

不确定海流环境下水下机器人最优时间路径规划

姚绪梁¹, 王峰¹, 王景芳^{1†}, 王晓伟²

(1. 哈尔滨工程大学 自动化学院, 黑龙江 哈尔滨 150001; 2. 江西九江职业技术学院, 江西 九江 332000)

摘要: 为解决海流预测不精确条件下, 现有基于确定性海流路径规划算法鲁棒性差和规划的路径有可能为不可行路径的问题, 本文提出一种基于区间优化的水下机器人(AUV)最优时间路径规划算法. 该算法采用双层架构, 外层用蚁群系统算法(ACS)寻找由起点至终点的候选路径; 内层以区间海流为环境模型, 计算候选路径航行时间上下限, 并分别通过区间序关系和基于可靠性的区间可能度模型将航行时间区间转换为确定性评价函数, 并将评价函数值作为候选路径适应度值返回到外层算法. 仿真结果表明, 相对于确定海流场路径规划方案, 提出的方案增强了路径规划器的鲁棒性并解决了结果路径不可行问题.

关键词: 水下机器人; 路径规划; 不确定性; 区间优化

引用格式: 姚绪梁, 王峰, 王景芳, 等. 不确定海流环境下水下机器人最优时间路径规划. 控制理论与应用, 2020, 37(6): 1302 – 1310

DOI: 10.7641/CTA.2019.90273

Time-optimal path planning for autonomous underwater vehicles with uncertain ocean currents

YAO Xu-liang¹, WANG Feng¹, WANG Jing-fang^{1†}, WANG Xiao-wei²

(1. College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin Heilongjiang 150001, China;

2. Jiujiang Vocational and Technical College, Jiujiang Jiangxi 332000, China)

Abstract: Under the condition of inaccurate measurement or prediction of ocean currents, the existing path planning algorithms based on deterministic ocean currents have low robustness and the resultant paths may be infeasible. To solve these problems, this paper presents a time-optimal path planning algorithm for autonomous underwater vehicles (AUVs) based on the interval optimization. The proposed scheme adopts a two-layer architecture. The outer layer uses ant colony system (ACS) algorithm to find candidate path from starting point to end point; In the inner layer, the upper and lower bounds of travelling time for candidate path are calculated under the environment model of interval ocean currents. Then, the travelling time interval is transformed into a deterministic value by interval order relation and reliability-based possibility degree of interval, and the value is returned to the outer layer as the fitness value of candidate path. The simulation results show that, comparing with the path planning scheme with deterministic ocean currents, the proposed scheme enhances the robustness of path planner and solves the problem that the resultant path may be infeasible.

Key words: autonomous underwater vehicles; path planning; uncertainty; interval optimization

Citation: YAO Xuliang, WANG Feng, WANG Jingfang, et al. Time-optimal path planning for autonomous underwater vehicles with uncertain ocean currents. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(6): 1302 – 1310

1 引言

水下机器人 (autonomous underwater vehicle, AUV) 是海洋探索与研究的重要工具. 它是一种依靠自主导航、决策系统航行到作业区域, 并完成任务的水下机器人. 在复杂的海洋环境中, 为了使 AUV 能够安全有效的到达预定区域, 适合的路径规划算法是必

要的. 路径规划也是自主水下机器人领域的研究热点之一, 其对于提升 AUV 的自主性具有重要意义^[1].

在海洋环境中, 海流作为一种广泛存在的海水流动现象, 其对 AUV 航行的影响不容忽视. 如何合理的利用海流能量对 AUV 航行路径进行预规划, 使 AUV 高效、安全的抵达目标区域, 已成为近年来 AUV 路径

收稿日期: 2019-04-20; 录用日期: 2019-11-19.

†通信作者. E-mail: jingfangwang@hrbeu.edu.cn; Tel.: +86 18946032562.

本文责任编辑: 黄攀峰.

中国高技术船舶科研项目(KY10400170181)资助.

Supported by the High Technology Vessel Project of China (KY10400170181).

规划的主要研究内容之一. 然而, 由于海洋环境的复杂性, AUV的工作空间存在诸多的不确定因素, 如障碍物位置信息的不确定性^[2-3], 导航不确定性^[4-5]及由海流的时变性及海流预测系统的不精确导致的海流信息的不确定性^[6]等. 当前多数AUV全局路径规划算法以精确海洋信息为环境模型^[2-3, 7-8], 但由于海流不确定性问题, 其得到的路径鲁棒性较差, 甚至有可能出现AUV不能抵达终点的情况. 针对AUV航行中的安全性问题, 国内外学者提出了多种方法解决不确定性问题, 如对障碍物进行膨胀处理^[2-3], 基于区间优化算法解决障碍物不确定性问题^[9], 基于非精确导航信息下的AUV路径规划方法^[4-5]等. 然而, 上述方法均未考虑海流不确定性带来的影响.

由于对海流的利用是AUV最优时间及最优能耗路径规划的基础, 因此对海流不确定性的处理显得尤为重要, 且更具实际意义. 文献[10]中考虑了由海流变化、预测不精确及航行误差所引起的不确定性问题, 但其并未在路径规划的过程中引入不确定性, 而是采用重新规划的方法进行弥补. 文献[11]提出一种基于马尔可夫决策过程的路径规划算法, 解决了不确定流场下无人机的路径规划问题. 其需要进行多次规划, 从多条路径中选择被经过最多的节点, 以确定最优路径. 该方法实现了不确定流场下的路径规划问题, 但没有综合的考虑不确定性带来的影响.

鉴于此, 本文针对海流信息的不确定性, 将海流信息作为区间参数处理, 提出一种基于区间优化的双层架构的时间最优路径规划算法. 并通过仿真验证所提出方案的可行性.

2 问题陈述

本章主要对AUV最优时间路径规划相关的环境模型、路径形式和路径能耗计算等进行详细介绍.

2.1 基于海流不确定性的环境模型

海流是广泛存在于海洋的海水流动现象, 海流信息可以通过卫星观测、高频雷达测量等手段获取. 目前, 一些海流预测系统已经取得了广泛的认可并应用于实际中, 如区域海洋模型系统(regional ocean model system, ROMS)已被用于美国西海岸的海洋过程研究, 其预测精度为1 km^[12]. 然而, 海流预报是一个复杂的过程, 也是物理海洋学研究的热门领域. 首先, 海流预测系统需要建立一系列动态模型(如Navier-Stokes方程), 并用来源于卫星观测、高频雷达和舰载声学测量仪的数据对这些模型进行初始化并提供边界条件. 但是, 海洋动力学的复杂性及测量设备精度有限导致在这些模型中存在不确定性. 另外, 海流预测系统仅给出离散的海流数据, 即用一个海流值表示一定范围的海流, 这种形式的海流数据本身也会存在不精确性, 这进一步增加了海流数据的不确定性. 因此, 在借助

海流进行路径规划的算法中, 需要考虑由海流信息不确定性带来的影响.

