

基于鲁棒容积卡尔曼滤波的自适应目标跟踪算法

彭美康^{1,2}, 郭蕴华^{1,2†}, 汪敬东^{1,2}, 牟军敏^{1,3}, 胡 义^{1,2}

(1. 武汉理工大学 高性能舰船技术教育部重点实验室, 湖北 武汉 430063;

2. 武汉理工大学 能源与动力工程学院, 湖北 武汉 430063; 3. 武汉理工大学 航运学院, 湖北 武汉 430063)

摘要: 目标跟踪系统的观测野值将大大降低滤波算法对目标状态的估计精度. 为了解决这个问题, 提出了一种基于鲁棒容积卡尔曼滤波的自适应目标跟踪算法. 借鉴Huber等价权函数的思想, 构造了基于平方根平滑逼近函数的修正因子以抑制观测野值的影响, 并结合容积卡尔曼滤波器求解框架推导出该算法. 区别于Huber方法对观测残差的每个维度分别进行处理, 提出的算法能够对观测残差进行综合评判. 理论分析证明所提算法具有更好的数值稳定性. 仿真实验表明, 所提算法能够自适应地减少异常值的不利影响, 与现有算法相比具有更优的滤波性能. 在仿真实验中还对几种滤波算法的计算花费进行了比较, 发现所提算法未大幅增加计算成本.

关键词: 野值; 非线性滤波; 自适应算法; 修正因子; 目标跟踪

引用格式: 彭美康, 郭蕴华, 汪敬东, 等. 基于鲁棒容积卡尔曼滤波的自适应目标跟踪算法. 控制理论与应用, 2020, 37(4): 793 – 800

DOI: 10.7641/CTA.2019.90159

Adaptive target tracking algorithm based on robust cubature Kalman filter

PENG Mei-kang^{1,2}, GUO Yun-hua^{1,2†}, WANG Jing-dong^{1,2}, MOU Jun-min^{1,3}, HU Yi^{1,2}

(1. Key Laboratory of High Performance Ship Technology of Ministry of Education, Wuhan University of Technology, Wuhan Hubei 430063, China;

2. School of Energy and Power Engineering, Wuhan University of Technology, Wuhan Hubei 430063, China;

3. School of Navigation, Wuhan University of Technology, Wuhan Hubei 430063, China)

Abstract: The outliers in observations of target tracking system will greatly reduce the estimation accuracy of the filtering algorithms. In order to address this problem, an adaptive target tracking algorithm based on robust cubature Kalman filter is proposed. Inspired by the idea of the Huber equivalent weight function, a correction factor based on the square root smooth approximation function is constructed to suppress the influence of outliers, and the proposed algorithm is derived combined with the cubature Kalman filter solution framework. Different from the Huber method which processes each dimension of the observation residual separately, the proposed algorithm can evaluate the observation residual comprehensively. Theoretical analysis proves that the proposed algorithm has better numerical stability. Simulation experiments show that the proposed algorithm can adaptively reduce the adverse effects of the outlier and exhibit superior filter performance comparing to the existing algorithms. The computational cost of several filtering algorithms is also compared in simulation experiment, and it is found that the proposed algorithm does not significantly increase the computational cost.

Key words: outliers; nonlinear filtering; adaptive algorithms; correction factor; target tracking

Citation: PENG Meikang, GUO Yunhua, WANG Jingdong, et al. Adaptive target tracking algorithm based on robust cubature Kalman filter. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(4): 793 – 800

1 引言

目标跟踪是环境感知系统的核心问题之一, 在无人机、动力定位、军事打击等领域有着广泛的应用^[1-5]. 为了实现非线性系统的状态估计, 研究人员

陆续提出了拓展卡尔曼滤波算法(extended Kalman filter, EKF)^[6]、无迹卡尔曼滤波算法(unscented Kalman filter, UKF)^[7]、容积卡尔曼滤波算法(cubature Kalman filter, CKF)^[8]等非线性滤波算法. 这些算法在

收稿日期: 2019-03-21; 录用日期: 2019-08-12.

†通信作者. E-mail: wtugyh@163.com.

本文责任编辑: 周杰.

国家自然科学基金项目(51579201), 工信部高技术科研项目(MC-201710-H01)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (51579201) and the High-Tech Research Project of Ministry of Industry and Information technology (MC-201710-H01).

观测噪声严格服从高斯分布的情况下具有良好的性能,然而,当观测噪声含有污染分布时,其性能将严重退化.

文献[9]指出,偏离观测样本主体太远的观测值可以看作由不同机制产生的异常值,即野值.在实际工程中,由于设备本身故障、外界干扰等因素,目标跟踪系统的观测值中可能会出现大量的野值.针对这个问题,Huber提出了经过严格推导的广义最大似然估计(maximum likelihood type estimates, MLE),即M估计^[10].该方法通过Huber权函数修正二次型性能指标^[11],降低了受野值干扰的观测值的权重,是一种解决野值的有效方法,得到了广泛的研究和应用.Wang等将Huber方法与UKF结合起来,成功应用于视觉相对导航领域^[12].Zhu等在基于Huber方法的鲁棒UKF算法的基础上,通过投影统计算法来自适应选取Huber权函数的阈值^[13].Karlgard等提出将Huber方法应用于分开差分滤波算法(divided difference filter, DDF)中^[14],通过批回归处理的方式实现非线性滤波的鲁棒化.在Karlgard的基础上,Chang等构建了新的Huber鲁棒滤波框架,无需对非线性方程进行线性化处理,提高了滤波算法的估计精度^[15].Tseng等在不对非线性模型线性化的基础上,将基于Huber M估计的CKF滤波算法成功应用于GPS导航系统^[16].在高阶CKF^[17-18]的基础上,张文杰等提出一种基于Huber方法的高阶容积卡尔曼跟踪算法,实现了高阶CKF的鲁棒化^[19].秦康等针对广义高阶容积卡尔曼滤波算法,采用Huber方法提高了非高斯分布条件下算法的鲁棒性^[20].吴昊等基于广义M估计,建立改进的3段Huber权函数,能够有效处理观测值中的野值,提高了CKF算法的鲁棒性^[21].

