

基于非线性状态依赖Riccati方程的直线倒立摆一致性控制

王志晟, 张雪敏[†], 梅生伟

(清华大学 电机工程与应用电子技术系, 北京 100084)

摘要: 直线倒立摆作为一种典型的非线性系统, 是一种经典的控制理论研究对象. 本文将状态依赖的Riccati方程(SDRE)方法与极点配置方法结合, 进行倒立摆非线性控制的研究. 该方法与SDRE相比, 不再需要实时计算Riccati方程, 同时克服了线性最优控制(LQR), 线性鲁棒(H_∞)控制等控制域不足的问题, 可实现几乎任意初始摆角的稳定控制, 而且在稳定点附近保持与某期望的线性控制方法完全相同. 实验表明了该控制方法的有效性和对扰动的鲁棒性. 最后讨论了SDRE进行一致性起摆控制的硬件可行性, 以及系统对于传感器零点漂移的鲁棒性.

关键词: 倒立摆; SDRE控制; 起摆; 传感器误差

引用格式: 王志晟, 张雪敏, 梅生伟. 基于非线性状态依赖Riccati方程的直线倒立摆一致性控制. 控制理论与应用, 2020, 37(4): 739 – 746

DOI: 10.7641/CTA.2019.90229

Consistent nonlinear state-dependent Riccati equation control on the inverted pendulum

WANG Zhi-sheng, ZHANG Xue-min[†], MEI Sheng-wei

(Department of Electrical Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: The inverted pendulum is a typical nonlinear system and a traditional test object on control theories. This study combines the state-dependent Riccati equation (SDRE) method and the pole placement method to give a consistent swinging-up and stabilization control on the inverted pendulum. This method exempts the controller from real-time calculation of the Riccati equations, meanwhile, overcomes the problem that linear quadratic regulator (LQR) controls and linear robust controls have limited control domain. Therefore, this method can accomplish stable control given almost arbitrary initial pendulum angles. Meanwhile, this method converges to the expected linear control near the stable point. Test results validates the feasibility and robustness of this control method. Finally, this paper gives the discussion about consistent swinging-up control and the robustness to the zero drift of sensors.

Key words: inverted pendulum; state dependent Riccati equation (SDRE); swinging-up; sensor errors

Citation: WANG Zhisheng, ZHANG Xuemin, MEI Shengwei. Consistent nonlinear state-dependent Riccati equation control on the inverted pendulum. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(4): 739 – 746

1 引言

倒立摆是一种典型的非线性系统, 广泛应用于控制理论的教学、实验和研究. 倒立摆模型也可以应用于其他工程控制领域, 如机器人控制和模式生成等^[1-3]. 因而, 研究倒立摆对于控制理论的发展和实践均有重要意义.

倒立摆研究可以分为起摆控制和稳态控制两部分. 起摆控制即为将摆杆从自然下垂位置启动到垂直倒立位置附近. 常用的起摆控制有能量控制^[4-5]、遗传算法控制^[6-7]、以及事件驱动的控制^[8-9]等, 也可以将摆

动控制和滑模预测变结构控制结合^[10]. 含有起摆策略的研究一般按照倒立摆与倒立垂直位置的夹角 ϕ 划分不同控制方法的作用域. 如 $|\phi| > 0.2$ 时能量控制或事件驱动控制等起摆控制生效, 而 $|\phi| \leq 0.2$ 时线性最优控制(linear quadratic regulator, LQR), H_∞ 等稳态控制生效, 即分段使用不同控制策略.

针对稳态控制部分, 整体可以划分为线性控制和非线性控制两大类. 稳态控制即为将倒立摆维持在垂直倒立静不稳定点的控制, 如PID控制、线性最优控制(LQR)^[11-12]、线性鲁棒控制(H_∞)^[13]以及模糊控

收稿日期: 2019-04-09; 录用日期: 2019-09-06.

[†]通信作者. E-mail: zxm_ts_ee@163.com; Tel.: +86 10-62782545.

本文责任编辑: 吴敏.

国家自然科学基金项目(51667005), 广西自然科学基金项目(2014GXNSFAA118383)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (51667005) and the National Natural Science Foundation of Guangxi Province (2014GXNSFAA118383).

制^[14-16]等. 研究文献[14]建立了倒立摆的二维模糊控制器, 其利用虚拟角方法耦合两级级联的模糊控制器, 实现了倒立摆的稳定控制. LQR控制拥有最优化目标函数的能力, 可以用于高阶倒立摆的控制, 如张永立等进行的三级倒立摆LQR控制研究^[17], 其使用了动态增益的线性二次控制方法, 并将三级摆的起摆问题整定为两点边值问题. H_∞ 无穷控制能够抑制输入扰动或参数扰动的影响, 从而实现对系统参数和输入扰动的鲁棒性^[13, 18]. 研究文献[18]使用Riccati方程设计线性鲁棒控制器, 使得控制器对于倒立摆系统参数误差的容忍度大幅上升. 但线性控制器仅在倒立平衡点附近小范围内生效, 这是由近似线性化的特征决定的. 因而, 也出现了基于强化学习、模糊控制以及事件驱动控制等非线性控制^[19], 这些非线性控制拥有更大的作用域. 但基于强化学习或模糊控制的方案控制效果更多为经验性结论, 难以数学论证.

