

# 饱和时滞非线性系统的间接线性矩阵不等式抗饱和设计

李豪杰<sup>†</sup>, 何汉林, 查 苗

(海军工程大学 基础部, 湖北 武汉 430032)

**摘要:** 当时滞非线性系统具有执行器饱和时, 其稳定性无法得到保证. 为了寻找饱和时滞非线性系统的稳定控制器, 本文阐述了一种间接线性矩阵不等式(LMI)一步抗饱和设计方法. 首先, 利用Takagi-Sugeno (T-S)模糊模型将一类饱和时滞非线性系统精确重构, 引入输出反馈并行分布补偿系统得到闭环控制系统. 然后, 运用李雅普诺夫稳定性理论, 导出闭环系统的稳定条件, 利用一个矩阵不等式的等价引理, 将闭环系统稳定条件间接的转化为两个LMIs条件, 进而得到间接LMI抗饱和补偿算法, 同时给出了吸引域估计及其优化模型. 最后给出了应用此方案的一个仿真实例.

**关键词:** 一步抗饱和; 时滞非线性系统; Takagi-Sugeno模糊模型; 线性矩阵不等式; 并行分布补偿

**引用格式:** 李豪杰, 何汉林, 查苗. 饱和时滞非线性系统的间接线性矩阵不等式抗饱和设计. 控制理论与应用, 2020, 37(7): 1595 – 1600

DOI: 10.7641/CTA.2020.90453

## Anti-windup design for saturated time-delay nonlinear systems: an indirect linear matrix inequality-based approach

LI Hao-jie<sup>†</sup>, HE Han-lin, ZHA Miao

(Department of Basic Courses, Naval University of Engineering, Wuhan Hubei 430032, China)

**Abstract:** The stability of time-delay nonlinear systems cannot be guaranteed when it has actuator saturation. Motivated by looking for the stability controller of saturated time-delay nonlinear systems, one-step anti-windup design based on the indirect linear matrix inequality (LMI) approach is proposed in this paper. First, a class of saturated time-delay nonlinear systems can be reconstructed accurately by using Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy model, and then the parallel distributed compensation system with output feedback is used to get the closed-loop control systems. Then, the stability conditions of the closed-loop systems are deduced by using Lyapunov stability theory, and the stability conditions of the closed-loop systems can be converted to two LMIs conditions indirectly by using an equivalent lemma of matrix inequality, then the anti-windup compensation algorithm based on indirect LMI approach is given, meanwhile, the attraction domain estimation and its optimization model are presented. Finally, a simulation example is given to illustrate the proposed method.

**Key words:** one-step anti-windup; time-delay nonlinear systems; Takagi-Sugeno fuzzy model; linear matrix inequality; parallel distributed compensation

**Citation:** LI Haojie, HE Hanlin, ZHA Miao. Anti-windup design for saturated time-delay nonlinear systems: an indirect linear matrix inequality-based approach. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(7): 1595 – 1600

## 1 引言

执行器饱和又称输入饱和, 存在于几乎所有的现实控制系统中, 对于时滞非线性系统来说也是如此. 因此, 研究饱和时滞非线性系统的抗饱和设计是非常有意义的<sup>[1]</sup>. 解决这个问题有3个难点: 一是非线性系统; 二是时滞; 三是输入饱和. 前人对于这3个问题的单独研究不少, 但3个问题的综合研究并不多. 文献[2]

综述了近年来抗饱和的研究概况. 总体上看抗饱和设计方法可分为一步法与两步法, 补偿器的选择可分为静态补偿<sup>[3]</sup>与动态补偿<sup>[4]</sup>, 从反馈的角度可分为状态反馈<sup>[5]</sup>与输出反馈<sup>[6]</sup>. 对于具有输入饱和的时滞开关线性系统, 文献[7]利用动态补偿方法给出了闭环系统稳定的充分条件. 针对一类具有输入饱和的时滞控制系统, 文献[8]以无输入饱和与有输入饱和的系统状态

收稿日期: 2019-06-14; 录用日期: 2020-03-12.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: 1138408459@qq.com; Tel.: +86 15071163645.

本文责任编辑: 曾志刚.

国家自然科学基金项目(61374003), 海军工程大学基础研究基金项目(20161475)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61374003) and the Basic Research Science Foundation of Naval University of Engineering (20161475).

之差作为性能指标,推导出一种使其最小化的动态补偿抗饱和和控制器.针对具有输入饱和的时不变仿射非线性系统,文献[9]利用T-S模型、输出反馈、并行分布补偿及矩阵理论,得到了闭环系统稳定的线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)判据.

