

基于平均驻留时间切换离散线性系统的降阶输出反馈控制

何伟, 谢巍[†], 吴伟林, 张浪文

(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 模型降阶作为简化大规模系统的重要工具, 一直受到控制界的高度重视. 另外, 由于在 H_∞ 理论指导下所设计的控制器具有维数过高的特点, 这将导致控制器的实现和维护受到限制. 基于此本文提出了一种平均驻留时间切换离散线性系统降阶输出反馈控制方法. 该方法由一个降阶的切换输出反馈控制器和一个对切换控制器在每个切换时刻的状态执行复位规则的监控器组成, 该控制器对切换控制器在每个切换时刻的状态进行降阶控制. 仿真结果验证了该方法的有效性.

关键词: 平均驻留时间; 降阶控制器; 线性矩阵不等式; 切换系统

引用格式: 何伟, 谢巍, 吴伟林, 等. 基于平均驻留时间切换离散线性系统的降阶输出反馈控制. 控制理论与应用, 2020, 37(3): 528 – 533

DOI: 10.7641/CTA.2019.80768

Reduced-order output feedback control for switched discrete-time linear systems with average dwell time

HE Wei, XIE Wei[†], WU Wei-lin, ZHANG Lang-wen

(College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: Model reduction has been highly valued for the control field to simplify large-scale systems. In addition, under the guidance of H_∞ theory the controller designed has the characteristic of too high dimension, the realization and maintenance of the controller will be restricted. Based on this, a reduced order output feedback control method for discrete linear systems with average dwell time switching is proposed. The method consists of a reduced order switching output feedback controller and a monitor that performs reset rules for the switching controller at each switching time. The controller performs reduced order control on the state of the switching controller at each switching time. Simulation results show the effectiveness of the method.

Key words: average dwell time; reduced-order controllers; linear matrix inequalities; switching control

Citation: HE Wei, XIE Wei, WU Weilin, et al. Reduced-order output feedback control for switched discrete-time linear systems with average dwell time. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(3): 528 – 533

1 引言

近年来, 线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)方法成了解决控制问题的有力工具. 基于LMI的方法, 一般可以构造出全阶的控制器. 当被控对象的阶数较高时, 全阶控制器由于实现成本高难以在工程中使用. 阶数小于被控对象阶的降阶控制器设计问题是控制领域研究的基本问题. 文献[1]研究了广义对象存在无穷远零点和单位圆上零点时的降阶控制器存

在判据和设计准则. 统一给出了混合 H_2/H_∞ 控制问题的降阶控制器的设计方法. 文献[2]考虑了线性时不变对象控制问题的降阶控制器的设计问题. 同时给出了闭环控制系统性能的上界, 该上界适用于标准和奇异控制两种情形. 但是现有的降阶控制方法大多是关于连续系统的, 而关于离散系统中的降阶方法并不多见.

研究者对离散时间切换系统的稳定性分析和控制器的设计越来越关注^[3-5]. 由于其强大的工程背景, 这

收稿日期: 2018-10-08; 录用日期: 2019-07-10.

[†]通信作者. E-mail: weixie@scut.edu.cn; Tel.: +86 13710696974.

本文责任编辑: 吴立刚.

广东省引进创新创业团队计划项目(2016YT03G125), 广东省科技计划项目(2017B090914001, 2017A040405023, 2017A040403064, 2017B090901040, 2017B030306017, 2016B090927007), 广州市科技计划项目(201707010152), 广东省自然科学基金项目(2017A030313385)资助.

Supported by the YangFan Innovative & Entrepreneurial Research Team project of Guangdong Province (2016YT03G125), the Science and Technology Planning Project of Guangdong Province (2017B090914001, 2017A040405023, 2017A040403064, 2017B090901040, 2017B030306017, 2016B090927007), the Science and Technology Program of Guangzhou (201707010152) and the Natural Science Foundation of Guangdong Province (2017A030313385).

类系统可在实践中得到更为广泛的应用^[6-7]. 尽管目前有许多强大的线性分析工具, 然而离散时间切换线性系统的稳定性和镇定问题仍然是一个具有挑战性的问题, 因为即使在所有渐近稳定的子系统中, 特定的切换信号下离散时间切换线性系统也可能变得不稳^[8]. 对于自主切换, 镇定问题可以看作是一个鲁棒控制问题, 文献[9]提出了公共Lyapunov函数的存在是保证鲁棒稳定性的充分条件, 然而, 这种基于公共Lyapunov函数条件在特定的切换律下就会过于保守. 因此, 在具有受控切换的离散时间切换线性系统中, 设计合理的切换律, 达到闭环控制系统稳定和满足一定性能是很重要的. 当考虑具有平均驻留时间(average dwell time, ADT)切换的离散线性切换系统的输出反馈控制时, 切换系统的控制器的设计问题就会变得有些复杂. 因为约束两个相邻Lyapunov函数跳跃的边界条件往往导致以双线性矩阵不等式(bilinear matrix inequalities, BMIs)的形式出现的非凸合成条件难以求解^[10]. 文献[11]将边界条件纳入控制器的综合中, 并使用控制器状态重置技术绕过了相关的BMIs的问题.