本文提出了状态依赖Riccati方程(state-dependent Riccati equation, SDRE)和极点配置方法相结合的非线性控制方法. 相对于已有倒立摆控制方法的优势在于3点: 1) 本文提出的基于SDRE的控制方法实现了倒立摆起摆阶段和稳态阶段的非线性一致性控制, 期间无需进行控制方法切换, 因而可控性更强; 2) 由于其充分考虑了系统非线性, 其有效控制区域不仅限于垂直倒立点附近, 稳定域更大; 3) 使用模糊控制或神经网络也可以实现起摆和稳态一致性控制的需求, 相比这种方法而言, SDRE在具备上一条优点的同时, 还能保证控制计算的精确性, 并简化控制器设计流程. 在远离平衡点时, SDRE呈现非线性控制特性, 而在平衡点附近, SDRE方法可以趋近与某种线性控制器. 这意味着本文仍然可以使用完善的线性控制器设计理论, 如线性最优控制理论和线性鲁棒控制理论等. 随后, 本文讨论了SDRE一致性起摆控制的可行性及仿真验证. 分析了一致性起摆对于实验设备的硬件要求. 最后, 本文根据倒立摆的物理特性, 证明了该系统自身对传感器的零点漂移具有一定鲁棒性. 角度传感器误差一般不会破坏控制稳定.

2 倒立摆模型^[20]

倒立摆(直线一级倒立摆, 如图1所示)由直线运动模块和一级摆组成, 是最常见的倒立摆之一. 根据牛顿力学写出系统的运动方程:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + b\dot{x} - ml\ddot{\phi} \cos \phi + ml\dot{\phi}^2 \sin \phi = F, \\ (J+ml^2)\ddot{\phi} - mgl \sin \phi = ml\ddot{x} \cos \phi, \end{cases} \quad (1)$$

其中: m 为摆杆质量, M 为小车质量, b 为摩擦系数, l 为摆杆转动轴心到杆质心的长度, J 为摆杆以铰链为转轴的转动惯量, 对于质量均匀分布的摆杆的转动惯量 $J = \frac{ml^3}{3}$. x 为小车的位移, F 为加在小车上的力,

θ 为摆杆与垂直向上位置的夹角, ϕ 为摆杆与竖直向下方向的夹角. 将小车的加速度定义为新的控制输入

$$u = \ddot{x} = \frac{F - b\dot{x} + ml\ddot{\phi} \cos \phi - ml\dot{\phi}^2 \sin \phi}{M+m}. \quad (2)$$

方程(1)-(2)可以进一步化为仿射非线性方程

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u, \\ y = h(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (3)$$

其中:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = [x \ \dot{x} \ \phi \ \dot{\phi}], \quad h(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix}, \\ f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ \dot{\phi} \\ \frac{mgl \sin \phi}{J+ml^2} \end{bmatrix}, \quad g(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{ml \cos \phi}{J+ml^2} \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (4)$$

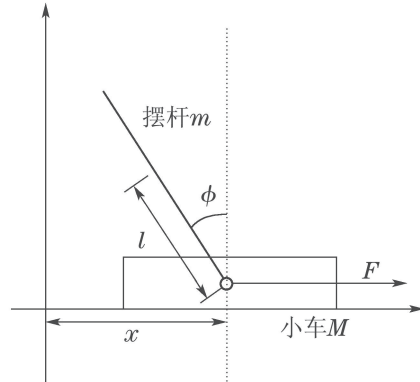


图1 倒立摆系统简化模型

Fig. 1 Simplified model of inverted pendulum system

3 倒立摆的SDRE控制

3.1 SDRE非线性控制

SDRE技术在20世纪90年代逐步发展完善, 是一种较为通用的系统性设计非线性控制器的方法. 顾名思义, 该方法在状态方程中引入了可变量, 延续了LQR控制中的Riccati解法. SDRE方法常用于飞行器控制, 如导航、自动驾驶等等^[21].

SDRE方法将非线性系统由标准型转化为含参数的状态方程形式, 即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u, \\ \Downarrow \\ \dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{x})\mathbf{x} + B(\mathbf{x})u. \end{cases} \quad (5)$$

在式(5)表示下, 系统的能控性和能观性做如下定义:

1) 若非线性系统中的 $A(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x} \in \Omega$ 中的每一点都可控, 则称 $A(\mathbf{x}), B(\mathbf{x})$ 是非线性系统的一种能控的参数化表示; 2) 若非线性系统中的 $A(\mathbf{x}), C(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x} \in \Omega$ 中的每一点能观, 则称 $A(\mathbf{x})$ 是非线性系统的一种能观的参数化表示^[21]. 在验证了系统能控性和能观性后, 利

用SDRE设计非线性控制器有如下流程: 1) 将非线性系统化为含参数状态方程形式; 2) 求解含参数的Riccati方程(SDRE)

$$A(\mathbf{x})P + PA(\mathbf{x}) - PB(\mathbf{x})R^{-1}(\mathbf{x})B^T(\mathbf{x})P + Q(\mathbf{x}) = 0; \tag{6}$$

3) 建立非线性控制律:

$$u = -R^{-1}(\mathbf{x})B^T(\mathbf{x})P(\mathbf{x})\mathbf{x}. \tag{7}$$

3.2 建立倒立摆的含参数状态方程

根据式(3), 并考虑量均匀分布的摆杆的转动惯量 J , 倒立摆系统可化为式(5)所示的含参数状态方程

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3g \sin \phi}{4l\phi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{3 \cos \phi}{4l} \end{bmatrix} u, \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}, \end{cases} \tag{8}$$