然而,上述鲁棒化滤波算法可能存在一些问题:

1) 在多维系统中,基于Huber方法的鲁棒滤波器存在数值稳定性较差的问题;2) 当观测噪声的污染率较高时,滤波器的性能会严重退化;3) 当观测噪声的污染率较高时,含有舍弃段的3段Huber权函数的阈值选取较为困难.针对以上问题,本文提出一种基于鲁棒M估计的自适应CKF算法(robust M-estimates based adaptive CKF, RMA-CKF),在观测噪声污染率较高的情况下能够自适应地抑制野值的影响,具有较强的抗差能力.

2 目标跟踪系统模型和CKF算法

2.1 目标跟踪系统模型

假定目标做匀速直线运动,其在 k 时刻的状态向量为 $\mathbf{x}_k = [x_k \ y_k \ z_k \ \dot{x}_k \ \dot{y}_k \ \dot{z}_k]^T$,包括位置向量 $[x_k \ y_k \ z_k]^T$ 和速度向量 $[\dot{x}_k \ \dot{y}_k \ \dot{z}_k]^T$;观测向量 $\mathbf{z}_k = [l_k \ a_k \ b_k]^T$,其中 l_k , a_k 和 b_k 分别为距离测量值、方位角测量值以及高低角测量值.状态空间形式的离散非线性目标跟踪系统可以表示为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = F\mathbf{x}_{k-1} + \Gamma w_{k-1}, \\ \mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + v_k, \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^m$, n 和 m 分别为各自的维数,这里 $n = 6$, $m = 3$; F 和 Γ 分别为系统状态转移矩阵和过程噪声转移矩阵; $h(\cdot)$ 为非线性观测函数; 矩阵 F , Γ 以及观测函数 $h(\mathbf{x}_k)$ 分别表示为

$$F = \begin{bmatrix} I_{m \times m} & \Delta t \times I_{m \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times m} & I_{m \times m} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} \times I_{m \times m} \\ \Delta t \times I_{m \times m} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$h(\mathbf{x}_k) = \left[\sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} \arctan \frac{y_k}{x_k} \arctan \frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} \right]^T. \quad (4)$$

过程噪声 w_k 和观测噪声 v_k 为互不相关的高斯白噪声,其均值和协方差矩阵分别为

$$\begin{cases} E(w_k) = 0, E(w_k w_j^T) = Q_k \delta_{kj}, \\ E(v_k) = 0, E(v_k v_j^T) = R_k \delta_{kj}, \end{cases} \quad (5)$$

δ_{kj} 为Kronecker-delta函数.

采用混合高斯分布来表示含有污染分布时观测噪声的概率分布

$$p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_k) = (1 - \alpha)N(0, \sigma_1^2) + \alpha N(0, \sigma_2^2), \quad (6)$$

式中: $N(0, \sigma_1^2)$ 和 $N(0, \sigma_2^2)$ 分别为观测噪声的主体分布和干扰分布; α 表示干扰部分的数据占有所有数据的比例,也就是野值噪声出现的概率,即噪声污染率; σ_1 和 σ_2 分别为主体分布和干扰分布的均方差,且有 $\sigma_2^2 \gg \sigma_1^2$.

2.2 CKF算法

CKF算法利用球面径向容积准则来近似高维积分,主要包括时间更新和量测更新两个部分.其滤波过程如下.

时间更新:

$$\eta_j = \sqrt{n}[I_n \ -I_n]_j, \quad (7)$$

其中: I_n 为单位矩阵; $[\cdot]_j$ 表示矩阵 $[\cdot]$ 的第 j 列, $j = 1, 2, \dots, 2n$.取Sigma采样点为

$$\chi_{j,k-1/k-1} = \sqrt{P_{k-1/k-1}}\eta_j + \hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}. \quad (8)$$

对采样点进行外推预测,有

$$\chi_{j,k/k-1} = F\chi_{j,k-1/k-1}, \quad (9)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} = \sum_{j=1}^{2n} w_j \chi_{j,k/k-1}, \quad (10)$$

$$P_{k/k-1} = \sum_{j=1}^{2n} w_j \chi_{j,k/k-1} (\chi_{j,k/k-1})^T - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^T + Q_k. \quad (11)$$

量测更新:

$$\chi_{j,k/k-1}^* = \sqrt{P_{k/k-1}} \xi_j + \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}, \quad (12)$$

$$Z_{j,k/k-1} = h(\chi_{j,k/k-1}^*), \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{k/k-1} = \sum_{j=1}^{2n} w_j Z_{j,k/k-1}, \quad (14)$$

$$P_{zz,k/k-1} = \sum_{j=1}^{2n} w_j Z_{j,k/k-1} Z_{j,k/k-1}^T - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1} \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1}^T + R_k, \quad (15)$$

$$P_{xz,k/k-1} = \sum_{j=1}^{2n} w_j (\chi_{j,k/k-1}^* - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) \times (Z_{j,k/k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1})^T. \quad (16)$$

滤波增益、状态估计以及协方差矩阵可由下式求得:

$$K_k = P_{xz,k/k-1} P_{zz,k/k-1}^{-1}, \quad (17)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k} = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + K_k (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1}), \quad (18)$$

$$P_{k/k} = P_{k/k-1} - K_k P_{zz,k/k-1} K_k^T. \quad (19)$$

2.3 Huber-CKF算法

当观测噪声服从正态分布时, CKF算法具有良好的性能. 然而, CKF算法不具鲁棒性, 当观测值中出现野值的概率高于0.002时, 包括CKF算法在内的非鲁棒估计算法的性能将严重退化^[10]. Huber-CKF算法通过引入Huber等价权函数, 降低受野值干扰的观测值的权重, 能够有效地抑制野值的影响.