本文提出了一种具有ADT切换的离散线性切换系统输出反馈的降阶控制方法. 该方法由一个切换动态输出反馈控制器, 一个监控切换信号的监控器和在每个切换时刻执行切换控制器状态的复位规则组成(如图1所示). 主要体现在其将边界条件的综合问题表述为凸优化的问题, 从而可以得到关于ADT的全局最优解. 此外, 本文的方法不需要控制器状态重置的全部对象状态信息, 这在很大程度上实现了降阶控制. 最后通过一个算例结果来验证本方法的可行性.

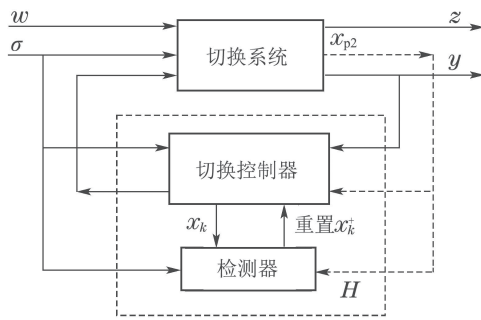


图1 混合控制框架

Fig. 1 The hybrid control scheme

2 定义和问题描述

考虑一个离散时间线性切换系统:

$$\Sigma_P := \begin{cases} x_p(k+1) = A_{p,\delta}x_p(k) + B_{w,\delta}w(k) + B_{u,\delta}u(k), \\ z(k) = C_{z,\delta}x_p(k) + D_{zw,\delta}w(k) + D_{zu,\delta}u(k), \\ y(k) = C_{y,\delta}x_p(k) + D_{yw,\delta}w(k) + D_{yu,\delta}u(k), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^u$ 和 $y(k) \in \mathbb{R}^q$ 分别表示系统的状态向量、控制输入、测量输出.

假定: A1) $(A_{p,i}, B_{u,i}, C_{y,i})$ 对于 $i \in I[1, N_p]$ 是可稳定的和可检测的;

A2) $D_{yu,i} = 0$ 对于所有的 $i \in I[1, N_p]$ 都成立. 本文的设计目标: 设计一个降阶控制律, 使得切换系统(1)满足加权的 l_2 增益性能的渐进稳定.

定义1 对于切换信号 δ 和任何时间的间隔 $t_2 > t_1 > t_0$, 假设 $N_\delta(t_1, t_2)$ 为切换信号 δ 在时间间隔 $[t_1, t_2]$ 内的切换次数. 如果对于条件 $N_0 \geq 1$, $\tau_a > 0$, 有 $N_\delta(t_1, t_2) \leq N_0 + (t_2 - t_1)/\tau_a$ 始终成立, 则称 τ_a 为平均驻留时间, N_0 称为颤动界.

引理1 考虑一个切换线性系统(1). 设 $0 < \lambda_0 < 1$, $\gamma > 0$ 和 $\mu > 1$ 是给定常数, 如果存在对称正定矩阵 P_i , 使得

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_i A_i - \lambda_0^2 P & A_i^T P_i B_{u,i} & C_{y,i}^T \\ B_{u,i}^T P_i A_i & B_{u,i}^T P_i B_{u,i} - \gamma I & D_{yu,i}^T \\ C_{y,i} & D_{yu,i} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (2)$$

$$V_j(x_p^+) \leq \mu V_i(x_p^+) \quad (3)$$

成立, 那么切换线性系统(1)在平均驻留时间 τ_a 的切换信号下是全局一致渐近稳定(global uniformly asymptotically stable, GUAS)的, 其中 τ_a 满足: 对于任何正整数 $j > 0$, 有

$$N_\delta(0, j) \leq \frac{j}{\tau_a}, \quad \tau_a = \frac{\ln(\mu)}{\lambda_0}, \quad (4)$$

且在零初始条件下满足加权 l_2 增益性能 γ , 即

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^{-2j} z^T[j]z[j] \leq \gamma^2 \sum_{j=0}^{+\infty} w^T[j]w[j]. \quad (5)$$

证 以上的结果很容易从定理2的证明推导得到^[12]. 证毕.