若使用LQR或 H_∞ 等线性控制方法, 倒立摆在垂直倒立位置线性化, 其忽略了三角函数的非线性. 这也是在大摆角下线性控制失效的原因. 在SDRE方法中, 系统将不再做三角函数的小角度近似. 验证系统在不同状态的能控性和能观性. 给出能观性判据

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3g \sin \phi}{4l\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3g \sin \phi}{4l\phi} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

计算能控性判据:

$$\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 \cos \phi}{4l} & 0 & \frac{9g \sin \phi \cos \phi}{16l^2\phi} \\ \frac{3 \cos \phi}{4l} & 0 & \frac{9g \sin \phi \cos \phi}{16l^2\phi} & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

考虑到 $\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\sin \phi}{\phi} = 1$, 除 $\pm 0.5\pi$ 两点, 系统都是能观能控的.

SDRE最为直观实现方法是实时计算Riccati方程. 然而, 在每个控制周期内重新数值计算Riccati方程消耗时间较长, 这一延迟对倒立摆控制性能将产生不利影响. 由于系统特征值是决定系统动态特性的最重要因素, 因而本文使用非线性反馈配置系统特征值. 要达到配置特征值的目的, 只需要令两个系统的特征多项式相同即可, 4阶系统的特征方程中有4个系数, 可以实现匹配.

倒立摆系统含参数模型引入状态反馈的闭环控制 $u = [k_{11} \ k_{12} \ k_{13} \ k_{14}]^T \mathbf{x}$ 之后的系统特征多项式为

$$\psi_1(\lambda) = [\lambda^4 \ \lambda^3 \ \lambda^2 \ \lambda^1 \ 1] \times \begin{bmatrix} 1 \\ k_{12} + \frac{3 \cos \phi}{4l} k_{14} \\ k_{11} - \frac{3 \cos \phi}{4l} k_{13} - \frac{3g \sin \phi}{4l\phi} \\ -\frac{3g \sin \phi}{4l\phi} k_{12} \\ -\frac{3g \sin \phi}{4l\phi} k_{11} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

记期望闭环系统为

$$\dot{\mathbf{x}} = (A_0 - B_0 K_0) \mathbf{x}, \tag{12}$$

其系统的特征多项式为

$$\psi_0(\lambda) = [\lambda^4 \ \lambda^3 \ \lambda^2 \ \lambda^1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ \xi_3 \\ \xi_2 \\ \xi_1 \\ \xi_0 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

得到一组方程

$$\begin{bmatrix} 1 \\ k_{12} + \frac{3 \cos \phi}{4l} k_{14} \\ k_{11} - \frac{3 \cos \phi}{4l} k_{13} - \frac{3g \sin \phi}{4l\phi} \\ -\frac{3g \sin \phi}{4l\phi} k_{12} \\ -\frac{3g \sin \phi}{4l\phi} k_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \xi_3 \\ \xi_2 \\ \xi_1 \\ \xi_0 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

解得

$$\begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{13} \\ k_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4l\phi}{3g \sin \phi} \xi_0 \\ \frac{4l\phi}{3g \sin \phi} \xi_1 \\ \frac{4l\phi}{3 \sin \phi} \left(\xi_2 + \frac{4l\phi}{3g \sin \phi} + \frac{3g \sin \phi}{4l\phi} \right) \\ \frac{4l}{3 \cos \phi} \left(\xi_3 + \frac{4l\phi}{3g \sin \phi} \xi_1 \right) \end{bmatrix}. \tag{15}$$

经过如此反馈后,系统的特征值是一个常数,本文可以将系统的极点配置与某个期望系统相同.这也是SDRE区别于其他非线性控制的特点.在平衡点附近,系统特性可以趋近为某个期望系统.这意味着本文可以将SDRE在平衡点附近趋近某个线性控制.而在控制系统的研究中,线性控制的设计分析方法以及应用经验远丰富于非线性控制.本章使用SDRE趋近于线性二次最优控制(LQR)由系统方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u \quad (16)$$

确定控制向量的矩阵

$$u(t) = -K_0x(t), \quad (17)$$

使性能指标达到最小值:

$$J = \int_0^{\infty} (\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + u^T R u) dt. \quad (18)$$

根据性能指标确定反应控制指标对于误差和控制损耗的敏感程度.求解系统的Riccati方程:

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0, \quad (19)$$

得到正定的 P 矩阵,则反馈输出设计为

$$K_0 = R^{-1}B^T P. \quad (20)$$

由此,可以得到线性系统(12)对应的特征多项式系数 $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$,将其代入式(15)得到采用极点配置的SDRE控制参数为

$$\begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{13} \\ k_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\phi k_{01}}{\sin \phi} \\ \frac{\phi k_{02}}{\sin \phi} \\ \frac{4l}{3 \cos \phi} \left(\frac{3k_{03}}{4l} + k_{01} - \frac{3g}{4l} - \frac{k_{01}\phi}{\sin \phi} + \frac{3g \sin \phi}{4l\phi} \right) \\ \frac{4l}{3 \cos \phi} \left(\frac{3k_{04}}{4l} + k_{02} - \frac{k_{02}\phi}{\sin \phi} \right) \end{bmatrix}. \quad (21)$$

当系统状态趋向于平衡点时,SDRE的反馈系数趋向于式(20),即在平衡点附近,SDRE控制的特性与LQR控制几乎相同.