在本文中, 海流信息被作为区间参数处理, 海流方向和大小区间分别表示为 $[lb_{cd}, ub_{cd}]$ 和 $[lb_{cm}, ub_{cm}]$. 其中 $lb_{cd}, ub_{cd}, lb_{cm}, ub_{cm}$ 表达式如下:

$$\begin{cases} lb_{cd} = c_{dN} - v, \\ ub_{cd} = c_{dN} + v, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} lb_{cm} = c_{mN} - \sigma, \\ ub_{cm} = c_{mN} + \sigma, \end{cases} \quad (2)$$

式中: c_{dN} 和 c_{mN} 分别为海流方向和大小的名义值, 其值取海流预测系统的预测值; v 和 σ 分别表示海流方向和大小的不确定性水平.

在海洋环境中, 垂直流相对于AUV巡航速度及水平流较弱^[2-3], 在AUV路径规划中, 通常忽略垂直流对AUV运动的影响. 海流区间如图1所示, c_N 为名义海流矢量, 阴影部分表示海流矢量的范围.

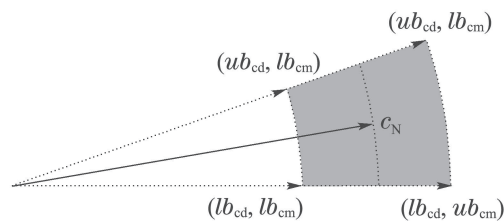


图1 海流区间

Fig. 1 Ocean current interval

基于区间海流, 本文采用栅格法建立3-D环境模型, 栅格尺寸为0.5 km. 海流模型为分层结构, 每一层的海流名义值数据被模拟为随机分布的旋涡场的叠加. 旋涡场公式如下:

$$\text{eddy}\{p, a\} : \begin{cases} f(x, y) = (x - p_x)^2 + (y - p_y)^2, \\ c_x = [-|a_x| \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - a_y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}] \cdot \frac{1}{2f}, \\ c_y = [\text{sgn } a_y \cdot |a_x| \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - |a_y| \cdot \frac{\partial f}{\partial y}] \cdot \frac{1}{2f}, \end{cases} \quad (3)$$

式中: p_x, p_y 分别为旋涡中心 p 在 x, y 轴的坐标; c_x, c_y 分别为洋流在 x, y 轴的大小; a_x, a_y 为旋涡场的强度系数, 其中 a_y 的正负决定了旋涡场的旋转方向, 当 a_y 为正时, 旋涡场旋转方向为顺时针; 反之, 则为逆时针. $\text{sgn}(\cdot)$ 为符号函数. 海流场公式如下:

$$F = \sum_{i=1}^n \text{eddy}\{\text{rand}(p_i), \text{rand}(a_i)\}, \quad (4)$$

式中: $\text{rand}(\cdot)$ 表示随机函数, 海流场由 n 个旋涡场叠加而成. 图2为3-D海洋环境模型, 其中球体代表障碍物.

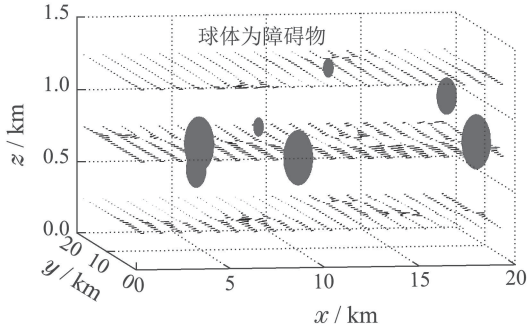


图2 3-D海洋环境模型

Fig. 2 3-D ocean environment model

2.2 路径形式

在本文中, 路径 $\Gamma_{s,g}$ 由一组位于栅格中心的有序路径点 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 两两连接而成, 任意两个相邻路径点由直线连接, 路径 $\Gamma_{s,g}$ 表达式如下:

$$\Gamma_{s,g} = \{\overrightarrow{x_1x_2}, \overrightarrow{x_2x_3}, \dots, \overrightarrow{x_{n-1}x_n}\}, \quad (5)$$

其中路径点 x_1 和 x_n 分别为路径 $\Gamma_{s,g}$ 的起点 s 和终点 g .

AUV沿 $\Gamma_{s,g}$ 航行的能量消耗为各子路径 $\overrightarrow{x_i x_{i+1}}$ 能量消耗之和:

$$E(\Gamma, \vec{c}_i) = \sum_{i=1}^{n-1} e_i = \sum_{i=1}^{n-1} P_{\text{vehicle}} \cdot t_i = \sum_{i=1}^{n-1} (\omega_0 + k|\vec{v}_c|^3) \cdot \frac{|\overrightarrow{x_i x_{i+1}}|}{|\vec{v}_{g,i}|}, \quad (6)$$

式中: e_i 为子路径 $\overrightarrow{x_i x_{i+1}}$ 的能量消耗, 由于子路径数量比路径点数量少一个, 因此求和变量 i 的取值范围为 $[1, n - 1]$; P_{vehicle} 为AUV推进功率, 其与AUV推进速度三次方成正比; ω_0 为AUV机载载荷, 其值由AUV内传感器, 控制系统等的功耗决定, 一般作为常值处理; k 为阻力系数, 其值由AUV设计决定; \vec{v}_c 为AUV的推进速度; $\vec{v}_{g,i}$ 为AUV在子路径 $\overrightarrow{x_i x_{i+1}}$ 航行时相对于海底速度, 其中 $\vec{v}_{g,i}$ 可通过 \vec{v}_c 与洋流 \vec{c}_i 矢量合成得到:

$$\vec{v}_{g,i} = \vec{v}_c + \vec{c}_i. \quad (7)$$

由于AUV在航行过程中, 通常以恒定速度航行. 因此, 本文假设AUV推进速度恒定, AUV能量消耗仅与航行时间有关, 即时间最优路径规划问题.

3 基于区间优化的路径规划算法

基于区间优化的AUV路径规划问题可表述如下:

$$\begin{cases} \min E(\Gamma, C), \\ \text{s.t. } C \in C^I = [C^L, C^R], \\ \Gamma \cap \text{Obs} = \emptyset, \end{cases} \quad (8)$$

式中: Γ 表示由起点至终点的航行路径, C 为 n 维海流向量, 其维数与路径 Γ 所经过的栅格数量相等. 与传统基于确定性海流的路径规划不同的是, 每一维海流向量由方向区间及大小区间构成, 即 $[lb_{cd}, ub_{cd}]$ 和 $[lb_{cm}, ub_{cm}]$. Obs代表障碍物. $\Gamma \cap \text{Obs} = \emptyset$ 表示所得路径与障碍物无交集, 即路径不会穿过障碍物.

因为海流向量 C 是区间数, 因此对于任意确定的

路径 Γ , 目标函数 $E(\Gamma, C)$ 的取值通常也为区间, 称该区间为响应区间, 记为 $[E_{\Gamma,C}^L, E_{\Gamma,C}^R]$. 因此, 在评估每条候选路径时, 首先需要根据区间海流向量确定该条路径的响应区间. 其次根据该区间综合评估候选路径的适应度值, 以比较各候选路径的优劣.

本文的路径规划算法为双层结构, 其中内层算法的作用是确定区间海流环境下的候选路径的响应区间, 并根据该响应区间确定适应度值. 外层算法采用蚁群系统算法(ant colony system, ACS)^[13], 根据内层算法返回的适应度值搜索最优路径, 算法流程图如图3所示.