$$\psi_x = \begin{cases} 1, & |\tau_x| \leq \beta, \\ \beta/|\tau_x|, & |\tau_x| > \beta, \end{cases} \quad (20)$$

式中: $\tau = [\tau_x \ \tau_y \ \tau_z]^T = R_k^{-0.5} e_k$, e_k 为观测残差, 即 $e_k = \mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1}$. 由式(20)所示的Huber等价权函数得到稳健因子 $\Psi = \text{diag}\{\psi_x \ \psi_y \ \psi_z\}$, 且 ψ_x , ψ_y 和 ψ_z 三者的形式相同. 可以看出, Huber等价权函数能够对观测值每一个维度出现的野值进行检测, 在野值出现时降低该维度上的权值. 然而, 对于多维系统, 针对每一个维度分别进行检测会可能引起算法数值稳定性较差的问题.

3 基于鲁棒M估计的自适应CKF

3.1 算法推导

本文利用文献[22]提出的光滑近似函数 $f_\mu = \sqrt{x^2 + \mu^2}$ (μ 为一个很小的正实数), 设计了一个修正因子, 能够对观测值的所有维度进行综合评判, 以自适应地抑制野值的影响.

构建非线性回归模型

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_k \\ \delta \mathbf{x}_{k/k-1} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

式中 $\delta \mathbf{x}_{k/k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} - \mathbf{x}_k$ 为状态外推估计误差. 定义 ε_k 为式(21)中等号右侧的第2项, 即 $\varepsilon_k = [v_k \ \delta \mathbf{x}_{k/k-1}]^T$, 易知

$$E(\varepsilon_k \varepsilon_k^T) = \begin{bmatrix} R_k & \mathbf{0}_{m \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times m} & P_{k/k-1} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

再定义 $S_k = E(\varepsilon_k \varepsilon_k^T)$, 将 $S_k^{-0.5}$ 乘到式(21)的左右各项, 得到

$$y_k = g(\mathbf{x}_k) + \xi_k, \quad (23)$$

其中

$$y_k = S_k^{-0.5} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$g(\mathbf{x}_k) = S_k^{-0.5} \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\xi_k = S_k^{-0.5} \begin{bmatrix} v_k \\ \delta \mathbf{x}_{k/k-1} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

显然, $E(\xi_k \xi_k^T) = I_{(m+n) \times (m+n)}$.

定义损失函数为

$$J(\mathbf{x}_k) = \rho(\xi_k), \quad (27)$$

式中: $\xi_k = y_k - g(\mathbf{x}_k)$, 为标准化残差. 函数 $\rho(\xi_k)$ 的表达式为

$$\rho(\xi_k) = \begin{cases} \frac{1}{2} (\xi_k)^T \xi_k, & \sqrt{(\xi_k)^T \xi_k + \mu^2} < \beta, \\ \sqrt{(\xi_k)^T \xi_k + \mu^2}, & \sqrt{(\xi_k)^T \xi_k + \mu^2} \geq \beta. \end{cases} \quad (28)$$

式(28)中的 β 需要合理选择, 以达到所需的估计效率. 在文献[23]中, β 的建议取值为1.345.

定义 $\Phi_k = \sqrt{(\xi_k)^T \xi_k + \mu^2}$, 则式(28)可以表示为

$$\rho(\xi_k) = \begin{cases} \frac{\Phi_k^2 - \mu^2}{2}, & \Phi_k < \beta, \\ \Phi_k, & \Phi_k \geq \beta. \end{cases} \quad (29)$$

因此, 非线性回归问题能够通过使损失函数最小化解决

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k} = \arg \min \rho(\xi_k). \quad (30)$$

对损失函数求导, 令 $\varphi(\xi_k) = \frac{\partial \rho(\xi_k)}{\partial \xi_k}$, 有

$$\varphi(\xi_k) \frac{\partial \xi_k}{\partial \mathbf{x}_k} = \mathbf{0}, \quad (31)$$

其中

$$\varphi(\xi_k) = \begin{cases} \xi_k, & \Phi_k < \beta, \\ \frac{\xi_k}{\sqrt{(\xi_k)^T \xi_k + \mu^2}}, & \Phi_k \geq \beta. \end{cases} \quad (32)$$

令 $\theta_k = \frac{\varphi(\xi_k)}{\xi_k}$, 相应地, 有

$$\theta_k = \begin{cases} 1, & \Phi_k < \beta, \\ \frac{1}{\Phi_k}, & \Phi_k \geq \beta. \end{cases} \quad (33)$$

进一步观察 Φ_k 以及 ξ_k 的定义,将 Φ_k 的表达式展开:

$$\Phi_k = \sqrt{(\xi_k)^T \xi_k + \mu^2} = \sqrt{(S_k^{-0.5} \begin{bmatrix} v_k \\ \delta \mathbf{x}_{k/k-1} \end{bmatrix})^T (S_k^{-0.5} \begin{bmatrix} v_k \\ \delta \mathbf{x}_{k/k-1} \end{bmatrix}) + \mu^2}, \quad (34)$$