注1 利用Schur补引理, 根据文献[17-18], 矩阵不等式(2)等价于以下条件:

i) 存在对称正矩阵 P_i , 使得

$$\begin{bmatrix} -P_i & P_i A_i & P_i B_{u,i} & 0 \\ A_i^T P & -\lambda_0^2 P_i & 0 & C_{y,i}^T \\ B_{u,i}^T P & 0 & -\gamma I & D_{yu,i}^T \\ 0 & C_{y,i} & D_{yu,i} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (6)$$

ii) 存在对称正矩阵 Q_i , 使得

$$\begin{bmatrix} -Q_i & A_i Q_i & B_{u,i} & 0 \\ Q_i A_i^T & -\lambda_0^2 Q_i & 0 & Q_i C_{y,i}^T \\ B_{u,i}^T & 0 & -\gamma I & D_{yu,i}^T \\ 0 & C_{y,i} Q_i & D_{yu,i} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (7)$$

3 主要结果

3.1 降阶反馈控制律

考虑切换系统(1), 其中部分状态测量是可用的.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ z \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{p,\delta} & B_{p1,\delta} & B_{p2,\delta} \\ C_{p1,\delta} & D_{p11,\delta} & D_{p12,\delta} \\ \bar{C}_{p2,\delta} & \bar{D}_{p21,\delta} & 0 \\ [0 \ I_{n_2}] & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ w \\ u \end{bmatrix}. \quad (8)$$

注意, 测量的输出 $y: [y_1^T \ y_2^T]^T$ 被划分为 $y_1 \in \mathbb{R}^{n_{y1}}$, $y_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ 和 $n_{y1} + n_2 = n_y$. 输出矩阵的特殊形式意味着最后的 n_2 状态是可直接测量的, 即让 $x_p = [x_{p1}^T \ x_{p2}^T]^T$ 和 $x_{p1} \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_{p2} \in \mathbb{R}^{n_2}$; 然后, 本文有 $y_2 = x_{p2}$ 和 $n_1 + n_2 = n$ 作为结果, 这样就可以构造 n_1 -阶输出反

馈律.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_k \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{k,\delta} & B_{k1,\delta} & B_{k2,\delta} \\ C_{k,\delta} & D_{k1,\delta} & D_{k2,\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \\ x_k^+ = [\Delta_{1,ij} \ \Delta_{2,ij}] \begin{bmatrix} y_2 \\ x_k \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (9)$$

其中控制器状态 $x_k \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\Delta_{1,ij} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ 和 $\Delta_{2,ij} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ 是重置矩阵. 将式(9)的降阶控制器应用到式(8)的切换系统后, 得到闭环系统的系数矩阵如下:

$$\begin{cases} A_{cl,\delta} = \begin{bmatrix} A_{p,\delta} + B_{p2,\delta}[D_{k1,\delta} \ D_{k2,\delta}] \begin{bmatrix} \bar{C}_{p2,\delta} \\ [0 \ I_{n_2}] \end{bmatrix} & B_{p2,\delta}C_{k,\delta} \\ [B_{k1,\delta} \ B_{k2,\delta}] \begin{bmatrix} \bar{C}_{p2,\delta} \\ [0 \ I_{n_2}] \end{bmatrix} & A_{k,\delta} \end{bmatrix}, \\ B_{cl,\delta} = \begin{bmatrix} B_{p1,\delta} + B_{p2,\delta}D_{k1,\delta}\bar{D}_{p21,\delta} \\ B_{k1,\delta}\bar{D}_{p21,\delta} \end{bmatrix}, \\ C_{cl,\delta} = [C_{p1,\delta} + D_{p12,\delta}[D_{k1,\delta} \ D_{k2,\delta}] \begin{bmatrix} \bar{C}_{p2,\delta} \\ [0 \ I_{n_2}] \end{bmatrix} \ D_{p12,\delta}C_{k,\delta}], \\ D_{cl,\delta} = D_{p11,\delta} + D_{p12,\delta}D_{k1,\delta}\bar{D}_{p21,\delta}, \ A_{r,ij} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 \\ 0 & \Delta_{1,ij} & \Delta_{2,ij} \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (10)$$