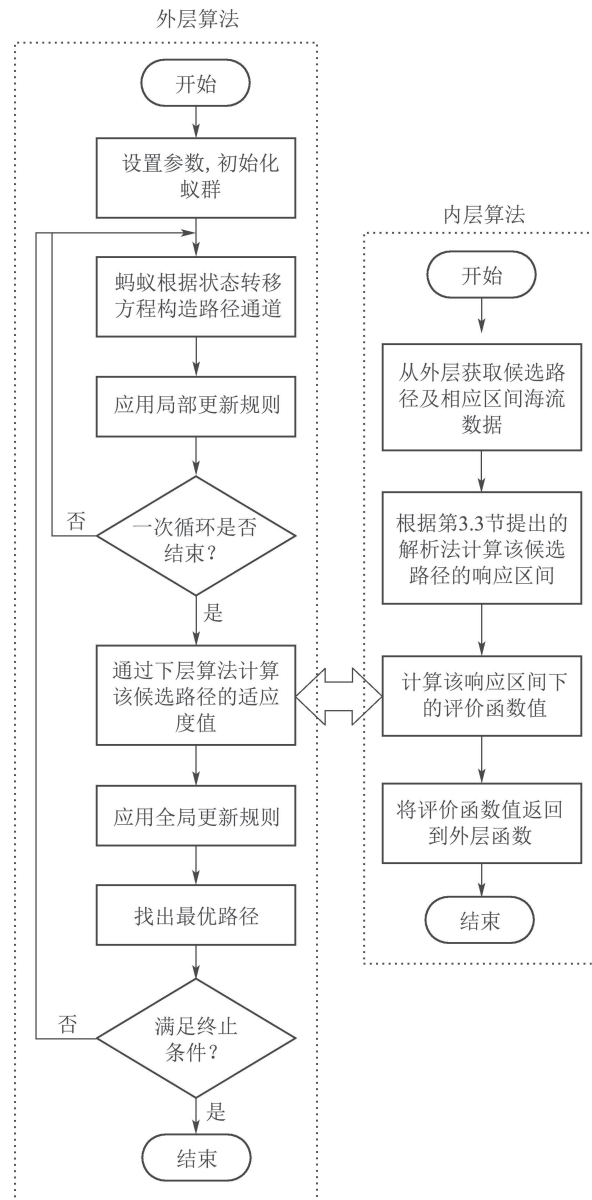


图3 基于区间海流的路径规划算法流程图

Fig. 3 Flow chart of path planning algorithm based on ocean currents interval

需要注意的是, A*等图搜索算法也可以作为外层优化算法. 然而, 相对于A*等图搜索算法, 蚁群系统算法在大范围、高维度搜索空间的计算效率较高. 并

且在实际应用中, 可以通过并行策略, 进一步提高其计算效率. 因此, 本文选择蚁群系统算法作为外层算法. 并且在本文的环境模型中, A*算法中启发式函数 H 的设计比较困难. 根据 A* 算法理论, 其性能很大程度上由 H 函数决定, 即 H 值越接近真实值, 算法性能越好, 且要求 H 值小于真实值. 以响应区间 $E_A^L = [E_A^L, E_A^R]$ 的平均值为例, 难以确定在何种区间海流影响下, 其平均值最小. 因为当 E_A^L 最小时, E_A^R 的值未必为最小; 反之亦然.

另外, 区间转换模型中, 大部分涉及到两个以上参数, 而这些参数的最小化通常需要不同的海流条件, 例如可靠性模型中, 需要计算 E_A^L 和 E_A^R . 然而, 为保证 E_A^L 小于真实值, 需要假定海流为最大值; 而对于 E_A^R , 需要假定海流为最小值. 这种设计方法可保证 H 值小于真实值, 但极大地降低了启发式函数 H 的引导作用.

3.1 外层蚁群系统算法

在外层算法中, 蚂蚁 k 由栅格 i 向其邻域移动的状态转移方程为

$$j = \begin{cases} \arg \max_{h \in N_i^k} \{[\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]^\beta\}, & \text{如果 } q \leq q_0, \\ J, & \text{其他,} \end{cases} \quad (9)$$

其中: j 代表下一个被访问的栅格; τ_{ih} 和 η_{ih} 分别为栅格 i, h 之间的信息素和启发式信息; α 与 β 分别代表信息素与启发式信息在蚂蚁构建路径过程中的重要性; q 是均匀分布在区间 $[0, 1]$ 中的一个随机变量; q_0 为 $[0, 1]$ 之间的一个参数; J 为根据概率分布产生出来的一个随机变量, 其概率分布公式如下:

$$p_{ij}^k = \frac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{h \in N_i^k} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]^\beta}, \quad j \in N_i^k. \quad (10)$$

根据式(9)蚂蚁构造路径通道的方式可以理解, 蚂蚁选择当前可能的最优移动方式的概率为 q_0 , 这种最优的移动方式是根据信息素的积累量和启发式信息值求出的. 同时, 蚂蚁以 $(1 - q_0)$ 的概率有偏向性的探索其他路径. 通过调整参数 q_0 , 可以调节算法对新路径的探索度.

局部信息素更新规则: 在路径构建过程中, 蚂蚁每经过一条边 (i, j) , 都将立即调用这条规则更新该边上的信息素:

$$\tau_{ij} = (1 - \xi)\tau_{ij} + \xi\tau_0, \quad (11)$$

其中: ξ 为局部信息素蒸发系数, 其值满足 $0 < \xi < 1$; τ_0 是信息素量的初始值. 局部更新的作用在于, 蚂蚁每一次经过边 (i, j) , 该边的信息素 τ_{ij} 将会减少, 从而使得其他蚂蚁选中该边的概率相对减少.

全局信息素更新规则: 在 ACS 中, 只有至今最优蚂蚁被允许在每一次迭代之后释放信息素. 其更新规则由下式给出:

$$\tau_{ij} = (1 - \rho)\tau_{ij} + \rho \cdot \Delta\tau_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \Gamma_{s,g}, \quad (12)$$

其中 $\Delta\tau_{ij} = 1/E^*$, E^* 为至今最优路径航行时间.

3.2 内层基于区间海流的适应度值计算

在给定路径的条件下, 内层算法需要根据相应的区间海流计算该路径的响应区间, 即最大能量消耗和最小能量消耗. 在内层算法中, 可以采用寻优算法搜索出最大和最小能量消耗, 如量子粒子群等算法 (quantum particle swarm optimization, QPSO). 然而, 这样的设计会导致计算效率下降, 计算时间增加. 因此, 本文通过解析法 (analytical method, AM) 计算区间海流环境下的响应区间.

为方便分析, 首先给出以下定理, 并令 \vec{c} 表示海流矢量, $\vec{x}_i \vec{x}_{i+1}$ 表示 AUV 预航行矢量, θ 代表 \vec{c} 与 $\vec{x}_i \vec{x}_{i+1}$ 的夹角.

定理 1 当 $|\vec{c}|$ 及 $|\vec{v}_c|$ 固定时, 对于 $\forall \theta_1, \theta_2$, 若 $\theta_1 < \theta_2$, 则对应于 θ_1 的 AUV 相对于海底的速度 $|\vec{v}_{g1}|$ 大于对应于 θ_2 相对于海底的速度 $|\vec{v}_{g2}|$.