4 算例测试

本文硬件实验使用的是由固高科技(深圳)有限公司提供的直线倒立摆实验装置.它由驱动电机、导轨、角度传感器、小车和摆杆等组件构成,如图2所示.本文的倒立摆实验系统参数如表1所示^[20].

LQR采用的权矩阵如下:

$$Q = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 1. \quad (22)$$

计算得到状态反馈参数为

$$K_0 = [-31.62 \quad -20.15 \quad 72.72 \quad 13.16]. \quad (23)$$

采用极点配置的SDRE控制参数如下:

$$\begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{13} \\ k_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -929.7 \frac{4l\phi}{3g \sin \phi} \\ -592.4 \frac{4l\phi}{3g \sin \phi} \\ \frac{4l}{3 \cos \phi} \left(157.1 + 929.7 \frac{4l\phi}{3g \sin \phi} + \frac{3g \sin \phi}{4l\phi} \right) \\ \frac{4l}{3 \cos \phi} \left(19.31 + 592.4 \frac{4l\phi}{3g \sin \phi} \right) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

实时计算Riccati方程的SDRE控制效果如图3所示.



图2 倒立摆装置图^[20]

Fig. 2 The tested inverted pendulum system^[20]

表1 测试系统参数

Table 1 Detailed parameter of test system

符号	备注	取值
M	小车质量	1.096 kg
m	摆杆质量	0.109 kg
l	摆杆转动轴心到杆质心的长度	0.25 m
J	摆杆的转动惯量	0.0034 kg · m ²

实时计算Riccati方程并给出反馈矩阵这种方式时系统不会失稳,但出现了明显震荡.在倒立摆实验中一般采用小于0.005 s的控制步长,但进行一次Riccati方程的求解需要约0.02 s,因而控制出现震荡.这与实践中很少使用实时求解Riccati方程的事实是吻合的.

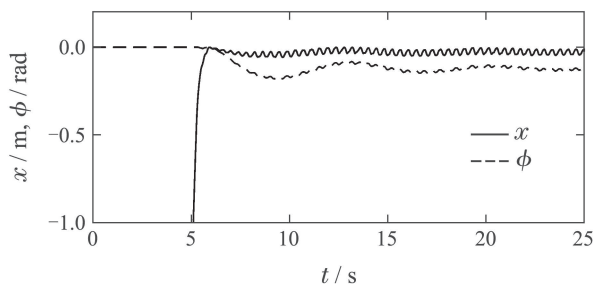
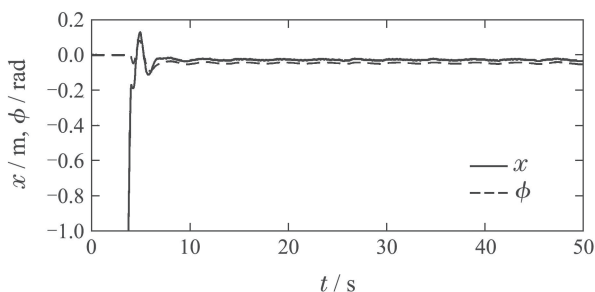


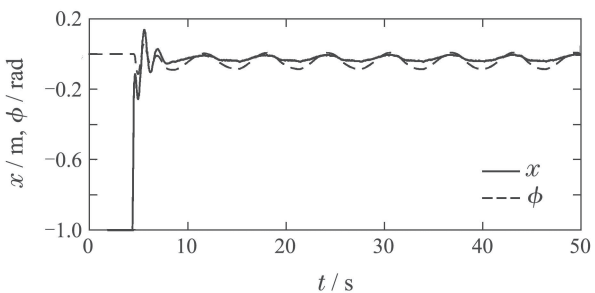
图3 SDRE控制(实时计算Riccati方程)

Fig. 3 SDRE Control (solve Riccati equation online)

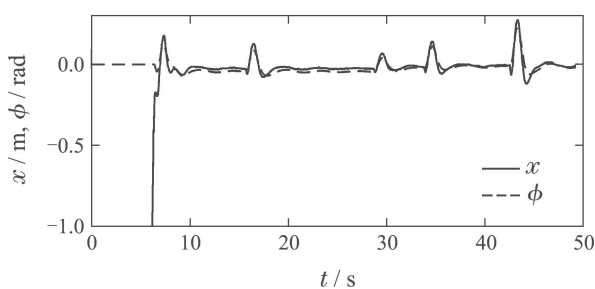
采用配置极点的SDRE控制方法的实验结果如图4所示. 图4表明, 在无扰动、单位正弦输入扰动和外力撞击扰动3种场景下, 倒立摆均能稳定. 这说明采用极点配置的SDRE控制有较好的稳定性和抗干扰能力.



(a) 无扰动



(b) 加入 $\epsilon = \sin t$ 输入扰动



(c) 加入四次外力撞击扰动

图4 SDRE实验测试

Fig. 4 Test of SDRE control

下面采用滑模变结构控制器作为对照(如图5), 比较控制性能. 作为一种非线性控制, 滑模变结构控制器能够实现将倒立摆控制到垂直倒立位置, 但其控制过程出现了明显的毛刺(这一组实验中没有加入任何扰动).