定理 1 考虑切换线性系统(1). 给出两个可调标量 $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ 和 $\mu > 1$, 若存在正定矩阵 $R_i \in \mathbf{S}_+^{n \times n}$, $\mathbf{S}_{1,i} \in \mathbf{S}_+^{n_1 \times n_1}$ 和矩形矩阵. $S_{2,i} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $\hat{A}_{k,i} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $[\hat{B}_{k1,i} \ \hat{B}_{k2,i}] \in \mathbb{R}^{n_1 \times (n_{y1} \times n_1)}$, $\hat{C}_{k,i} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_2}$, $[\hat{D}_{k1,i} \ \hat{D}_{k2,i}] \in \mathbb{R}^{n_u \times (n_{y1} \times n_1)}$ 和 $\hat{\Delta}_{1,ij} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $\hat{\Delta}_{2,ij} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, 对于所有的 $i, j \in I[1, N_p]$, $i \neq j$. 式(11)和(12)所求解的正标量 $\gamma \in \mathbb{R}_+$. 然而, 对于每个切换信号 σ , 在平均驻留时间 $\tau_a \geq \ln(\mu)/\lambda_0$ 内, 具有GUAS的闭环系统(10), 实现了加权 l_2 增益性能 γ .

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & * & * & * \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} & * & * \\ \Xi_{31} & \Xi_{32} & \Xi_{33} & * \\ \Xi_{41} & \Xi_{42} & \Xi_{43} & \Xi_{44} \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

$$\Xi_{11} = \text{He}\{A_{p,i}R_i + B_{p2,i}[\hat{D}_{k2,i} \ \hat{C}_{k,i}]\} + \lambda_0 R_i,$$

$$\Xi_{21} = [I_{n_1} \ 0](A_{p,i}^T + C_{p2,i}^T \hat{D}_{k,i}^T B_{p2,i}^T) + [\hat{B}_{k2,i} \ \hat{A}_{k,i}] + \lambda_0 I_{n_1},$$

$$\Xi_{22} = \text{He}\{([S_{1,i} \ S_{2,i}]A_{p,i} + \hat{B}_{k,i}C_{p2,i}) \begin{bmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix}\} + \lambda_0 S_{1,i},$$

$$\Xi_{31} = B_{p1,i}^T + D_{p21,i}^T \hat{D}_{k,i}^T B_{p2,i}^T,$$

$$\Xi_{32} = B_{p1,i}^T \begin{bmatrix} S_{1,i} \\ S_{2,i} \end{bmatrix} + \bar{D}_{p21,i}^T \hat{B}_{k,i}^T,$$

$$\Xi_{33} = -\gamma I_{n_w},$$

$$\Xi_{41} = C_{p1,i}R_i + D_{p12,i}[\hat{D}_{k2,i} \ \hat{C}_{k,i}],$$

$$\Xi_{42} = (C_{p1,i} + D_{p12,i}\hat{D}_{k,i}C_{p2,i}) \begin{bmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Xi_{43} = D_{p11,i} + D_{p12,i}\hat{D}_{k1,i}D_{p21,i},$$

$$\Xi_{44} = -\gamma I_{n_z},$$

$$\begin{bmatrix} \mu R_i & * & * & * \\ \mu[I_{n_1} \ 0] & \mu S_i & * & * \\ R_i & \begin{bmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix} & R_j & * \\ [\hat{\Delta}_{1,ij} \ \hat{\Delta}_{2,ij}] & S_{1,j} & [I_{n_1} \ 0] & S_{1,j} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} R_i & * \\ [I_{n_1} \ 0] & S_{1,i} \end{bmatrix} > 0. \quad (13)$$

因此, 通过以下算法可以得到降阶控制器系数矩阵:

1) 分块矩阵

$$R_i = \begin{bmatrix} R_{1,i} & R_{2,i} \\ R_{2,i}^T & R_{3,i} \end{bmatrix}, \ R_i^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_{1,i} & \tilde{R}_{2,i} \\ \tilde{R}_{2,i}^T & \tilde{R}_{3,i} \end{bmatrix}.$$

在 $R_{1,i}, \tilde{R}_{1,i} \in \mathbf{S}_+^{n_1 \times n_1}$, $R_{2,i}, \tilde{R}_{2,i} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $R_{3,i},$

$\tilde{R}_{3,i} \in \mathbf{S}_+^{n_2 \times n_2}$, 让 $S_{3,i} = \tilde{R}_{3,i} + (\tilde{R}_{2,i} - S_{2,i})^T (S_{1,i} - \tilde{R}_{1,i})^{-1} (\tilde{R}_{2,i} - S_{2,i})$ 对于所有的 $i \in I[1, N_p]$, 本文有 $S_i = \begin{bmatrix} S_{1,i} & S_{2,i} \\ S_{2,i}^T & S_{3,i} \end{bmatrix} > 0$. 注意, 矩阵 $S_{1,i} - \tilde{R}_{1,i}$ 由引理 2.1 可得^[16].