证 1) 当 $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi/2$ 时, 根据式(7), AUV 相对于海底的速度 $\vec{v}_g = \vec{v}_c + \vec{c}$, 将 \vec{v}_c 和 \vec{c} 分别按 \vec{v}_g 的法线和切线方向分解, 可得如下表达式:

$$\begin{cases} \vec{v}_c^t + \vec{c}^t = \vec{v}_g, \\ \vec{v}_c^s + \vec{c}^s = 0, \end{cases} \quad (13)$$

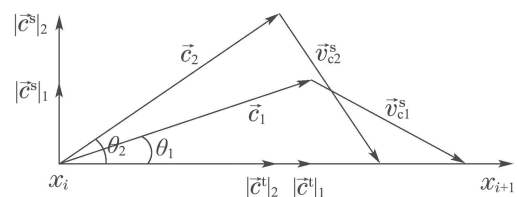
式中上角标 s 与 t 分别代表法线与切线方向.

由图4(a)及表达式(13)可知, 当 $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi/2$ 时, $|\vec{c}^s|_1 < |\vec{c}^s|_2 \Rightarrow |\vec{v}_c^s|_1 < |\vec{v}_c^s|_2$. 由于 $|\vec{c}|$ 及 $|\vec{v}_c|$ 固定, 因此 $|\vec{v}_c^t|_1 > |\vec{v}_c^t|_2$ 且 $|\vec{c}^t|_1 > |\vec{c}^t|_2$, 即 $|\vec{v}_g|_1 > |\vec{v}_g|_2$.

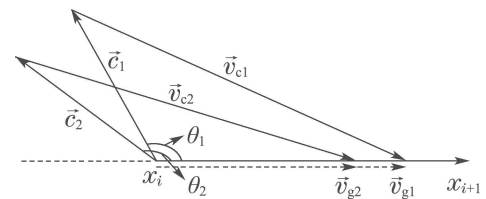
2) 当 $\pi/2 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$ 时, 如图4(b)所示, 根据余弦定理可得如下关系:

$$\begin{cases} |\vec{v}_g|_1^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{v}_g|_1 \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \theta_1 = |\vec{v}_c|^2, \\ |\vec{v}_g|_2^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{v}_g|_2 \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \theta_2 = |\vec{v}_c|^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$|\vec{v}_g|_1^2 - |\vec{v}_g|_2^2 = 2|\vec{v}_g|_1 \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \theta_1 - 2|\vec{v}_g|_2 \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \theta_2.$$



(a) $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi/2$



(b) $\pi/2 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$

图 4 $\theta_1 < \theta_2$ 时, 海流、推进速度和相对于海底速度矢量示意图

Fig. 4 The relationship of ocean current, thrust velocity and vehicle velocity relative to seabed when $\theta_1 < \theta_2$

利用反证法, 假设 $|\vec{v}_g|_1 < |\vec{v}_g|_2$, 则

$$\begin{aligned} & 2|\vec{v}_g|_1 \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \theta_1 - 2|\vec{v}_g|_2 \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \theta_2 < 0 \Rightarrow \\ & |\vec{v}_g|_1 \cdot \cos \theta_1 < |\vec{v}_g|_2 \cdot \cos \theta_2 \Rightarrow \\ & \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} > \frac{|\vec{v}_g|_2}{|\vec{v}_g|_1} > 1 \Rightarrow \cos \theta_2 > \cos \theta_1 \Rightarrow \theta_2 < \theta_1. \end{aligned}$$

推导与已知矛盾, 因此, 当 $\pi/2 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$ 时结论成立. 证毕.

定理 2 当 θ 及 $|\vec{v}_c|$ 固定时, 若 $0 \leq \theta < \pi/2$, $|\vec{v}_g|$ 与 $|\vec{c}|$ 的关系为凸函数, 且 \vec{c} 与 \vec{v}_c 垂直时, $|\vec{v}_g|$ 最大; 若 $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, $|\vec{v}_g|$ 与 $|\vec{c}|$ 的关系为单调递减.

证 1) 当 $0 \leq \theta < \pi/2$ 时, 如图5(a)所示, 根据正弦定理可得如下表达式:

$$\frac{\sin \theta}{|\vec{v}_c|} = \frac{\sin \alpha}{|\vec{v}_g|},$$

式中 α 为 \vec{c} 与 \vec{v}_c 的夹角. 由于 θ 与 $|\vec{v}_c|$ 固定, 因此 $\sin \alpha / |\vec{v}_g|$ 为常数, 当 $\alpha = \pi/2$, 即 \vec{c} 与 \vec{v}_c 垂直时, $|\vec{v}_g|$ 取得最大值. 另外, 以 $\alpha = \pi/2$ 时的 \vec{c} 为基准, $|\vec{c}|$ 继续增加(或减小), α 随之单调减小(或增加), $\sin \alpha$ 均随之减小. 因此, 当 $0 \leq \theta < \pi/2$, $|\vec{v}_g|$ 与 $|\vec{c}|$ 的关系为凸函数, 且 \vec{c} 与 \vec{v}_c 垂直时, $|\vec{v}_g|$ 最大.

2) 当 $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ 时, 如图5(b)所示, 与情况1类似, $|\vec{v}_g| = |\vec{v}_c| \sin \alpha / \sin \theta$. 然而由于 $\theta \geq \pi/2$, 因此 $\alpha < \pi/2$. 另外, 随着 $|\vec{c}|$ 的增大(或减小), α 随之单调减小(或增加), $\sin \alpha$ 随之增大(或减小). 因此, 当 $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, $|\vec{v}_g|$ 与 $|\vec{c}|$ 的关系为单调递减. 证毕.

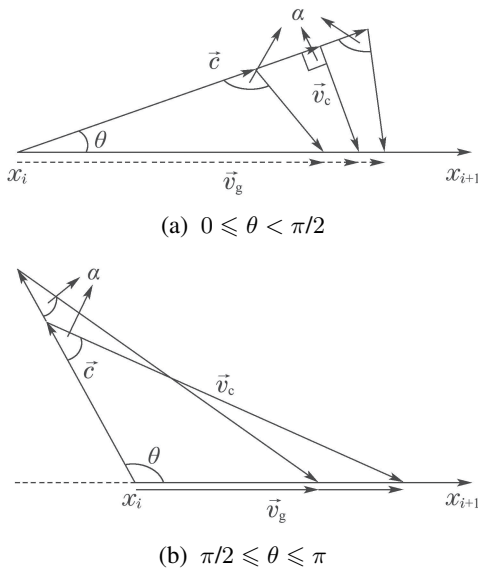


图5 不同 $|\vec{c}|$ 时, 海流、推进速度和相对于海底速度矢量示意图

Fig. 5 The relationship of ocean current, thrust velocity and vehicle velocity relative to seabed with different $|\vec{c}|$

本文研究恒定推进速度下的路径规划, 根据式(7), 恒定推进速度的条件下, 航行时间的长短决定了AUV的能量消耗, 即时间最优路径规划问题. 在分析

每一路径段在区间海流作用下的响应区间时, 需要在区间海流中寻找相应的海流方向与海流大小, 求出区间海流下的最大及最小航行时间. 可分为图6中的两种情况讨论:

1) 预航行方向投影在海流角度区间内.