其中

$$\begin{aligned} (S_k^{-0.5} \begin{bmatrix} v_k \\ \delta \mathbf{x}_{k/k-1} \end{bmatrix})^T (S_k^{-0.5} \begin{bmatrix} v_k \\ \delta \mathbf{x}_{k/k-1} \end{bmatrix}) &= \\ \begin{bmatrix} v_k \\ \delta \mathbf{x}_{k/k-1} \end{bmatrix}^T (S_k^T)^{-0.5} S_k^{-0.5} \begin{bmatrix} v_k \\ \delta \mathbf{x}_{k/k-1} \end{bmatrix} &= \\ v_k^T R_k^{-1} v_k + \delta \mathbf{x}_{k/k-1}^T P_{k/k-1}^{-1} \delta \mathbf{x}_{k/k-1}. & \end{aligned} \quad (35)$$

实际上由于真实状态值 \mathbf{x}_k 不可知,代入回归计算的是外推估计值 $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$,从而在式中 $\delta \mathbf{x}_{k/k-1} = \mathbf{0}$.同时,观测噪声也可视为观测残差,为了与观测残差的经典表示方法一致,令 $e_k = v_k$.因此,有

$$\Phi_k = \sqrt{e_k^T R_k^{-1} e_k + \mu^2}. \quad (36)$$

由式(36)可知, Φ_k 是基于观测残差的一个无量纲数.构造修正因子 Ω :

$$\Omega = \begin{bmatrix} \theta_k I_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times m} & I_{n \times n} \end{bmatrix}. \quad (37)$$

通过修正因子对观测噪声协方差矩阵进行重构,修正后的协方差矩阵为

$$\tilde{S}_k = S_k^{0.5} \Omega^{-1} (S_k^{0.5})^T. \quad (38)$$

结合式(37)和(38)可知,修正因子只对协方差矩阵进行修正,这也与 Φ_k 表达式的含义一致. \tilde{S}_k 也可表示为

$$\tilde{S}_k = \begin{bmatrix} \lambda_k R_k & \mathbf{0}_{m \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times m} & P_{k/k-1} \end{bmatrix}, \quad (39)$$

其中

$$\lambda_k = \begin{cases} 1, & \Phi_k < \beta, \\ \Phi_k, & \Phi_k \geq \beta. \end{cases} \quad (40)$$

易知,基于鲁棒M估计的自适应CKF算法的实质在于修正观测向量的误差协方差.将损失函数最小化,即可得到状态的最佳估计.

现将RMA-CKF的步骤总结如下:

状态更新阶段与式(8)-(11)相同.在量测更新阶段,观测预测值的计算与式(12)-(14)相同, $P_{zz,k/k-1}$ 的计算与式(16)相同, $P_{zz,k/k-1}$ 以及滤波更新的公式为

$$P_{zz,k/k-1}^{\text{RMA}} = \sum_{j=1}^{2n} w_j Z_{j,k/k-1} Z_{j,k/k-1}^T -$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{k/k-1} \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1}^T + \lambda_k R_k, \quad (41)$$

$$K_k^{\text{RMA}} = P_{xz,k/k-1} (P_{zz,k/k-1}^{\text{RMA}})^{-1}, \quad (42)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k}^{\text{RMA}} = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + K_k^{\text{RMA}} (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1}), \quad (43)$$

$$P_{k/k}^{\text{RMA}} = P_{k/k-1} - K_k^{\text{RMA}} P_{zz,k/k-1}^{\text{RMA}} (K_k^{\text{RMA}})^T. \quad (44)$$

由式(20)和(28)可知,本文提出的RMA-CKF算法借鉴了Huber等价权函数的思想,但又与之有明显的不同:Huber方法是对观测值的每一个维度分别进行检测,当某一维度出现野值时,通过权函数降低其权重,抑制野值对状态估计造成的影响;而RMA-CKF算法则是对观测残差的所有维度进行综合评判,再利用修正因子对协方差矩阵 R_k 进行修正.

3.2 算法分析

表1给出了CKF算法、基于Huber M估计的CKF算法(Huber-CKF)、文献[21]提出的基于广义M估计的鲁棒CKF算法(M-estimates based robust cubature Kalman filter, MR-CKF)以及本文提出的RMA-CKF算法的观测噪声协方差矩阵.

表1 算法的协方差矩阵

Table 1 Covariance matrix of algorithms

算法	观测噪声协方差矩阵
CKF	R_k
Huber-CKF	$R_k^{0.5} \Psi^{-1} (R_k^T)^{0.5}$
MR-CKF	$w^{-1} R_k$
RMA-CKF	$\lambda_k R_k$

Huber-CKF算法的稳健因子见式(20).对于MR-CKF算法,其权重因子 w_k 根据3段Huber权函数选取

$$w_k = \begin{cases} 1, & r_k < \chi_{\alpha 1}, \\ \sqrt{\chi_{\alpha 1} / r_k}, & \chi_{\alpha 1} \leq r_k < \chi_{\alpha 2}, \\ 0, & r_k \geq \chi_{\alpha 2}, \end{cases} \quad (45)$$

其中 $r_k = e_k^T P_{zz}^{-1} e_k$.当 $w_k = 0$ 时,取上一时刻估计值的外推预测值 $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$ 及其协方差矩阵 $P_{k/k-1}$ 代入迭代计算过程.

表1比较的几种算法中,除CKF算法外,其余几种算法的观测噪声协方差矩阵 R_k 均与残差有关,且均能够根据残差自适应地调整大小,以抑制野值对状态估计的影响.MR-CKF算法和RMA-CKF算法的稳健因子不会改变各自观测噪声协方差矩阵的条件数,而Huber-CKF算法会因为某单一维度出现野值,导致 Ψ 相应维度的数值较小,从而导致矩阵 $R_k^{0.5} \Psi^{-1} (R_k^T)^{0.5}$ 的条件数增大.

