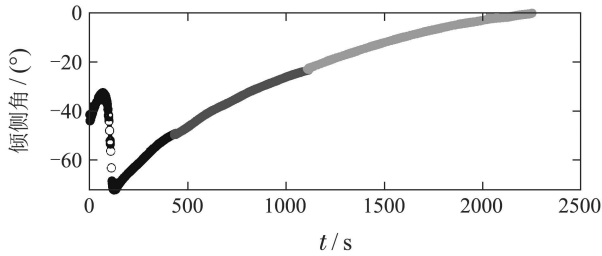
Fig. 5 Free flight reentry trajectory optimization using GPM



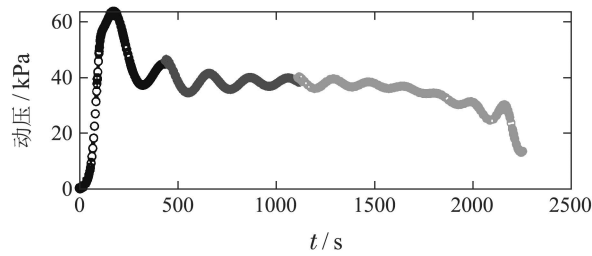
(e) 航迹方位角



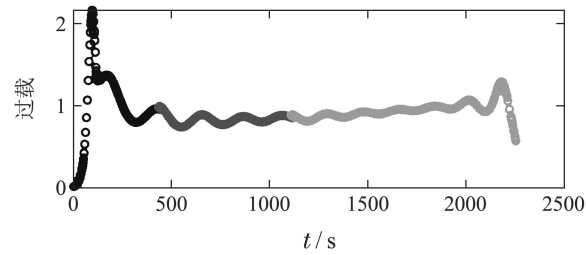
(f) 攻角



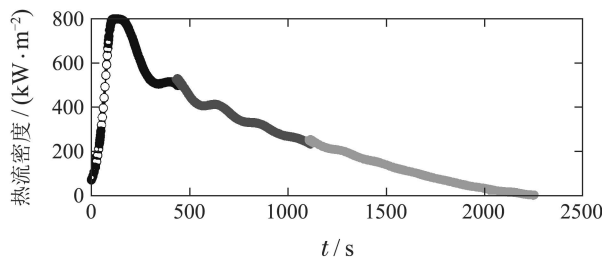
(g) 倾侧角



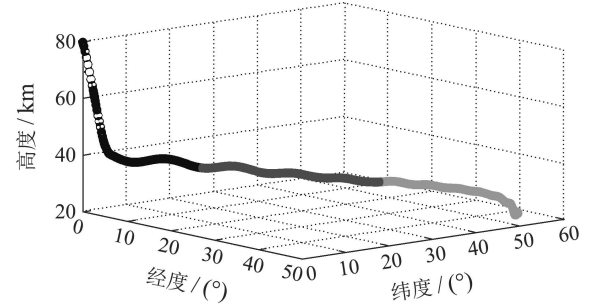
(h) 动压



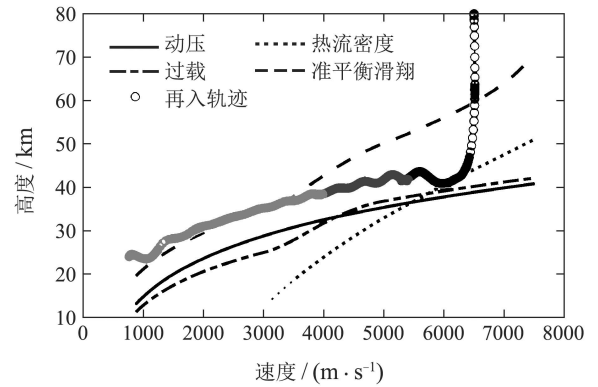
(i) 过载



(j) 热流密度



(k) 3D再入轨迹



(l) 再入走廊

图 6 分段高斯伪谱带推力再入轨迹优化
Fig. 6 Boostered reentry trajectory optimization using MGPM

由地面经纬图6(a)显示,再入轨迹的最大横向跨度可达 50.6459° ,约为 5631.7 km ;纵深可达 48.8906° ,约为 5436.6 km .高超声速飞行器再入轨迹的终端条件图6(b)–(e),包括高度、速度、航迹倾斜角、航迹方位角均可满足.再入攻角和倾侧角图6(f)–(g)均位于控制输入边界以内.在分段点处,对发动机进行两次点火,分别产生推力,使飞行器速度增加,分段高斯伪谱利用连接点约束条件,优化得到的攻角和倾侧角指令较平滑,实现系统稳定过渡.动压、过载、热流密度图6(h)–(j)均严格小于允许的最大值.由带推力再入轨迹图6(k)–(l)可见,高超声速飞行器在飞行走廊内飞行轨迹平滑.