2) 求解 $N_i \in \mathbb{R}^{n \times n_1}$ 对于所有的 $i \in I[1, N_p]$ 通过因式分解 $S_i - R_i^{-1} = N_i Q_i N_i^T$, 其中 $Q_i \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, 定义 $M_i = -R_i N_i Q_i$, 所以 M_i, N_i 满足独立的 $S_i R_i + N_i M_i^T = I_n$. 此外, 本文还划分了 M_i, N_i : $M_i = \begin{bmatrix} M_{1,i} \\ M_{2,i} \end{bmatrix}$, $N_i = \begin{bmatrix} N_{1,i} \\ N_{2,i} \end{bmatrix}$, 所以 $M_{1,i}, N_{1,i} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ 是可逆的. 并且 $M_{2,i}, N_{2,i} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$.

3) 计算控制器系数矩阵 $A_{k,i}, B_{k1,i}, B_{k2,i}, C_{k,i}, D_{k1,i}, D_{k2,i}$ 和 $\Delta_{1,ij}, \Delta_{2,ij}$. 对于所有的 $j \in I[1, N_p]$ 和 $i \neq j$,

$$\begin{cases} D_{k1,i} = \hat{D}_{k1,i}, \\ [D_{k2,i} \ C_{k,i}] = \{[\hat{D}_{k2,i} \ \hat{C}_{k,i}] - D_{k1,i} \bar{C}_{p2,i} R_i\} \Omega_i^{-1}, \\ B_{k1,i} = N_{1,i}^{-1} \{\hat{B}_{k1,i} - [S_{1,i} \ S_{2,i}] B_{p2,i} - D_{k1,i}\}, \\ [B_{k2,i} \ A_{k,i}] = \\ N_{1,i}^{-1} \{[\hat{B}_{k2,i} \ \hat{A}_{k,i}] - [S_{1,i} \ S_{2,i}] \times (A_{p,i} R_i + \\ B_{p2,i} D_{k1,i} \bar{C}_{p2,i} R_i + B_{p2,i} [D_{k2,i} \ C_{k,i}] \Omega_i) - \\ N_{1,i} B_{k,i} \bar{C}_{p2,i} R_i\} \Omega_i^{-1}, \\ [\Delta_{1,ij} \ \Delta_{2,ij}] = \\ N_{1,j}^{-1} \{[\hat{\Delta}_{1,ij} \ \hat{\Delta}_{1,ij}] - [S_{1,j} \ S_{2,j}] R_i\} \Omega_i^{-1}, \end{cases} \quad (14)$$

$$Z_{1,i}^T P_i Z_{1,i} = \begin{bmatrix} R_{1,i} & R_{2,i} & I_{n1} \\ R_{2,i}^T & R_{3,i} & 0 \\ M_{1,i}^T & M_{2,i}^T & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{n1} & 0 & S_{1,i} \\ 0 & I_{n2} & S_{2,i}^T \\ 0 & 0 & N_{1,i}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1,i} & R_{2,i} & I_{n1} \\ R_{2,i}^T & R_{3,i} & 0 \\ I_{n1} & 0 & S_{1,i} \end{bmatrix},$$

$$Z_{1,i}^T P_i A_{cl,i} Z_{1,i} = \begin{bmatrix} A_{p,i} R_i + B_{p2,i} [\hat{D}_{k2,i} \ \hat{C}_{k,i}] & (A_{p,i} + B_{p2,i} \hat{D}_{k1,i} \bar{C}_{p2,i}) \begin{bmatrix} I_{n1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ [\hat{B}_{k2,i} \ \hat{A}_{k,i}] & ([S_{1,i} \ S_{2,i}] A_{p,i} + \hat{B}_{k1,i} \bar{C}_{p2,i}) \begin{bmatrix} I_{n1} \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$Z_{1,i}^T P_i B_{cl,i} = \begin{bmatrix} B_{p1,i} + B_{p2,i} \hat{D}_{k1,i} \bar{D}_{p21,i} \\ [S_{1,i} \ S_{2,i}] B_{p1,i} + \hat{B}_{k1,i} \bar{D}_{p21,i} \end{bmatrix}, \quad Z_{1,i}^T C_{cl,i}^T = \begin{bmatrix} R_i C_{p1,i}^T + [\hat{D}_{k2,i} \ \hat{C}_{k,i}]^T D_{p12,i}^T \\ [I_{n1} \ 0] (C_{p1,i}^T + \bar{C}_{p2,i}^T \hat{D}_{k1,i}^T D_{p12,i}^T) \end{bmatrix},$$