式(17)可以写成以下形式:

$$K_k P_{zz,k/k-1} = P_{zz,k/k-1}. \quad (46)$$

假设 K_k 有微小扰动 δK_k , $P_{zz,k/k-1}$ 的微小扰动为

$\delta P_{zz,k/k-1}, P_{xz,k/k-1}$ 的微小扰动为 $\delta P_{xz,k/k-1}$. 记式 (46) 的扰动方程为

$$(K_k + \delta K_k) \times (P_{zz,k/k-1} + \delta P_{zz,k/k-1}) = P_{zz,k/k-1} + \delta P_{xz,k/k-1}. \quad (47)$$

由式(47)推导可得

$$\frac{\|\delta K_k\|}{\|K_k\|} \leq \frac{\text{cond}(P_{zz,k/k-1})}{1 - \text{cond}(P_{zz,k/k-1})} \times \frac{\|\delta P_{zz,k/k-1}\|}{\|P_{zz,k/k-1}\|} \times \left(\frac{\|\delta P_{zz,k/k-1}\|}{\|P_{zz,k/k-1}\|} + \frac{\|\delta P_{xz,k/k-1}\|}{\|P_{xz,k/k-1}\|} \right). \quad (48)$$

当 $\delta P_{zz,k/k-1}$ 较小时, 式(48)可近似为

$$\frac{\|\delta K_k\|}{\|K_k\|} \leq \text{cond}(P_{zz,k/k-1}) \times \left(\frac{\|\delta P_{zz,k/k-1}\|}{\|P_{zz,k/k-1}\|} + \frac{\|\delta P_{xz,k/k-1}\|}{\|P_{xz,k/k-1}\|} \right). \quad (49)$$

因此, Huber-CKF 算法的观测噪声协方差矩阵条件数增大将导致 $\text{cond}(P_{zz,k/k-1})$ 的增大, 进而影响 K_k 的估计精度. 而增益 K_k 的偏差将影响滤波估计 $\hat{x}_{k/k}$ 及其协方差矩阵 $P_{k/k}$ 的状态估计精度, 导致算法性能的退化. 本文将在后续的仿真实验中对此进行验证.

4 仿真与分析

4.1 仿真条件

采用蒙特卡洛方法对 CKF 算法、UKF 算法、EKF 算法、Huber-CKF 算法、MR-CKF 算法以及本文提出的 RMA-CKF 算法进行了对比实验. 目标的起始位置在笛卡尔坐标系下的坐标为 [8000, 11000, 2000], 其速度向量为 [-50, -100, 0].

为了保证仿真实验的合理性, 两个算例的初始条件相同. 假定真实状态量的过程噪声强度为 $q = 0.1 \text{ m/s}^2$, 测量时间为 100 s, 采样的时间间隔 $\Delta t = 0.2 \text{ s}$, 即采样次数为 500 次. 在仿真实验中, 观测雷达的斜距离噪声标准差为 50 m, 方位角和高低角测量噪声标准差均为 0.5° .

定义位置均方根误差 RMSE 为

$$\text{RMSE} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L [(\hat{x}_{k,i}^P - x_{k,i}^P)^2 + (\hat{y}_{k,i}^P - y_{k,i}^P)^2 + (\hat{z}_{k,i}^P - z_{k,i}^P)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (50)$$

其中: $[\hat{x}_{k,i}^P, \hat{y}_{k,i}^P, \hat{z}_{k,i}^P]$ 为 k 时刻第 i 次仿真的目标位置估计值, 蒙特卡洛次数 $L = 100$ 次, 所有算法均采用 MATLAB 编程实现. 仿真实验采用的硬件配置为: CPU 为酷睿 i5-4200M (主频 2.50 GHz), 4 G 内存, 256 G 固态硬盘. 在计算以下两个仿真算例过程中, 均未采用 CPU 超频技术和多线程技术.

算例 1 量测过程中传感器出现观测野值的概率为 10%, 野值观测噪声的标准差扩大为正常值的 100 倍.

算例 2 量测过程中传感器出现观测野值的概率为 40%, 野值观测噪声的标准差扩大为正常值的 100 倍.

4.2 结果分析

本文选取了文献 [6] 中的 EKF 算法、文献 [7] 中的 UKF 算法、文献 [8] 中的 CKF 算法、文献 [16] 中的 Huber-CKF 算法、文献 [21] 中的 MR-CKF 算法与本文提出的 RMA-CKF 算法进行比较.

表 2 给出了 MR-CKF 算法中权函数阈值的几种匹配方案, 用以选取合适的阈值. 图 1 和图 2 表示几种阈值匹配方案分别与算例 1 和算例 2 相对应的实验条件下的 RMSE. 图 1 表明, 在噪声污染率为 0.1 的情况下, 方案 1-6 都无法收敛, 只有方案 7 和 8 能够收敛; 图 2 表明, 在噪声污染率为 0.4 的情况下, 方案 1-7 都无法收敛, 只有方案 8 能够收敛. 因此, 为了与该算法进行比较, 在接下来的仿真实验中, 权函数的阈值将按照方案 8 来选取, 即 $\chi_{\alpha 1} = 8.5, \chi_{\alpha 2} = 20000$.

表 2 MR-CKF 算法阈值的选取

Table 2 Threshold selection of MR-CKF

方案	$\chi_{\alpha 1}$	$\chi_{\alpha 2}$
1	5.5	10000
2	5.5	20000
3	6.5	10000
4	6.5	20000
5	7.81	10000
6	7.81	20000
7	8.5	10000
8	8.5	20000

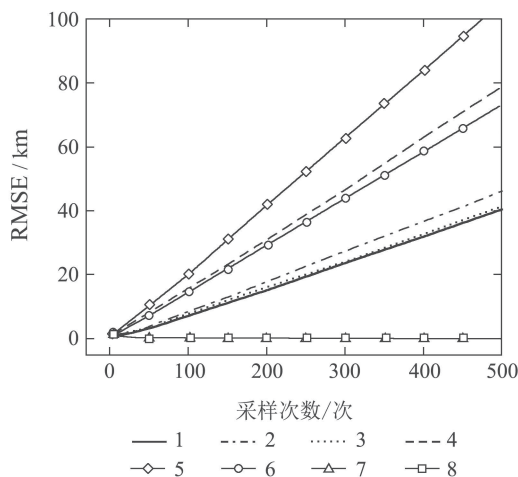


图 1 MR-CKF 算法阈值的选取 (污染率为 0.1)