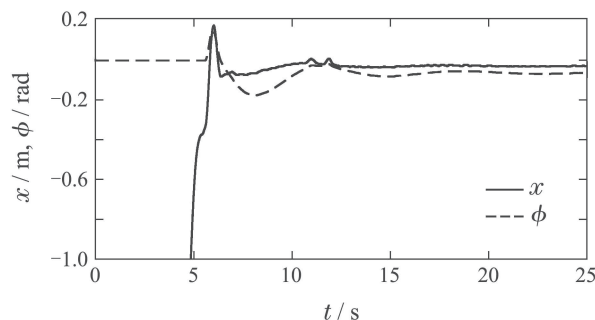


图5 滑模变结构控制实验测试

Fig. 5 Test of the sliding mode control

表2给出了LQR控制、基于极点配置的SDRE和滑模变结构控制下倒立摆系统的二次性能指标. 如表2所示, 可见在稳定点附近, 基于极点配置的SDRE和LQR的目标函数值相近, 这与SDRE在平衡点趋近于LQR控制的事实相符. 而滑模变结构控制时系统波动较大, 指标明显大于前两者.

表2 二次性能指标

Table 2 Value of performance index

序号	控制类型	指标值
1	LQR	22.8
2	极点配置的SDRE	21.3
3	滑模变结构控制	100

如表2所示, 可见在稳定点附近, 基于极点配置的SDRE和LQR的目标函数值相近, 这与SDRE在平衡点趋近于LQR控制的事实相符. 而滑模变结构控制时系统波动较大, 指标明显大于前两者.

为了对比不同控制的稳定域, 本文使用仿真工具测试不同角度初始值 ϕ_{init} 下SDRE和LQR控制能否完成控制, 即将摆杆由初始角度控制到垂直倒立位置. 为标记方便, 在此算例中使用角度制而不是弧度制. 取 $x_{init}, \dot{x}_{init}, \dot{\phi}_{init} = 0$, 令 ϕ_{init} 的取值范围为 $-180^\circ \sim 180^\circ$, 并在控制成功与控制失败的分界点附近增加数据点. 如图6所示, SDRE控制只有在 $\phi_{init} = \pm 90^\circ$ 附近很小区间内控制失败, 在其他位置均可以成功摆杆控制到垂直倒立位置. 对于LQR控制而言, ϕ_{init} 在 $-66.8^\circ \sim 66.8^\circ$ 范围内, 可以将摆杆控制到垂直倒立位置, 而其他位置均控制失败. 倒立摆面临同双摆相似的问题, 如欠驱动、输入饱和及大摆角下线性控制失效等, 特别是在 90° 和 -90° 附近区域. 研究文献[22]中使用的非线性准PID控制方法对于提升倒立摆控制性能有所帮助, 可进一步缩小控制死区.

5 讨论: SDRE一致性起摆对设备的要求

上一节图6(a)中的仿真结果表明, 本文所提方法理论上可以实现倒立摆一致性起摆控制, 即直接使用主控制起摆.

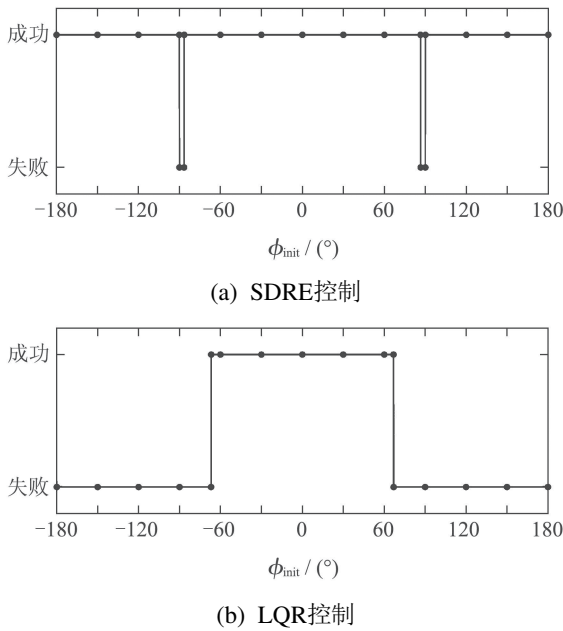


图6 SDRE控制器和LQR控制器的稳定域

Fig. 6 Stability region of SDRE and LQR controllers

在Simulink中仿真验证一致性起摆、稳态控制. 仿真中摆杆初始状态为

$$\begin{cases} \phi_{\text{init}} \doteq \pi, \\ x_{\text{init}}, \dot{x}_{\text{init}}, \dot{\phi}_{\text{init}} \doteq 0. \end{cases} \quad (25)$$

基于极点配置的SDRE控制器作用下的仿真结果如图7所示. 摆杆在SDRE控制下迅速由自然下垂起摆, 并很快稳定于倒立位置. 在此过程中没有进行控制切换.

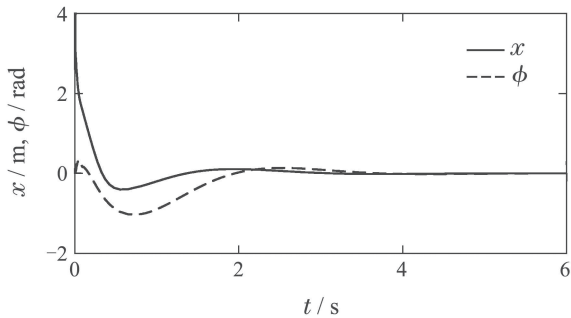


图7 SDRE一致性起摆、稳态控制

Fig. 7 Consistent swing-up and stabilization control

若希望该控制可行, 需要考虑更多实际限制. 从以上分析可以看出, 上述控制的起摆过程非常激烈, 而不是类似能量控制多次将摆杆摆到平衡位置附近. 假设在初始上摆时小车一直处于最大加速度 a_m 状态, 同样在小车所在的非惯性系中考虑该问题. 在这个非惯性系中, 摆杆的运动是一个初始位置为 π , 平衡位置为 $\pi - \frac{2 \arctan a_m}{g}$ 的“单摆”运动, 其能摆到的最高位置是 $\pi - \frac{2 \arctan a_m}{g}$. 在上述控制中, 必须令摆杆摆过水平位置. 也即 $\pi - \frac{2 \arctan a_m}{g} < \frac{\pi}{2}$, $a_m > g$.