其中:

$$\begin{cases} \hat{D}_{k1,i} = D_{k1,i}, \\ [\hat{D}_{k2,i} \ \hat{C}_{k,i}] = D_{k1,i} \bar{C}_{p2,i} R_i + [D_{k2,i} \ C_{k,i}] \Omega_i, \\ \hat{B}_{k1,i} = N_{1,i} B_{k1,i} + [S_{1,i} \ S_{2,i}] B_{p2,i} D_{k1,i}, \\ [\hat{B}_{k2,i} \ \hat{A}_{k,i}] = \\ [S_{1,i} \ S_{2,i}] (A_{p,i} R_i + B_{p2,i} D_{k1,i} \bar{C}_{p2,i} R_i + \\ B_{p2,i} [D_{k2,i} \ C_{k,i}] \Omega_i) + \\ N_{1,i} B_{k,i} \bar{C}_{p2,i} R_i + N_{1,i} [B_{k2,i} \ A_{k,i}] \Omega_i. \end{cases} \quad (15)$$

其中

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} R_{2,i}^T & R_{3,i} \\ M_{1,i}^T & M_{2,i}^T \end{bmatrix}.$$

证 为了保证GUAS稳定性和满足闭环系统(10)的加权 l_2 增益性能, 本文将相关的Lyapunov函数定义为 $V_i = x_{cl}^T P_i x_{cl}$ 在 $i \in I[1, N_p]$.

关于闭环系统状态中的 x_{p1}, x_{p2} 和 x_k 的维数

$$x_{cl} = [x_{p1}^T \ x_{p2}^T \ x_k^T]^T,$$

本文分解Lyapunov矩阵 P_i :

$$P_i = \begin{bmatrix} S_i & N_i \\ N_i^T & X_i^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1,i} & S_{2,i} & N_{1,i} \\ S_{2,i}^T & S_{3,i} & N_{2,i} \\ N_{1,i}^T & N_{2,i}^T & X_i^{-1} \end{bmatrix},$$

并指定

$$Z_{1,i} = \left[\begin{array}{c|c} R_i & I_{n1} \\ \hline M_i^T & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} R_{1,i} & R_{2,i} & I_{n1} \\ \hline R_{2,i}^T & R_{3,i} & 0 \\ M_{1,i}^T & M_{2,i}^T & 0 \end{array} \right],$$

$$Z_{2,i} = \begin{bmatrix} I_{n1} & 0 & S_{1,i} \\ 0 & I_{n2} & S_{2,i}^T \\ 0 & 0 & N_{1,i}^T \end{bmatrix},$$

使 $P_i Z_{1,i} = Z_{2,i}$ 和 $N_i M_i^T = I_n - S_i R_i$. 有

$$X_i^{-1} M_i^T = -N_i^T R_i.$$

本文首先在条件(8)上进行同等变换, 矩阵 $\text{diag}\{Z_{1,i}, I_{nw}, I_{nz}\}$, 并得到以下结果:

由于 $Z_{1,i}$ 是非奇异的, 所以Lyapunov矩阵 $P_i > 0$ 可以由式(13)确定. 另外, 在同等变换后, 式(11)还可以得到上述结果的条件. 因此, 通过执行矩阵 $\text{diag}\{Z_{1,i}, Z_{1,j}\}$ 的同等变换得到了

$$Z_{1,j}^T P_j A_{r,ij} Z_{1,i} = \begin{bmatrix} R_{1,i} & R_{2,i} & I_{n1} \\ R_{2,i}^T & R_{3,i} & 0 \\ \hat{\Delta}_{1,ij} & \hat{\Delta}_{2,ij} & S_{1,j} \end{bmatrix},$$

其中

$$[\hat{\Delta}_{1,ij} \ \hat{\Delta}_{2,ij}] = [S_{1,j} \ S_{2,j}]R_i + N_{1,j}[\Delta_{1,ij} \ \Delta_{2,ij}]\Omega_i. \quad (16)$$

因此, 式(12)可以通过LMI计算出来, 式(14)所示控制器的系数矩阵也可以通过式(15)和式(16)反推导出来.

证毕.