Fig. 1 Threshold selection of MR-CKF ($\alpha = 0.1$)

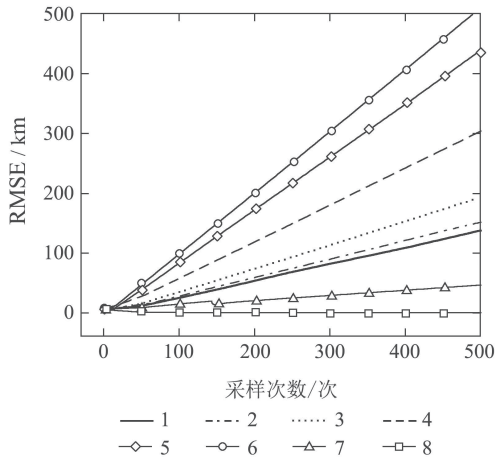


图2 MR-CKF算法阈值的选取(污染率为0.4)
Fig. 2 Threshold selection of MR-CKF ($\alpha = 0.4$)

从以上仿真实验可以看出:

1) 如图1和图2所示, 只有当权函数的阈值依据方案8来选取时, MR-CKF算法才能在噪声污染率分别为0.1和0.4的条件下均收敛. 这是因为在该算法的滤波过程中, 观测野值被舍弃后, 用外推预测值作为这一时刻的估计值, 导致外推预测值与真实状态值之间

的误差不断累积, 进而造成算法发散. 因此, 在实际的工程应用中, MR-CKF算法权函数的阈值需要反复调试, 以避免算法发散.

2) 如图3和图4所示, 在观测噪声中含有不同比例污染噪声的情况下, 各算法都能随着采样次数的增加趋于收敛, 但经过鲁棒处理的算法的估计精度明显比未经过鲁棒处理的算法高. 在图3中, Huber-CKF算法、MR-CKF算法以及RMA-CKF算法的估计精度大致接近, 但仍可以看出Huber-CKF算法比其余两者更差; RMA-CKF算法和MR-CKF算法都是对残差进行综合评价, 能够充分利用观测野值中的有利信息, 从而估计精度比较接近, 且比Huber-CKF算法略高. 在图4中, 当观测噪声中污染噪声的比例进一步提高时, MR-CKF算法的性能退化, 与Huber-CKF算法接近. 这是因为当野值数量增多时, MR-CKF算法中舍弃的观测值增多, 导致外推值与真实值之间的误差持续累积. 图5和图6给出了3种鲁棒化算法在不同条件下的滤波轨迹, 可以看出RMA-CKF算法的滤波轨迹更接近真实轨迹. 表3给出了不同算例中所有采样点的平均RMSE. 由表3可以看出, RMA-CKF算法的估计误差更小, 性能更优.

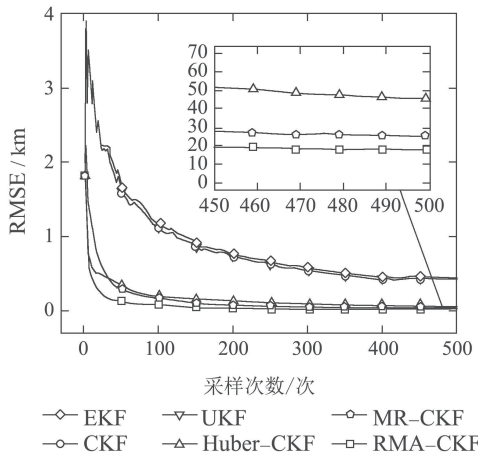


图3 各算法的RMSE比较(算例1)
Fig. 3 RMSE comparison of algorithms (Example 1)

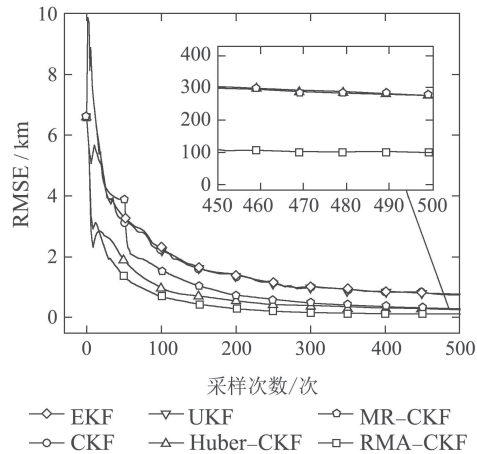


图4 各算法的RMSE比较(算例2)
Fig. 4 RMSE comparison of algorithms (Example 2)

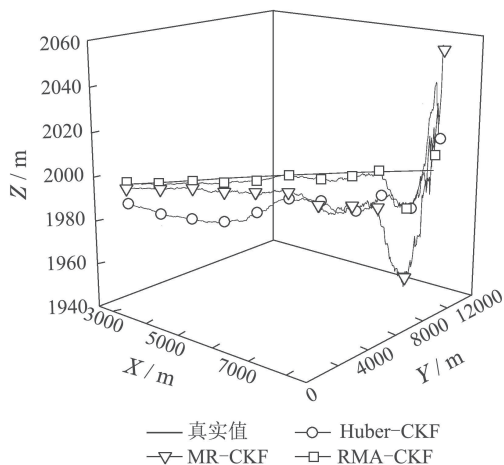


图5 各算法的滤波轨迹(算例1)
Fig. 5 Filtered tracks of algorithms (Example 1)