即使以最乐观的估计, 希望单摆一次性到达平衡位置所需要系统加速度也要满足 $a_m > g$. 实际应用时往往需要达到 $a_m > 5g$ 同样做近似分析估算所需要的导轨长度. 首先将摆杆摆动周期近似为小幅单摆运动(摆动角度已经很大, 这个近似存在误差), 其半周期为

$$\frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{J}{\sqrt{g^2 + a^2 ml}}}, \quad (26)$$

这段时间内小车的位移是

$$x = \frac{1}{2} a \left(\frac{T}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} a \pi^2 \frac{J}{\sqrt{g^2 + a^2 ml}}. \quad (27)$$

当 $a = g$ 时, 计算得到 $x \approx 1.16l$. 而这还没有计算越过水平线后小车做减速运动时需要的额外距离, 也没有计算控制超调所需要的裕量. 由此可看出, 使用SDRE进行一致性起摆、稳态控制有效几乎覆盖整个圆周, 不需要切换控制, 且起摆速度快, 超调小. 但其对电机转矩输出要求非常高, 对于大型倒立摆实现难度较大, 但在摆杆长度较小、质量较低的场景下仍然可能实现.

6 讨论: 倒立摆系统对传感器误差的鲁棒性及倒立启动问题

倒立摆系统为了保证角度传感器的数值正确, 往往使用重力自准直法校准角度传感器—将摆杆在重力下自然下垂状态下的角度和位移标记为零点. 倒立摆自然下垂启动, 可以由重力保证角度传感器的零点正确, 但若倒立启动, 人眼可能无法保证倒立摆的绝对倒立, 即角度传感器归零不准. 下面将讨论角度或位移传感器归零不准带来的影响. 首先本文给出两个定理及证明.

定理1 不存在某种控制, 使得倒立摆在 $\phi_0 \neq 0$ 点稳定或以远小于 ϕ_0 的振幅等幅震荡.

证 假设该控制可能成立, 即摆杆在 ϕ_0 范围内小幅震荡, $\phi_1 < \phi < \phi_2$, $|\phi_2 - \phi_1| \ll \phi_0$. 记倒立摆到达第 i 个周期中的最大摆角的时间为 t_i . 在小车这一非惯性参考系中考虑该问题. 摆杆到达任意周期内的最大摆角时角速度为零, 则有摆杆在 t_i, t_j 期间内角冲量的积分为零,

$$\int_{t_i}^{t_j} (mgl \sin \phi - mal \cos \phi) dt = 0, \quad \forall i, j. \quad (28)$$

由于 $\phi_1 < \phi < \phi_2$, $|\phi_2 - \phi_1| \ll \phi_0$, 在上式积分时可以认为 ϕ 为常数. 此时可得到

$$\int_{t_i}^{t_j} a dt = \frac{g \sin \phi (t_j - t_i)}{\cos \phi} = g \tan \phi (t_j - t_i). \quad (29)$$

由于 i, j 是任意选取的, 则当 t_i 有限而 $t_j \rightarrow \infty$ 时,

$$\Delta v = \int_{t_i}^{t_j} a dt = g \tan \theta (t_j - t_i) \rightarrow \infty, \quad (30)$$

即小车速度无界, 因此不存在此控制. 证毕.

定理2 若角度或位移传感器零点小幅漂移, 摆杆平衡角度 $\phi_0 = 0$ 不改变, 但会影响小车位移平衡点.

证 考虑平衡点附近情形, 因而可以使用线性化的状态方程分析该问题. 记某种能够使倒立摆稳定的控制(如LQR控制)为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3g}{4l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{3}{4l} \end{bmatrix} u, \\ u = k_1 x + k_2 \dot{x} + k_3 \phi + k_4 \dot{\phi}. \end{cases} \quad (31)$$

若位移传感器和角度传感器分别存在零点漂移 x_f, ϕ_f , 即 $x_{\text{real}} = x_{\text{ob}} - x_f, \phi_{\text{real}} = \phi_{\text{ob}} - \phi_f$, 其中下标real表示真实值, 下标ob表示观测值. 则有

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{\text{ob}} \\ \ddot{x}_{\text{ob}} \\ \dot{\phi}_{\text{ob}} \\ \ddot{\phi}_{\text{ob}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3g}{4l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\text{ob}} - x_f \\ \dot{x}_{\text{ob}} \\ \phi_{\text{ob}} - \phi_f \\ \dot{\phi}_{\text{ob}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{3}{4l} \end{bmatrix} u, \\ u = k_1 x_{\text{ob}} + k_2 \dot{x}_{\text{ob}} + k_3 \phi_{\text{ob}} + k_4 \dot{\phi}_{\text{ob}}. \end{cases} \quad (32)$$

求解新系统的平衡点, 即得到4个方程:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ u = 0, \\ \dot{\phi} = 0, \\ \frac{3g}{4l}(\phi_{\text{ob}} - \phi_f) + \frac{3}{4l}u = 0. \end{cases} \quad (33)$$

解得

$$\begin{cases} \phi_{\text{ob}} = \phi_f, \\ x_{\text{ob}} = -\frac{k_3}{k_1} \phi_f, \end{cases} \quad (34)$$

即

$$\begin{cases} \phi_{\text{real}} = \phi_0 = 0, \\ x_{\text{real}} = -\frac{k_3}{k_1} \phi_f - x_f. \end{cases} \quad (35)$$

上式表明角度和位置传感器误差将不会改变倒立摆摆角的平衡点, 但会造成小车位移平衡点的变化.