根据定理1的结果, 通过求解下列给定的LMI优化问题, 可以确定降阶控制情况下最小加权 l_2 的增益. (λ_0, μ):

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma, \\ \text{s.t.} \quad & \text{式(11) - (13)}. \end{aligned} \quad (17)$$

4 数值算例

本文给出的算例是文献[18]中的例子, 通过采样周期 $T = 0.5\text{s}$ 而得到的离散系统. 考虑图2中的双罐系统. 其中流体通过两个水槽, 状态向量值选为两个水库水位值. 假定流量的控制和水平面的测量能在两个水箱中任意切换. 在没有控制的情形下, 流入与流出的流体为常数且等于标称值. 当输入与输出矩阵切换时, 该系统的状态矩阵仍然没有明显的改变. 本文选择如下的系统模型:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0.6839 & 0.3161 \\ 0.3161 & 0.6839 \end{bmatrix} x(k) + B_i u(k) + w_i(k), \\ y(k) &= C_i x(k), \end{aligned}$$

其中 A 中的矩阵是通过采样周期离散化得到; 而输入和输出矩阵分别是

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.06200 \\ 0.4080 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0.09200 \\ -0.4080 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [1.500 \ 1.000], \quad C_2 = [1.000 \ 1.500].$$

本文讨论了外部干扰抑制问题, 其中选择加权函数为

$$w_1(k) = \begin{bmatrix} 1/10 & 1 \\ 1 & 1/10 \end{bmatrix}, \quad w_2(k) = \begin{bmatrix} 1/10 & 1 \\ 1 & 1/10 \end{bmatrix}.$$

通过求解式(17)的优化问题, 本文得到了一个具有最优值 $\gamma = 0.7625$ 的降阶输出反馈控制器(9).

$$K_1 = \begin{bmatrix} A_{k1} & B_{k1} \\ C_{k1} & D_{k1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.019 & -31.84 & -218.8 & 3.536 \\ -0.04600 & -7.066 & 66.32 & -0.1833 \\ -0.02540 & 0.6688 & -13.12 & 0.04860 \\ 1.077 & 7.764 & 41.45 & -0.8174 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} A_{k2} & B_{k2} \\ C_{k2} & D_{k2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23.80 & 68.50 & 1209 & 5.900 \\ 0 & -2.200 & 97.30 & 0 \\ 0 & 0 & -14.20 & 0 \\ 8.200 & -24.40 & -436.3 & -2.100 \end{bmatrix}.$$

如图3所示, 降阶控制反馈的受控输出响应具有很快的暂态过程和很好的静态特性. 同时, 在图4中, 降阶控制输出反馈的控制力很小.

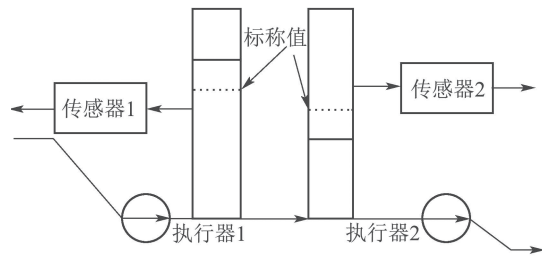


图2 双罐系统

Fig. 2 The two tank

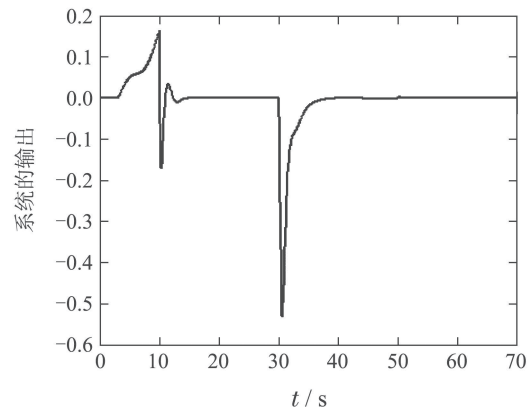


图3 系统的输出

Fig. 3 The controlled output

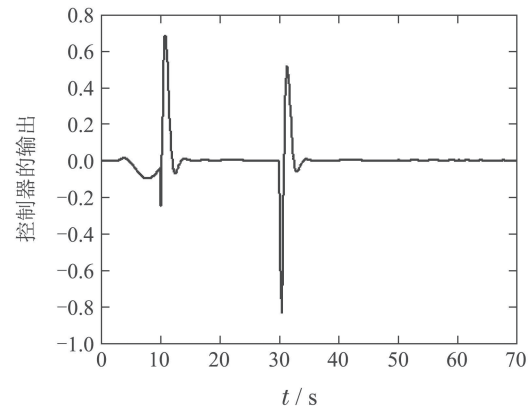


图4 控制器的输出

Fig. 4 The controller output

5 结论

针对具有平均驻留时间的切换离散时间线性控制系统, 提出了一种降阶输出反馈控制方法. 该方法将边界条件加入到综合控制问题中. 利用多重二次Lyapunov函数, 在统一的框架下, 建立了具有保证稳定性和最优加权 l_2 增益性能的降阶控制器. 并将综合条件表述为一组具有给定的驻留时间参数的LMIs. 为具有ADT切换的离散时间线性控制系统的综合提供了一种有效的、系统的方法.