最小航行时间: 根据定理1, 取 $\overrightarrow{x_i x_{i+1}}$ 投影方向作为 \vec{c} 方向. 并根据定理2, 若该夹角大于或等于 $\pi/2$, 则令 $|\vec{c}| = lb_{cm}$; 若该夹角小于 $\pi/2$, 则根据下面表达式确定最小航行时间的海流大小:

$$\begin{cases} |\vec{c}| = |\vec{v}_c| \cdot \cot \theta, & lb_{cm} \leq |\vec{v}_c| \cdot \cot \theta \leq ub_{cm}, \\ |\vec{c}| = lb_{cm}, & |\vec{v}_c| \cdot \cot \theta < lb_{cm}, \\ |\vec{c}| = ub_{cm}, & |\vec{v}_c| \cdot \cot \theta > ub_{cm}. \end{cases}$$

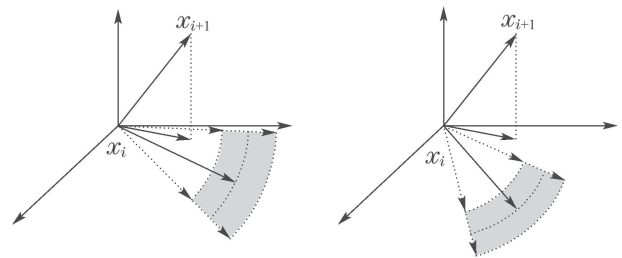
最大航行时间: 根据定理1, 取 lb_{cd} 和 ub_{cd} 中与 $\overrightarrow{x_i x_{i+1}}$ 夹角较大者作为 \vec{c} 方向. 并根据定理2, 在该海流方向下, 分别计算海流大小为 lb_{cm} 和 ub_{cm} 时的航行时间, 二者中较大者即为该海流区间中最大航行时间.

2) 预航行方向在海流角度区间外.

最小航行时间: 根据定理1, 取 lb_{cd} 和 ub_{cd} 中与 $\overrightarrow{x_i x_{i+1}}$ 夹角较小者作为 \vec{c} 方向. 并根据定理2, 若该夹角大于或等于 $\pi/2$, 则令 $|\vec{c}| = lb_{cm}$; 若该夹角小于 $\pi/2$, 则根据下面表达式确定最小航行时间的海流大小:

$$\begin{cases} |\vec{c}| = |\vec{v}_c| \cdot \cot \theta, & lb_{cm} \leq |\vec{v}_c| \cdot \cot \theta \leq ub_{cm}, \\ |\vec{c}| = lb_{cm}, & |\vec{v}_c| \cdot \cot \theta < lb_{cm}, \\ |\vec{c}| = ub_{cm}, & |\vec{v}_c| \cdot \cot \theta > ub_{cm}. \end{cases}$$

最大航行时间: 根据定理1, 取 lb_{cd} 和 ub_{cd} 中与 $\overrightarrow{x_i x_{i+1}}$ 夹角较大者作为 \vec{c} 方向. 并根据定理2, 在该海流方向下, 分别计算海流大小为 lb_{cm} 和 ub_{cm} 时的航行时间, 二者中较大者即为该海流区间中最大航行时间.



(a) 航行方向在海流区间内 (b) 航行方向在海流区间外

图6 区间海流与AUV预航行方向关系

Fig. 6 The relationship of ocean current interval and pre-navigation direction

3.3 区间比较

如前所述, 对于任一候选路径, 目标函数可能的取值为一区间而非确定的实数值, 故在区间优化过程中, 需要比较不同候选路径的目标函数区间的优劣, 从而评价相应的候选路径的优劣, 进而寻找最优的候选路径. 在区间优化中, 区间序关系^[14]及基于可靠性的区间可能度模型(reliability-based possibility degree of interval, RPDI)^[15]通常用于判断区间的优劣.

3.3.1 区间序关系

假设路径 Γ_A 在相应区间海流的响应区间 $E_A^I = [E_A^L, E_A^R]$, E_A^I 的中点及半径值分别表示为 E_A^c 和 E_A^w , 其表达式如下:

$$\begin{cases} E_A^c = \frac{E_A^L + E_A^R}{2}, \\ E_A^w = \frac{E_A^L - E_A^R}{2}. \end{cases} \quad (14)$$

区间序关系由以上4个参数决定, 其中 E_A^c 主要体现在目标函数的在不确定性下的平均性能; 而 E_A^w 的最小化可以降低目标函数对于不确定性的敏感程度, 从而保证设计鲁棒性. 常用的区间序关系包括 \leq_{LR} , \leq_{cw} 等模型^[16], 其区间序关系表达式如下:

1) 区间序关系 \leq_{LR} :

$$\begin{cases} E_A^I \leq_{LR} E_B^I, \text{ 仅当 } E_A^L \geq E_B^L \text{ 和 } E_A^R \geq E_B^R, \\ E_A^I <_{LR} E_B^I, \text{ 仅当 } E_A^I \leq_{LR} E_B^I \text{ 和 } E_A^I \neq E_B^I. \end{cases} \quad (15)$$

该序关系表达了决策者对区间上、下边界的偏好.

2) 区间序关系 \leq_{cw} :

$$\begin{cases} E_A^I \leq_{cw} E_B^I, \text{ 仅当 } E_A^c \geq E_B^c \text{ 和 } E_A^w \geq E_B^w, \\ E_A^I <_{cw} E_B^I, \text{ 仅当 } E_A^I \leq_{cw} E_B^I \text{ 和 } E_A^I \neq E_B^I. \end{cases} \quad (16)$$

该序关系表达了决策者对区间中点和半径的偏好.

在AUV路径规划中, 根据决策者偏好, 选择一种区间序关系将区间问题转化为确定性问题. 以区间序关系 \leq_{LR} 为例, 不确定海流环境下的路径规划问题可转换为如下的优化问题:

$$\begin{cases} \min_{\Gamma, C} (E_{\Gamma, C}^R, E_{\Gamma, C}^L) \\ \text{s.t. } C \in C^I = [C^L, C^R], \\ \Gamma \cap \text{Obs} = \emptyset. \end{cases} \quad (17)$$

至此, 区间序关系模型已建立完毕, 通过表达式(17)可将区间海流条件下的路径规划问题转化为确定性优化问题. 为结合外层ACS算法, 采用线性加权法进一步将上述问题转换为单目标优化问题:

$$\begin{cases} \min_{\Gamma, C} f_d(\Gamma, C) = (1-\omega) \frac{E_{\Gamma, C}^R}{\phi} + \omega \frac{E_{\Gamma, C}^L}{\varphi}, \\ \text{s.t. } C \in C^I = [C^L, C^R], \\ \Gamma \cap \text{Obs} = \emptyset, \end{cases} \quad (18)$$

式中: f_d 为多目标评价函数; $0 \leq \omega \leq 1$ 为多目标权系数, 其值可根据决策者的偏好设定; ϕ 和 φ 为多目标函数的正则化因子, 其值可根据具体问题大致取与各自目标同一量级的值即可.

3.3.2 基于可靠性的区间可能度模型

假设路径 Γ_A 与 Γ_B 在相应区间海流的响应区间分别为 $E_A^I = [E_A^L, E_A^R]$ 和 $E_B^I = [E_B^L, E_B^R]$, 针对 E_A^I 和

E_B^I , RPD模型可表述为如下形式:

$$P_r(E_A^I \leq E_B^I) = \frac{E_B^R - E_A^L}{2E_A^w + 2E_B^w}, \quad (19)$$

式中: $P_r(E_A^I \leq E_B^I)$ 表示区间 E_B^I 大于区间 E_A^I 的可能度, 即 $P_r(E_A^I \leq E_B^I)$ 的值越大, 区间 E_B^I 大于区间 E_A^I 的可能性越高; 反之亦然.