证毕.

一般情况下, 倒立摆系统中, 小车位移平衡点不是研究所关注的量. 但若整定参数中 $k_3 \gg k_1$, 则会出现位移平衡点偏离过大而造成的小车撞边问题, 进而造成控制失败.

6.1 角度传感器漂移问题

在实测系统中, 传感器易发生零点漂移, 倒立摆系统涉及位移传感器和角度传感器. 而角度传感器的零点漂移在SDRE实验中可以观察到, 即观测到的平衡

角度, 即 $\phi_0 \neq 0$. 不难理解, 位移传感器的小幅零点漂移从直观上即可判断不会对实验产生影响: 仅仅是平衡位置偏移而已. 但角度传感器的误差则会复杂很多. 由定理1, 不存在某种控制, 使得倒立摆在 $\phi_0 \neq 0$ 点稳定或以远小于 ϕ_0 的振幅等幅震荡.

事实上, 传感器误差在实验中已经有所体现, 在实验测试中, 传感器量测到的小车位移存在明显偏差. 在某次实验中约为9 cm. 这不可能是由传感器误差导致的, 首先位移传感器零点漂移不可能有9 cm, 且位移传感器漂移后会导致小车的实际平衡点偏离, 但传感器记录的平衡点应当仍然为0. 不同实验中传感器显示的小车平衡位置偏离并不相同. 且传感器记录的平衡角度也不为零. 在某次实验中, 倒立摆基本平衡后得某段时间取1000个数据点做均值, 计算得到

$$\text{mean}(\phi_{\text{ob}}) = -0.0393 \text{ rad} = -2.25^\circ. \quad (36)$$

但这1000个数据点得到的 ϕ_{ob} 的标准差

$$\text{std}(\phi_{\text{ob}}) = 0.0024 \text{ rad} \doteq 0.14^\circ. \quad (37)$$

即 ϕ_{ob} 确实不能由随机误差或震荡解释的显著偏差. 若 $\phi_{\text{real}} = \phi_{\text{ob}}$, 则数据与定理1矛盾, 因此传感器必然存在误差. 将式(34)稍作变形:

$$\frac{\phi_{\text{ob}}}{x_{\text{ob}}} = -\frac{k_1}{k_3}, \quad (38)$$

由实验所用参数可得

$$-\frac{k_1}{k_3} = -\frac{-31.6}{72.7} = 0.435, \quad (39)$$

将实测数据代入

$$\frac{\phi_{\text{sen}}}{x_{\text{sen}}} = \frac{-0.0393}{-0.09} = 0.436. \quad (40)$$

可见, 实测数据与理论符合良好. 有理由推定实验设备的角度传感器在平衡点附近有约0.04 rad的误差.

6.2 倒立启动问题

倒立启动最为担心的是无法利用自准直进而角度传感器必然发生零点漂移的问题. 但由上小节所述, 倒立摆系统对于角度传感器和位移传感器的小幅误差有一定的鲁棒性. 且证明实验系统中早已存在角度传感器误差(约为0.04 rad). 但在实验中, 系统并未出现小车匀加速运动最终越限或大幅度的震荡的现象, 而是维持了稳定. 角度传感器的偏差将导致小车平衡点位置的变化, 而这个变化与反馈矩阵系数相关, 系统在这个位置仍能稳定. 即倒立摆的重力自准直矫正不是必须的, 倒立摆也可以采用倒立形态启动.

7 结论

直线倒立摆作为一种典型的非线性系统, 是一种经典的控制研究对象. 本文使用了状态依赖的Riccati方程(SDRE)方法结合极点配置的思路, 进行倒立摆控制的研究. 该方法克服了常见LQR、控制等控制域不

足的问题. 同时具备以下优点:

1) 实现了倒立摆起摆阶段和稳态阶段的一致性控制, 期间无需进行控制方法切换, 可控性更强;

2) 现有两段式倒立摆起摆方法往往使用模糊控制或者能量控制进行起摆操作, 其起摆具有动作平滑的优势, 但速度慢, 达到稳态需要经历多个摆动周期. 本文提出的SDRE起摆方法在短摆杆, 强动力的条件下能够在几乎所有初始角度实现单周期起摆, 以极快的速度达到稳态;

3) 与其他可以实现一致性起摆的控制方法相比, SDRE在具备上一条优点的同时, 还能保证控制计算的精确性, 并简化控制器设计流程. 在远离平衡点时, SDRE呈现非线性控制特性, 而在稳态附近, SDRE方法可以趋近与某种线性控制器. 这意味着本文仍然可以使用完善的线性控制器设计理论, 如线性最优控制理论和线性鲁棒控制理论等.

最后, 本文根据倒立摆的物理特性, 证明了该系统对角度和位置传感器的零点漂移具有一定鲁棒性.