由图7可见,带推力高超声速飞行器较无动力再入时,轨迹的最大经度增大约为 2.0579° ,纬度增大 3.5785° ,飞行距离增加约为 458.96 km .

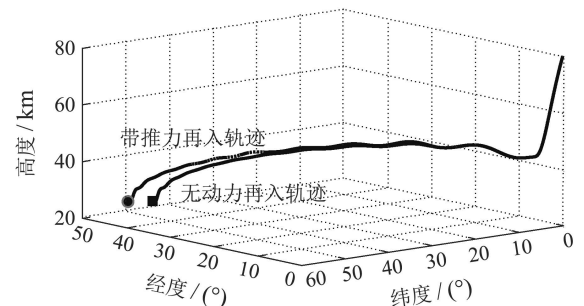


图 7 再入轨迹对比

Fig. 7 Comparison of reentry trajectories

4.3.3 关于Gauss伪谱法节点数目的讨论

Gauss伪谱法以插值代替积分的特点决定了伪谱法求解精度依赖节点数目。为了获得期望的求解精度, Gauss伪谱法选取节点数目不能过少, 而增大节点数, 在提高求解精度同时, 也会导致优化变量成倍增大, 求解难度和计算耗时急剧增加。分段Gauss伪谱法通过将求解过程分为若干段, 在每个分段内可选取较少的节点数, 通过总的节点数目保证求解精度。一般情况下, 增大节点数目相比于增加分段数带来的计算耗时更多, 因而通过合理的分段, 可在保证增加总的节点数目, 提高计算精度的同时, 降低CPU计算时间, 节省计算耗时, 提升计算效率。

本文中GPM采取的计算方法基于通用的优化软件GPOPS软件^[18]。该软件中使用 hp -自适应拉道伪谱法(hp -adaptive Radau pseudospectral method), 在每次迭代中, 区间网格划分和插值阶选取都不断趋于合理, 在保证计算精度和速度的条件下, 增强了对不连续和状态量快变问题的优化计算能力。

5 结论

本文给出了基于改进Gauss伪谱法生成满足连续性约束及过载、动压、热流密度约束的带推力高超声速飞行器再入轨迹的方法。利用MGPM方法, 将再入轨迹在发动机点火时刻进行分段。将分段点时刻的终端状态叠加脉冲速度增量最为下一阶段的初始状态, 分段点时刻的控制输入作为下一阶段的初始控制输入, 在每一阶段将动压、热流密度和过载作为约束条件进行轨迹优化。

数值算例结果显示, 改进的分段高斯伪谱法可以有效生成满足连续性约束及常规约束的再入轨迹。高超声速飞行器两次点火产生的速度增量可有效增加飞行器的纵向航程和横向跨度, 有效提高飞行器再入机动能力。再入规划得到的控制输入可作为参考制导指令, 辅助制导系统设计。

参考文献:

- [1] ELNAGAR G L, KAZEMI M A. Pseudospectral chebyshev optimal control of constrained nonlinear dynamical systems. *Computational Optimization and Applications*, 1998, 11(2): 195 – 217.
- [2] BENSON D. A Gauss pseudospectral transcription for optimal control. Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology, 2005.
- [3] HUNTINGTON G T. *Advancement and analysis of a Gauss pseudospectral transcription for optimal control problems*. Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology, 2007.
- [4] FAHROO F, ROSS I M. Advances in pseudospectral methods for optimal control. *AAIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*. Hawaii: AIAA, 2008, 8: 1 – 23.
- [5] LI M L. *Return trajectory design of cargo spacecraft and sample return capsule*. Changsha: National University of Defense Technology, 2013.
- [6] XIU Y L. *Study on mars atmospheric entry trajectory optimization and guidance*. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2014.
- [7] ZHANG Zhigang, ZHANG Jinxiu. Sliding mode control of a tethered InSAR system deployment on the basis of the Gauss pseudospectral method. *Journal of Harbin Engineering University*, 2017, 38(2): 293 – 299.
(张志刚, 张锦绣. 基于高斯伪谱法的系绳式InSAR系统展开滑模控制. 哈尔滨工程大学学报, 2017, 38(2): 293 – 299.)
- [8] ZONG Qun, TIAN Bailing, DOU Liqian. Ascent phase trajectory optimization for near space vehicle based on Gauss pseudospectral method. *Journal of Astronautics*, 2010, 31(7): 1775 – 1781.
(宗群, 田栢苓, 窦立谦. 基于Gauss伪谱法的临近空间飞行器上升段轨迹优化. 宇航学报, 2010, 31(7): 1775 – 1781.)
- [9] YANG Xixiang, ZHANG Weihua. Rapid optimization of ascent trajectory for solid launch vehicles based on Gauss pseudospectral method. *Journal of Astronautics*, 2011, 32(1): 15 – 21.
(杨希祥, 张为华. 基于Gauss伪谱法的固体运载火箭上升段轨迹快速优化研究. 宇航学报, 2011, 32(1): 15 – 21.)
- [10] PENG Qibo, LI Haiyang, SHEN Hongxin, et al. Lunar exact-landing trajectory optimization via the method combining GPM with direct shooting method. *Journal of National University of Defense Technology*, 2012, 34(2): 119 – 124.
(彭祺攀, 李海阳, 沈红新, 等. 基于Gauss伪谱法和直接打靶法结合的月球定点着陆轨道优化. 国防科技大学学报, 2012, 34(2): 119 – 124.)
- [11] YONG Enmi, TANG Guojin, CHEN Lei. Rapid trajectory optimization for hypersonic reentry vehicle via Gauss pseudospectral method. *Journal of Astronautics*, 2008, 29(6): 1766 – 1772.
(雍恩米, 唐国金, 陈磊. 基于Gauss伪谱方法的高超声速飞行器再入轨迹快速优化. 宇航学报, 2008, 29(6): 1766 – 1772.)
- [12] JORRIS T R, COBB R G. Three-dimensional trajectory optimization satisfying waypoint and no-fly zone constraints. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2009, 32(2): 551 – 571.
- [13] ZHAO J, ZHOU R. Reentry trajectory optimization for hypersonic vehicle satisfying complex constraints. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2013, 26(6): 1544 – 1553.
- [14] MAO Y F, ZHANG D L, WANG L. Reentry trajectory optimization for hypersonic vehicle based on improved Gauss pseudospectral method. *Soft Computing*, 2017, 21(16): 4583 – 4592.
- [15] ZHANG Y L, LIU L H, TANG G J, et al. Trajectory generation of heat load test based on Gauss pseudospectral method. *Science China Technological Sciences*, 2018, 61(2): 273 – 284.
- [16] LI H F. *Guidance and Control Technology of Hypersonic Vehicles*. Beijing: China Astronautic Publish House, 2012.
- [17] PHILLIPS T H. *A common aero vehicle (CAV) model, description, and employment guide*. New York, USA: Schafer Corporation for AFRL and AFSPC, 2003.
- [18] RAO A V, BENSON D A, DARBY C, et al. Algorithm 902: GPOPS, a MATLAB software for solving multiple-phase optimal control problems using the Gauss pseudospectral method. *Acm Transactions on Mathematical Software*, 2010, 37(2): 1 – 39.

附录 CAV-H气动数据

表A1 气动数据
Table A1 Aero data chart

α	升阻比系数 L/D			升力系数 C_L			阻力系数 C_D		
	10°	15°	20°	10°	15°	20°	10°	15°	20°
Ma 3.5	2.2000	2.5000	2.2000	0.4500	0.7400	1.0500	0.2045	0.2960	0.4770
Ma 5	2.5000	2.6616	2.3616	0.4250	0.7000	1.0000	0.1700	0.2630	0.4230
Ma 8	3.1000	2.9846	2.6846	0.4000	0.6700	0.9500	0.1290	0.2240	0.3540
Ma 10	3.5000	3.2000	2.9000	0.3800	0.6300	0.9000	0.1090	0.1970	0.3100
Ma 15	3.3846	3.0846	2.7846	0.3700	0.6000	0.8500	0.1090	0.1950	0.3050
Ma 20	3.2692	2.9692	2.6692	0.3600	0.5700	0.8000	0.1090	0.1920	0.3000
Ma 23	3.2000	2.9000	2.6000	0.3500	0.5570	0.7800	0.1090	0.1920	0.3000

作者简介:

蔺君 博士, 目前研究方向为飞行器轨迹优化、制导控制, E-mail: linjbuaa@outlook.com;

何英姿 研究员, 博士生导师, 目前研究方向为航天器控制, E-

mail: mailhyz1970@yahoo.com.cn;

黄盘兴 博士, 目前研究方向为飞行器轨迹优化、制导控制, E-

mail: huangpanxing2006@126.com.