当区间 E_A^I 退化为实数 E_A 或区间 E_B^I 退化为实数 E_B 时, RPD模型仍然适用, 其表达式如下:

$$\begin{aligned} P_r(E_A \leq E_B^I) &= \frac{E_B^R - E_A}{2E_B^w}, \\ P_r(E_A^I \leq E_B) &= \frac{E_B - E_A^L}{2E_A^w}. \end{aligned} \quad (20)$$

在利用RPDI模型将区间优化问题转换为确定性优化问题时, 需要对目标函数引入一性能区间 $V^I = [V^L, V^R]$, 并通过RPDI模型处理目标函数. 根据表达式(19), 区间海流条件下的路径规划问题转化为如下形式:

$$\begin{cases} \max_{\Gamma, C} P_r(E_{\Gamma, C}^I \leq V^I) = \frac{V^L - E_{\Gamma, C}^R}{2E_{\Gamma, C}^w + 2V^w} \\ \text{s.t. } C \in C^I = [C^L, C^R], \\ \Gamma \cap \text{Obs} = \emptyset, \end{cases} \quad (21)$$

式中 V^I 是一个事先设定的设计性能区间. 在实际应用中, 也可将该性能设定为常数, 其值可根据具体问题大致取略大于目标函数的值既可.

4 仿真结果与分析

为了评估提出方案的性能, 本节通过MATLAB 2015 b对提出的算法进行了仿真实验, 并与确定性海流条件下的最优时间路径进行了对比. 并通过在区间海流内随机产生海流场的方式, 对仿真结果进行了分析. 仿真平台配置为: Intel core i5 4460处理器, 主频3.2 GHz, 8 GB内存.

4.1 仿真设置

在仿真中, 水平方向栅格环境设置为 40×40 . 在垂直方向, 由于AUV执行任务时, 多数为水平运动, 垂直运动相对较少. 因此, 垂直方向设置为3层, 即仿真环境为 $40 \times 40 \times 3$, 栅格尺寸为0.5 km. AUV推进速度为0.5 m/s. 区间海流名义平均速度为0.24 m/s, 名义最大速度为0.63 m/s, 海流方向及大小不确定性分别为 $v = 10^\circ$, $\sigma = 0.1c_{mN}$. AUV的起点和终点坐标分别为(0.25, 19.75, 0.25)和(19.75, 0.25, 1.25).

外层蚁群系统算法中, 蚂蚁数量为20, 最大迭代次数为500, α 与 β 分别为1.5和4, 信息素蒸发系数 ρ 为0.1, 以最优方式移动概率 q_0 为0.98, 局部信息素蒸发系数 ξ 为0.1.

4.2 3种方案基于区间序关系 \leq_{cw} 的比较研究

为研究区间海流环境下时间最优路径规划算法的

性能,选择区间序关系模型 \leq_{cw} 对3种算法进行比较分析:1)外层蚁群系统算法—内层解析法(ant colony system-analytic method, ACS-AM);2)外层遗传算法—内层解析法(genetic algorithm-analytic method, GA-AM);3)外层蚁群系统算法—内层量子粒子群算法(ant colony system-quantum particle swarm optimization, ACS-QPSO).

其中,遗传算法结合解析法是为了验证外层算法性能.遗传算法作为经典的群优化算法,在路径规划中有较为广泛的应用^[17],遗传算法种群数量为100,最大迭代次数为500,交叉概率及变异概率分别为0.6和0.02.

另外,如第3.2节所述,内层算法亦可使用寻优算法计算响应区间,即将海流大小和海流方向设置为待优化变量,通过优化算法计算该区间海流内的响应区间.为验证本文提出解析法的计算效率及正确性,选择粒子群算法作为内层算法,与本文提出的解析法进行比较.在粒子群算法中,由于需要优化变量仅为海流方向及海流大小两个变量,因此粒子群算法种群数量和最大迭代次数分别设置为10和100.为了提高粒子群算法计算效率,增加了附加终止准则:

$$W = \sum_{i=1}^{\lambda} \left(\frac{E_{r-i} - E_{r-i-1}}{E_{r-i}} \right) (0.5)^{i-1}, \quad (22)$$

式中: r 代表当前迭代次数, E 代表相应的适应度值.令 $\lambda = 10$,当 W 小于 1×10^{-6} 时,终止准则被满足.

式(22)的作用为判断最近的 λ 代计算中,适应度值是否趋于平缓,其中 $|(E_{r-i} - E_{r-i-1})/E_{r-i}|$ 项表示相邻两代适应度值变化程度; $(0.5)^{i-1}$ 项为系数项,表示最近10代 $|(E_{r-i} - E_{r-i-1})/E_{r-i}|$ 值的重要程度,距离当前代越近, $|(E_{r-i} - E_{r-i-1})/E_{r-i}|$ 的值对式(22)的影响越大.当 W 的值小于设定值时,表明适应度值变化较小,可以认为规划算法已经收敛.

区间序关系模型中,权重系数 ω 取0.5. E_A^c 的正则

化因子为 100×10^3 , E_A^w 的正则化因子为 10×10^3 .仿真结果如图7-8所示,图7为3种方案的最优路径,其中实线、虚线和点划线分别表示方案(1)-(3)所得最优路径,黑色圆形标记代表路径起点,五角星标记代表路径终点.图7为3-D图形,路径与球形障碍相交是由角度引起,实际路径并未与障碍相交.图8为3种方案的收敛曲线.表1列出3种方案所得最优路径的相关数据.

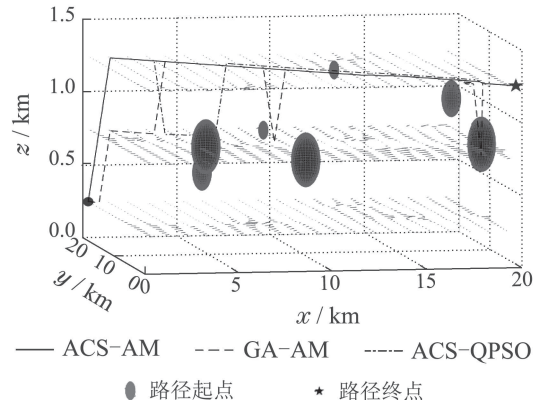


图7 ACS-AM, GA-AM及ACS-QPSO方案下最优路径
Fig. 7 The optimal paths of ACS-AM, GA-AM and ACS-QPSO schemes

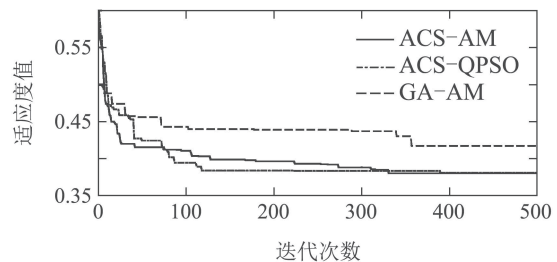


图8 ACS-AM, GA-AM及ACS-QPSO方案收敛曲线
Fig. 8 The convergence curves of ACS-AM, GA-AM and ACS-QPSO schemes