参考文献:

- [1] HUAI Zheng. *Motion control and simulation of foot robots*. Chengdu: University of Electronic Science and Technology, 2013. (怀峥. 足式机器人运动控制与仿真. 成都: 电子科技大学, 2013.)
- [2] CARON S, KHEDDAR A. Dynamic walking over rough terrains by nonlinear predictive control of the floating-base inverted pendulum. *2017 IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. Vancouver: IEEE, 2017: 5017 – 5024.
- [3] KAJITA S, KANEHIRO F, KANEKO K, et al. The 3D linear inverted pendulum mode: A simple modeling for a biped walking pattern generation. *Proceedings of 2001 IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Maui: IEEE, 2001: 239 – 246.
- [4] WU Yuqiang, ZHU Chenglong. Parallel double pendulum energy control with limited track length. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(9): 1254 – 1260. (武玉强, 朱成龙. 车轨长度受限的并行双摆能量控制. 控制理论与应用, 2015, 32(9): 1254 – 1260.)
- [5] CHOU K Y, CHEN Y P. Energy based swing-up controller design using phase plane method for rotary inverted pendulum. *International Conference on Control Automation Robotics & Vision*, 2015: 975 – 979.
- [6] LIU B Y, ZENG Y. On inverted pendulum swing-up control based on genetic algorithm. *Control Engineering of China*, 2010, 17(5): 614 – 617.
- [7] MOBAYEN S. Design of a novel genetic algorithm stabilizer for swing-up stabilization of rotational inverted pendulum system. *2017 14th International Conference on Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications and Information Technology (ECTI-CON)*. Singapore: IEEE, 2017: 860 – 864.
- [8] ARANDA E, GORDILLO F, GUINALDO M, et al. *Periodic Event-Triggered Swing-Up Control of the Inverted Pendulum*. Cham: Springer, 2016.
- [9] DURAND S, CASTELLANO F G, MARCHAND N, et al. Event-based control of the inverted pendulum: Swing up and stabilization. *Control Engineering & Applied Informatics*, 2013, 15(3): 96 – 105.
- [10] HUANG Bin. *Sliding mode predictive variable structure control and its application in inverted pendulum system*. Hangzhou: Zhejiang University, 2007. (黄斌. 滑模预测变结构控制及其在倒立摆系统中的应用. 杭州: 浙江大学, 2007.)
- [11] SHEN P. LQR control of double inverted-pendulum based on genetic algorithm. *Intelligent Control and Automation*. Taipei: IEEE, 2011: 386 – 389.
- [12] ZHANG C J, BAI C Y, DING Y Y, et al. LQR optimal control of triple inverted pendulum based on fuzzy quotient space theory. *IEEE International Conference on Granular Computing*. Hangzhou: IEEE, 2013: 633 – 638.
- [13] WANG C P, CHEN H F, GAO J F, et al. H_∞ robust optimal control for linear double inverted pendulum systems. *Journal of Mechanical & Electrical Engineering*, 2017, 34(5): 425 – 431.
- [14] WU J F, WANG Z. Research on fuzzy control of inverted pendulum. *The 2011 International Conference on Instrumentation, Measurement, Computer, Communication and Control*. Beijing, China: IEEE, 2011: 868 – 871.
- [15] LI Z J, XU C Q. Adaptive fuzzy logic control of dynamic balance and motion for wheeled inverted pendulums. *Fuzzy Sets and Systems*, 2009, 160(12): 1787 – 1803.
- [16] FANG Z H, JIANG Y P, YUAN H. Double closed loop fuzzy control of two-stage rotation inverted pendulum. *Experimental Technology and Management*, 2017, 34(6): 50 – 58.
- [17] ZHANG Yongli, CHENG Huifeng. The swing-up and stabilization of the triple inverted pendulum. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(1): 37 – 45. (张永立, 程会锋. 三级倒立摆的自动摆起与稳定控制. 控制理论与应用, 2011, 28(1): 37 – 45.)
- [18] DONG Jie, WANG Lei. Design of single inverted pendulum controller based on H_∞ robust control. *Industrial Control Computer*, 2013, 26(3): 38 – 39. (董杰, 王雷. 基于 H_∞ 鲁棒控制的单级倒立摆控制器设计. 工业控制计算机, 2013, 26(3): 38 – 39.)
- [19] RAJ S. Reinforcement learning based controller for stabilization of double inverted pendulum. *IEEE International Conference on Power Electronics, Intelligent Control and Energy Systems*. Delhi: IEEE, 2017: 1 – 5.
- [20] GU Hi-tech (Shenzhen) Co., Ltd. *Handbook of Data for Inverted Pendulum Experimental System*, 2017. (固高科技(深圳)有限公司. 倒立摆实验系统数据手册, 2017.)
- [21] CLOUTIER J R. State-dependent Riccati equation techniques: An overview. *American Control Conference*. Albuquerque: IEEE, 1997: 932 – 936.
- [22] SUN N, YANG T, FANG Y C, et al. Transportation control of double-pendulum cranes with a nonlinear quasi-PID scheme: Design and experiments. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*. 2019, 49(7): 1408 – 1418.

作者简介:

王志晟 硕士研究生, 研究方向为电力信息物理系统和非线性控制, E-mail: delbert.wang@outlook.com;

张雪敏 副教授, 研究方向为电力系统优化控制与可再生能源, E-mail: zxm.ts_ee@163.com;

梅生伟 教授, 研究方向为电力系统鲁棒控制与博弈, E-mail: meishengwei@mail.tsinghua.edu.cn.