参考文献:

- [1] XIN X, GUO L, FENG C. Reduced-order controllers for continuous and discrete-time singular H_∞ control problems based on LMI. *Automatica*, 1996, 32(11): 1581 – 1585.
- [2] ZENG Jianping, CHENG Peng. Design reduced-order controllers for a class of control problems. *Acta Automatica Sinica*, 2002, 28(2): 267 – 271.
(曾建平, 程鹏. 一类控制问题的降阶控制器设计. *自动化学报*, 2002, 28(2): 267 – 271.)
- [3] DECARLO R A, BRANICKY M S, PETTERSSON S, et al. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, 2000, 88(7): 1069 – 1082.
- [4] XIE W. Design of switched linear control systems based on Youla parameterization with average dwell time. *International Journal of Systems Science*, 2019, 50(1): 203 – 215.
- [5] LIN H, ANTSAKLIS P J. Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(2): 308 – 322.
- [6] HE Zhaolan, WANG Mao, CUI Yang. Sliding mode control for a class of switched systems based on reduced-order observer. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(6): 704 – 708.
(何召兰, 王茂, 崔阳. 一类切换系统基于观测器的滑模降阶控制. *控制理论与应用*, 2009, 26(6): 704 – 708.)
- [7] FALCHETTO V B, SOUZE M, FLORAVANTI A R, et al. H_2 and H_∞ analysis for discrete-time constrained switched linear system. *IFAC-PaperOnLine*, 2017, 50(1): 2076 – 2081.
- [8] FEI Z, SHI S, WANG Z, et al. Quasi-time-dependent output control for discrete-time switched system with mode-dependent average dwell time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(8): 2647 – 2653.
- [9] LIBERZON D, MORSE A S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control systems magazine*, 1999, 19(5): 59 – 70.
- [10] BEI L, WU F. Switching LPV control designs using multiple parameter-dependent Lyapunov functions. *Automatica*, 2004, 40(11): 1973 – 1980.
- [11] XIE W, WU W L, HE W, et al. Weighted L_2 gain performance controller parameterisation of linear switching plants with average dwell time. *IET Control Theory & Applications*, 2018, 13(3): 343 – 350.
- [12] ZHAI G, CHEN X, LIN H. Stability and L_2 gain analysis for discrete-time LTI systems with controller failures. *IFAC Proceedings Volumes*, 2004, 37(11): 545 – 550.
- [13] ZHAI G, CHEN X, LIN H. Stability and L_2 gain analysis of discrete-time switched systems. *Transactions of the Institute of Systems, Control and Information Engineers*, 2002, 15(3): 117 – 125.
- [14] ZHAN J, DAVID J H. On stability, L_2 -gain and H_∞ control for switched systems. *Automatica*, 2008, 44(5): 1220 – 1232.
- [15] DEAECTO G S, GEROMEL J C, DAADOUZ J. Dynamic output feedback H_∞ control of switched linear systems. *Automatica*, 2011, 47(8): 1713 – 1720.
- [16] CAI C, MIJANOVIC S. LMI based stability analysis of linear hybrid systems with application to switched control of a refrigeration process. *Asian Journal of Control*, 2012, 14(1): 12 – 22.
- [17] ZHANG L, SHI P. Stability l_2 -Gain and asynchronous H_∞ control of discrete-time switched systems with average dwell time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(9): 2192 – 2199.
- [18] BIANCHINI, F, MIANI S, MESQUINE F. A Separation principle for linear switching systems and parametrization of all stabilizing controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(2): 279 – 292.

作者简介:

何伟 博士, 主要从事切换线性参数变化系统和鲁棒控制的研究, E-mail: weihescut@126.com;

谢巍 教授, 主要从事线性变参数系统、鲁棒控制、机器视觉等方面的研究, E-mail: weixie@scut.edu.cn;

吴伟林 博士, 主要从事线性变参数系统等方面的研究, E-mail: wuweilin.520@163.com;

张浪文 讲师, 主要从事分布式预测控制理论与应用的研究, E-mail: aulwzhang@scut.edu.cn.