表1 ACS-AM, GA-AM及ACS-QPSO方案所得最优路径的相关数据

Table 1 The optimal paths data of ACS-AM, GA-AM and ACS-QPSO schemes

方案	响应区间/s	平均航行时间/s	响应区间半径/s	适应度值	计算时间/s
ACS-AM	$[50.74 \times 10^3, 53.53 \times 10^3]$	52.13×10^3	1.39×10^3	0.3303	1.32×10^3
GA-AM	$[55.54 \times 10^3, 58.79 \times 10^3]$	57.17×10^3	1.62×10^3	0.3671	1.42×10^3
ACS-QPSO	$[52.13 \times 10^3, 54.69 \times 10^3]$	53.41×10^3	1.28×10^3	0.331	3.15×10^3

由图8可以看出,3种方案中,ACS-AM和ACS-QPSO收敛效果较好,收敛速度及最优适应度值均优于GA-AM,ACS-QPSO在100次迭代后基本趋于平缓,ACS-AM在300代之后也已收敛.根据表1中的数据,从3种方案所得最优路径来看,ACS-AM方案的适应度值略小于ACS-QPSO方案,仅相差0.2%.而

GA-AM方案中,适应度值相对于ACS-AM方案相差11.1%.在3种方案中,ACS-AM和ACS-QPSO方案的寻优能力强于GA-AM方案.以计算时间分析,ACS-AM及GA-AM方案中,由于内层算法使用解析法求解响应区间,其计算效率均高于ACS-QPSO方案,约为ACS-QPSO方案的42%.

综上所述, 3种方案中, 综合考虑寻优能力及计算效率, ACS-AM方案优于其他两种方案.

4.3 不同区间转换模型比较研究

为研究不同区间转换模型的性能, 选择区间序关系模型 \leq_{LR} , \leq_{cw} 及RPDI模型进行仿真比较, 其中RPDI模型的性能指标设为 100×10^3 . 并引入确定性海流环境下时间最优路径进行对比分析. 仿真结果如图9-10所示, 其中图9为4种方案的最优路径. 其中, 实线和虚线曲线分别表示 \leq_{LR} 和 \leq_{cw} 模型所得最优路径, 点划线表示RPDI模型路径, 点虚线表示确定性海流为模型所得路径. 图10为4种方案的收敛曲线, 其中RPDI模型适应度为 $5/P_t$. 表2列出3种方案所得最优路径的相关数据.

由图10可以看出, 4种方案在迭代300次之后适应度值趋于平缓, 且前期收敛速度较快. 需要说明的是, 收敛曲线纵坐标仅代表线性加权后的评价函数值, 不表示路径的某一具体参数值. 根据表2中的数据, 从概率角度分析, RPDI模型航行时间优于 \leq_{LR} , \leq_{cw} 及确定性海流模型的概率分别为52.42%, 52.40%和74.68%(根据式(21)计算). 从 \leq_{LR} , \leq_{cw} 方案可以看出, 由于两种序关系偏好不同, 其得到的结果有较大差异, 由于 \leq_{cw} 方案偏向于响应区间半径, 因此其区间半径在4种方案中最小. 而 \leq_{LR} 方案更偏向于最小和最大航行时间, 其最小航行时间在4种方案中最小, 其最大航行时间略大是由于算法需要综合考虑两个参数性能.

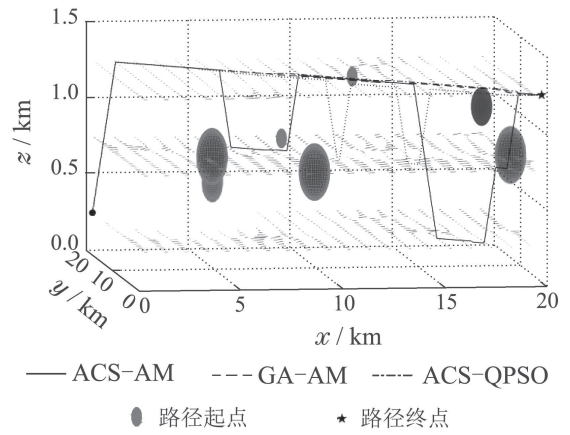


图 9 \leq_{LR} , \leq_{cw} , RPDI及确定性海流方案最优路径
Fig. 9 The optimal paths of \leq_{LR} , \leq_{cw} , RPDI and deterministic ocean currents schemes

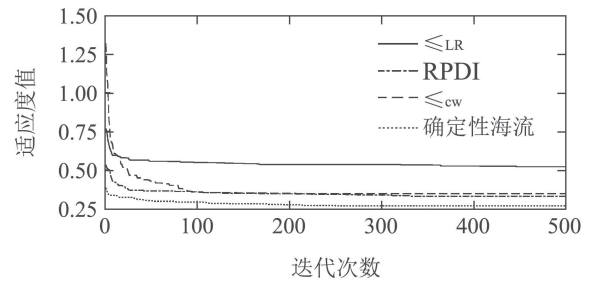


图 10 \leq_{LR} , \leq_{cw} , RPDI及确定性海流方案收敛曲线
Fig. 10 The convergence curves of \leq_{LR} , \leq_{cw} , RPDI and deterministic ocean currents schemes

表 2 \leq_{LR} , \leq_{cw} , RPDI模型及确定性海流方案所得最优路径的相关数据

Table 2 The optimal paths data of \leq_{LR} , \leq_{cw} , RPDI and deterministic ocean currents schemes

方案	响应区间/s	平均航行时间/s	响应区间半径/s	适应度值	计算时间/s
\leq_{LR}	$[50.19 \times 10^3, 54.15 \times 10^3]$	52.17×10^3	1.98×10^3	0.5217	1.37×10^3
\leq_{cw}	$[50.74 \times 10^3, 53.53 \times 10^3]$	52.14×10^3	1.39×10^3	0.3303	1.32×10^3
RPDI	$[50.26 \times 10^3, 53.72 \times 10^3]$	51.99×10^3	1.73×10^3	0.3478	1.35×10^3
确定性海流	$[51.75 \times 10^3, 56.04 \times 10^3]$	53.89×10^3	2.14×10^3	0.2686	1.20×10^3

综上所述, 从概率角度分析, RPDI模型所的路径性能最优. 但区间序关系模型更为灵活, 可以根据决策者偏好选择相应的参数进行优化.

4.4 基于区间优化的路径规划器性能验证

为进一步评估基于区间优化的时间最优路径规划算法的性能, 在第4.3节的区间海流范围内随机生成100幅海流场, 测试 \leq_{LR} , \leq_{cw} , RPDI模型及确定性海流场条件下各路径的性能, 验证结果如表3所示.

由表3可以看出, 在100组随机测试中, \leq_{LR} , \leq_{cw} 和RPDI模型在最小及最大航行时间性能相似, 相差均不到0.5%, 相较于确定性海流条件下生成的路径最小、最大航行时间节约3%以上. 在平均航行时间方

面, \leq_{LR} , \leq_{cw} 和RPDI模型性能仍然相似, 这与第4.3节所得结论一致. 在航行时间均方差方面, \leq_{cw} 模型有较大优势. 与 \leq_{LR} , RPDI模型和确定性海流条件路径波动相比, 分别小48%, 31%和80%. 这表明其得到的路径航行时间更稳定.