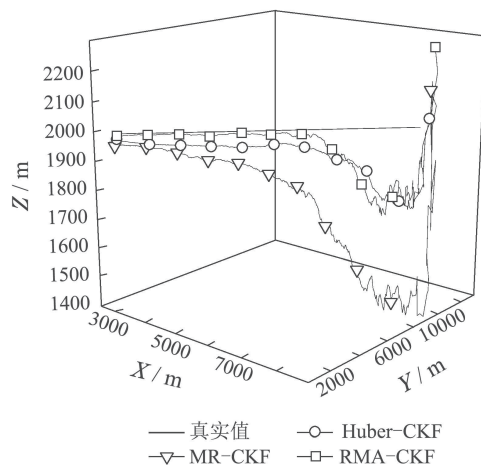


图6 各算法的滤波轨迹(算例2)
Fig. 6 Filtered tracks of algorithms (Example 2)

表 3 各算法的平均RMSE

Table 3 Average RMSE of algorithms

算法名称	Huber-CKF	MR-CKF	RMA-CKF
算例 1/m	160.89	147.43	71.27
算例 2/m	772.66	1146.36	531.51

3) 图 7 和图 8 给出了不同噪声污染率条件下 Huber-CKF 算法与本文算法协方差矩阵条件数的比较. 图中的纵坐标为两种算法协方差矩阵条件数比值的对数, 即

$$\lg[\text{cond}(\sum_{j=1}^{2n} w_j Z_{j,k/k-1} Z_{j,k/k-1}^T - \hat{z}_{k/k-1} \hat{z}_{k/k-1}^T + R^{0.5} \Psi^{-1} (R^T)^{0.5}) / \text{cond}(\sum_{j=1}^{2n} w_j Z_{j,k/k-1} Z_{j,k/k-1}^T - \hat{z}_{k/k-1} \hat{z}_{k/k-1}^T + R_k)].$$

可以看出, Huber-CKF 算法的协方差矩阵的条件数在不同噪声污染率条件下均更大. 由式(49)可知, 野值的出现将导致 Huber-CKF 算法的协方差矩阵的条件数增大, 影响增益的估计精度, 进而导致算法的性能下降. 这也表明 Huber-CKF 算法存在数值稳定性问题.

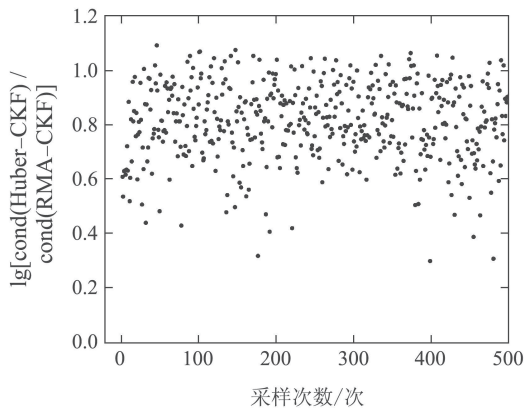


图 7 条件数比较(算例 1)

Fig. 7 Comparison of condition number (Example 1)

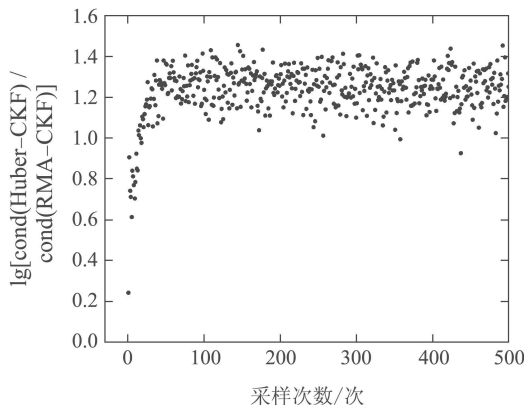


图 8 条件数比较(算例 2)

Fig. 8 Comparison of condition number (Example 2)

4) 表 4 给出了两个算例中各算法的相对运行时间. 从时间复杂度来看, EKF 算法用时最少, CKF 算法次之, UKF 算法用时比 CKF 算法略多. 而在 3 种鲁棒算法中, RMA-CKF 算法用时最少, MR-CKF 算法用时最多, 但三者的运行相对时间差别较小. 这是因为 3 种鲁棒算法都是在 CKF 算法的框架内计算鲁棒因子, 从而计算代价大致相近.

表 4 算法相对运行时间比较

Table 4 Comparison of relative runtime of algorithms

算法名称	EKF	UKF	CKF	Huber-CKF	MR-CKF	RMA-CKF
算例 1	1	4.031	4.011	4.161	4.169	4.111
算例 2	1	4.041	3.936	4.097	4.126	4.038

5 结论

基于平方根平滑逼近函数, 本文构造了一个针对观测野值的修正因子, 进而提出一种基于鲁棒 M 估计的自适应 CKF 算法. 该算法充分利用了观测野值中的有用信息, 克服了 MR-CKF 算法遇到高污染率噪声时 3 段 Huber 权函数阈值难以选取的问题, 同时也具有更好的数值稳定性. 仿真实验证明, RMA-CKF 算法在含有高污染率噪声的情况下能够自适应地抑制野值的影响. 与其他算法相比, 在不大幅增加计算代价的前提下, RMA-CKF 算法获得了较强的鲁棒性, 具有一定的工程应用价值.