另外, 由于确定性海流条件下产生的路径未考虑海流的不确定性, 即没有考虑最坏情况, 导致其出现11次路径不可行的情况, 这种情况有可能导致AUV未按规划路径航行, 在AUV路径规划中是需要极力避免的. 然而, 在基于区间海流的路径规划中, 由于考虑了海流的不确定性, 避免了生成的路径不可行的情况, 增强了路径规划器的鲁棒性.

表3 随机海流场验证 \leq_{LR} , \leq_{cw} , RPDI模型及确定性海流条件下所得最优路径Table 3 The optimal paths of \leq_{LR} , \leq_{cw} , RPDI and deterministic ocean currents schemes under stochastic ocean currents

方案	最小航行时间/s	最大航行时间/s	航行时间均值/s	航行时间均方差/s	不可行路径数量
\leq_{LR}	51.69×10^3	52.55×10^3	52.11×10^3	0.1576×10^3	0
\leq_{cw}	51.79×10^3	52.34×10^3	52.10×10^3	0.1064×10^3	0
RPDI	51.79×10^3	52.45×10^3	52.13×10^3	0.1399×10^3	0
确定性海流	53.35×10^3	54.21×10^3	53.77×10^3	0.1914×10^3	11

5 结语

针对AUV路径规划中海流预测不精确性问题,提出一种基于区间优化的时间最优路径规划算法.通过增加海流方向及海流大小不确定度,建立基于区间海流的环境模型;应用解析法求取候选路径的响应区间,以提高计算效率;运用区间序关系模型将不确定问题转化为确定性路径规划问题.通过对ACS-AM, GA-AM和ACS-QPSO方案的比较,ACS-AM方案在寻优性能及计算效率方面优于其他两种方案.另外,本文对区间优化中3种区间转换模型对比分析.结果表明,从概率角度评价,RPDI模型所得路径性能最优.但区间序关系模型更为灵活,可以根据决策者偏好选择相应的参数进行优化.仿真结果表明,3种区间转换模型与传统以确定性海流为环境模型的路径规划算法相比,基于区间优化的路径规划算法有较强鲁棒性.

参考文献:

- [1] ZENG Z, LIAN L, SAMMUT K, et al. A survey on path planning for persistent autonomy of autonomous underwater vehicles. *Ocean Engineering*, 2015, 110(A): 303 – 313.
- [2] ZENG Z, LAMMAS A, SAMMUT K, et al. Shell space decomposition based path planning for AUVs operating in a variable environment. *Ocean Engineering*, 2014, 91: 181 – 195.
- [3] MAHOUDZADEH S, YAZDANI A M, SAMMUT S, et al. Online path planning for AUV rendezvous in dynamic cluttered undersea environment using evolutionary algorithms. *Applied Soft Computing*, 2018, 70: 929 – 945.
- [4] YAN Zheping, ZHAO Yufei, CHEN Tao, et al. A novel method of UUV path planning based on navigation error space. *Acta Armamentarii*, 2014, 35(8): 1243 – 1250.
(严浙平, 赵玉飞, 陈涛, 等. 一种基于导航误差空间的无人水下航行器路径规划方法. 兵工学报, 2014, 35(8): 1243 – 1250.)
- [5] YAN Zheping, ZHAO Yufei, CHEN Tao, et al. UUV path planning with inaccurate navigation information. *Journal of Harbin Engineering University*, 2016, 34(6): 715 – 720.
(严浙平, 赵玉飞, 陈涛, 等. 非精确导航信息下UUV路径规划. 哈尔滨工程大学学报, 2016, 34(6): 715 – 720.)
- [6] SUBRAMANI D N, LERMUSIAUX P F J, HALEY P J, et al. Time-optimal path planning real-time sea exercises. *OCEANS 2017-Aberdeen*. Aberdeen, UK: IEEE, 2017: 1 – 10.
- [7] ZHU Daqi, LIU Yu, SUN Bing, et al. AUV autonomous inspired GBNN path planning algorithm. *Control Theory & Applications*, 2018, 36(2): 1 – 9.
(朱大奇, 刘雨, 孙兵, 等. 自治水下机器人的自主启发式GBNN路径规划算法. 控制理论与应用, 2018, 36(2): 1 – 9.)
- [8] YAO X L, WANG F, WANG J F, et al. Bilevel optimization-based time-optimal path planning for AUVs. *Sensors*, 2018, 18(12): 4167.
- [9] LI B, CHIONG R, LIN M. A two-layer optimization framework for UAV path planning with interval uncertainties. *IEEE Symposium on Computational Intelligence in Production and Logistics Systems (CIPLS)*. Orlando, FL, USA: IEEE, 2014: 120 – 127.
- [10] CORREIA M, MATOS A. Optimized path planning for marine vehicles considering uncertainty. *2013 OCEANS—San Diego*. San Diego, CA, USA: IEEE, 2013: 1 – 8.
- [11] AL-SABBAN W H, GONZALEZ L F, SMITH R N. Wind-energy based path planning for unmanned aerial vehicles using Markov decision processes. *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Karlsruhe, Germany: IEEE, 2013: 784 – 789.
- [12] SMITH R N, LI P P, CARON D A, et al. Planning and implementing trajectories for autonomous underwater vehicles to track evolving ocean processes based on predictions from a regional ocean model. *International Journal of Robotics Research*, 2010, 29(12): 1475 – 1497.
- [13] DORIGO M, STUTZLE T. *Ant Colony Optimization*. Cambridge, UK: The MIT Press, 2004: 75 – 110.
- [14] MA Longhua. *Research on method and application of robust optimization for uncertainty system*. Hangzhou: Institute of Systems Engineering, Zhejiang University, 2001.
(马龙华. 不确定系统的鲁棒优化方法及其研究. 杭州: 浙江大学系统工程研究所, 2001.)
- [15] JIANG C, HAN X, LI D. A new interval comparison relation and application in interval number programming for uncertain problems. *Computers Materials and Continua*, 2012, 27(3): 275 – 304.
- [16] JIANG Chao, HAN Xu, XIE Huichao. *Interval Uncertainty Optimization Design: Theory and Methods*. Beijing, China: Science Press, 2017: 36 – 41.
(姜潮, 韩旭, 谢慧超. 区间不确定性优化设计理论与方法. 北京, 中国: 科学出版社, 2017: 36 – 41.)
- [17] SUN Bo, JIANG Ping, ZHOU Genrong, et al. Application of improved genetic algorithm in path planning of mobile robots. *Computer Engineering and Applications*, 2019, 55(17): 162 – 168.
(孙波, 姜平, 周根荣, 等. 改进遗传算法在移动机器人路径规划中的应用. 计算机工程与应用, 2019, 55(17): 162 – 168.)

作者简介:

姚绪梁 教授, 博士生导师, 目前研究方向为水下机器人智能控制, E-mail: yaoxuliang@hrbeu.edu.cn;

王峰 博士研究生, 目前研究方向为水下机器人路径规划, E-mail: wangfeng3561@hrbeu.edu.cn;

王景芳 讲师, 博士, 目前研究方向为电力推进用高效双向DC-DC转换器, E-mail: jingfangwang@hrbeu.edu.cn;

王晓伟 讲师, 博士研究生, 目前研究方向为水下机器人路径跟踪, E-mail: wangxiaowei@hrbeu.edu.cn.