参考文献:

- [1] WANG Shaohua, YANG Ying. Quadrotor aircraft attitude estimation and control based on Kalman filter. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(9): 1109 - 1115. (汪绍华, 杨莹. 基于卡尔曼滤波的四旋翼飞行器姿态估计和控制算法研究. *控制理论与应用*, 2013, 30(9): 1109 - 1115.)
- [2] JIN Xin, XIAN Bin. Nonlinear robust control of a tilt tripple-rotor unmanned aerial vehicle with experimental verification. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(10): 1303 - 1310. (金鑫, 鲜斌. 倾转式三旋翼无人机非线性鲁棒控制设计与实验验证. *控制理论与应用*, 2017, 34(10): 1303 - 1310.)
- [3] YANG Chun, ZHANG Lei, GUO Jian, et al. Fault-tolerant integrated navigation algorithm using chi-square test with two state propagators and fuzzy adaptive filter. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(4): 500 - 511. (杨春, 张磊, 郭健, 等. 采用双状态传播卡方检验和模糊自适应滤波的容错组合导航算法. *控制理论与应用*, 2016, 33(4): 500 - 511.)
- [4] FANG M C, LEE Z Y. Application of neuro-fuzzy algorithm to portable dynamic positioning control system for ships. *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*, 2016, 8(1): 38 - 52.
- [5] SUN Jian, DENG Fang, CHEN Jie. Control system of ground-based moving platforms: state of the art and future trends. *Acta Automatica Sinica*, 2018, 44(11): 1985 - 1999. (孙健, 邓方, 陈杰. 陆用运动体控制系统发展现状与趋势. *自动化学报*, 2018, 44(11): 1985 - 1999.)

- [6] MASAZADE E, FARDAD M, VARSHNEY P K. Sparsity-promoting extended Kalman filtering for target tracking in wireless sensor networks. *IEEE Signal Processing Letters*, 2012, 19(12): 845 – 848.
- [7] JULIER S J, UHLMANN J K. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of The IEEE*, 2004, 92(3): 401 – 422.
- [8] ARASARATNAM I, HAYKIN S. Cubature Kalman filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(6): 1254 – 1269.
- [9] HAWKINS D. *Identification of Outliers*. London: Chapman and Hall, 1980: 1 – 3.
- [10] HUBER P J. *Robust Statistics*. Second edition. New Jersey: John Wiley & Sons, 2009: 1 – 5.
- [11] JIANG Haonan, CAI Yuanli. Robust Gaussian-sum ensemble Kalman filter and its application in bearings-only tracking. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(2): 129 – 136.
(姜浩楠, 蔡远利. 鲁棒高斯和集合卡尔曼滤波及其在纯角度跟踪中的应用. *控制理论与应用*, 2018, 35(2): 129 – 136.)
- [12] WANG X, CUI N, GUO J. Huber-based unscented filtering and its application to vision-based relative navigation. *IET Radar, Sonar and Navigation*, 2010, 4(1): 134 – 141.
- [13] ZHU B, CHANG L, XU J, et al. Huber-based adaptive unscented Kalman filter with non-Gaussian measurement noise. *Signal Process*, 2018, 37(9): 3842 – 3861.
- [14] KARLGAARD C D, SCHAUB H. Huber-based divided difference filtering. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2007, 30(3): 885 – 891.
- [15] CHANG L, HU B, CHANG G, et al. Huber-based novel robust unscented Kalman filter. *IET Science, Measurement & Technology*, 2012, 6(6): 502 – 759.
- [16] TSENG C H, LIN S F, JWO D J. Robust Huber-based cubature Kalman filter for GPS navigation processing. *Journal of Navigation*, 2016, 70(3): 527 – 546.
- [17] JIA B, XIN M, CHENG Y. High-degree cubature Kalman filter. *Automatica*, 2013, 49(2): 510 – 518.
- [18] ZHANG X C. Cubature information filters using high-degree and embedded Cubature rules. *Circuits Systems & Signal Processing*, 2014, 33(6): 1799 – 1818.
- [19] ZHANG Wenjie, WANG Shiyuan, FENG Yali, et al. Huber-based high-degree cubature Kalman tracking algorithm. *Acta Physica Sinica*, 2016, 65(8): 088401.
(张文杰, 王世元, 冯雅丽, 等. 基于Huber的高阶容积卡尔曼跟踪算法. *物理学报*, 2016, 65(8): 088401.)
- [20] QIN Kang, DONG Xinmin, CHEN Yong, et al. Huber-based robust generalized high-degree cubature Kalman filter. *Control and Decision*, 2018, 33(1): 88 – 94.
(秦康, 董新民, 陈勇, 等. 基于Huber的鲁棒广义高阶容积卡尔曼滤波算法. *控制与决策*, 2018, 33(1): 88 – 94.)
- [21] WU Hao, CHEN Shuxin, YANG Binfeng, et al. Robust cubature Kalman filter target tracking algorithm based on generalized M-estimation. *Acta Physica Sinica*, 2015, 64(21): 218401.
(吴昊, 陈树新, 杨宾峰, 等. 基于广义M估计的鲁棒容积卡尔曼滤波目标跟踪算法. *物理学报*, 2015, 64(21): 218401.)
- [22] CACCETTA L, QU B, ZHOU G. A globally and quadratically convergent method for absolute value equations. *Computational Optimization & Applications*, 2011, 48(1): 45 – 58.
- [23] KARLGAARD C D, SCHAUB H. Comparison of several nonlinear filters for a benchmark tracking problem. *Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. Chicago: AIAA, 2006: 6243.

作者简介:

彭美康 硕士研究生, 目前研究方向为信息融合与工程优化等,

E-mail: 929602821@whut.edu.cn;

郭蕴华 博士, 教授, 硕士生导师, 目前研究方向为信息融合与工程优化等, E-mail: wtugyh@163.com;

汪敬东 硕士研究生, 目前研究方向为信息融合与工程优化等, E-mail: wjd@whut.edu.cn;

牟军敏 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为智能航海信息处理等, E-mail: moujm@whut.edu.cn;

胡义 博士, 副教授, 硕士生导师, 目前研究方向为船舶动力装置性能优化等, E-mail: huyiwhut@163.com.