现实系统中的时滞现象是多样的,主要体现在时滞函数的约束条件上,不同的约束条件代表着不同的时滞问题<sup>[10-12]</sup>.文献[13]针对一类时滞变化率有界的饱和时滞非线性系统设计了静态抗饱和补偿器,利用Lyapunov泛函重新构造了利布希茨连续性条件,得到了全局及局部稳定条件.针对具有饱和的分布正常数时滞神经网络系统,文献[14]利用经典的两步法提出了一种代数抗饱和补偿设计.所谓两步法<sup>[15]</sup>是指:第一步,在不考虑系统输入饱和的前提下,设计好反馈增益矩阵;第二步,当系统存在输入饱和时,引入抗饱和和补偿项并求解补偿增益矩阵.本文使用的一步抗饱和和法,能够一步求解出反馈增益阵和补偿增益阵,较之两步法,一步抗饱和能够得到更为全局优化的吸引域估计.

本文研究了一类时滞变化率上确界小于1的饱和时滞非线性系统,当系统状态满足一定条件时<sup>[16]</sup>,饱和时滞非线性系统可利用T-S模糊模型(T-S模型)精确重构为若干个线性子系统的加权和,针对每个线性子系统利用动态输出反馈引入并行分布补偿系统,综合得到闭环控制系统.选择一类含有时滞函数的特殊Lyapunov泛函,利用Schur补引理<sup>[17]</sup>及矩阵不等式理论<sup>[18]</sup>,得到系统的动态输出反馈一步抗饱和和控制,利用一个矩阵不等式的等价引理,得到利用间接LMI一步抗饱和和补偿算法,一步求出反馈增益矩阵与补偿增益矩阵.仿真实例效果良好.

## 2 系统描述

考虑如下具有输入饱和的时滞非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t))x(t) + f_d(x(t))x(t-\tau(t)) + \\ \quad g(x(t))\text{sat}(u(t)), \\ y(t) = h(x(t))x(t), t \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  和  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  分别为系统的状态向量、输入向量和输出向量,  $f(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $f_d(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $g(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $h(x) \in \mathbb{R}^{p \times n}$  为连续函数矩阵. 饱和函数

$$\text{sat}(u_i(t)) = \text{sgn}(u_i(t)) \min\{u_{0i}, |u_i(t)|\},$$

式中  $u_{0i} > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 为控制输入的饱和约束. 时变时滞  $\tau(t)$  满足

$$\tau(t) \geq 0, \dot{\tau}(t) \leq \varepsilon < 1, t \in \mathbb{R}^+,$$

式中  $\varepsilon$  是标量,利用T-S模型对系统(1)进行重构.

规则  $R_i$ : 如果  $z_1(t)$  为  $F_{i1}$ ,  $z_2(t)$  为  $F_{i2}$ ,  $\dots$ ,  $z_s(t)$  为

$F_{is}$ , 则

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + A_{di} x(t-\tau) + B_i \text{sat}(u(t)), \\ y(t) = C_i x(t), i = 1, 2, \dots, q, t \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $F_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, q, j = 1, 2, \dots, s$ ) 为规则  $R_i$  的第  $j$  个模糊集,  $z_j(t)$  为前件变量,  $q$  为规则数, 时不变矩阵  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_{di} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$  分别为第  $i$  个线性子系统的状态矩阵、时滞矩阵、输入矩阵以及输出矩阵.

则系统(1)可被重构为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^q \mu_i(t) [A_i x(t) + A_{di} x(t-\tau) + \\ \quad B_i \text{sat}(u(t))], \\ y(t) = \sum_{i=1}^q \mu_i(t) C_i x(t), t \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (3)$$

设初始条件  $x(t) = \phi(t)$ ,  $t \in [-\tau(0), 0]$ , 为保证T-S模型(3)能够精确重构非线性系统(1),需要将系统(1)的状态变量限制在一个有效的有限域内,一般如下多面体形式给出:

$$\Omega(x) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |L_b x| \leq d_b, b = 1, 2, \dots, l\}, \quad (4)$$

式中:  $L_b$  为  $n$  维行向量,  $d_b > 0$  为常数. 考虑隶属度函数集合

$$\begin{cases} \Xi = \{\mu(t) = [\mu_1(t) \mu_2(t) \dots \mu_q(t)] \\ \mu_i(t) \geq 0, \sum_{i=1}^q \mu_i(t) = 1\}, \\ \mu_i(t) = \frac{\delta_i(t)}{\sum_{j=1}^q \delta_j(t)}, \delta_i(t) = \prod_{j=1}^s F_{ij}(z_j(t)), \end{cases} \quad (5)$$

式中:  $F_{ij}(z_j(t))$  表示前件变量  $z_j(t)$  在模糊集  $F_{ij}$  中的隶属度,容易证明,如果  $x(t) \in \Omega(x)$ , 则存在  $\mu(t) \in \Xi$  使得系统(1)可以用系统(3)精确重构.

引入  $n_c$  维并行分布补偿系统

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = \sum_{i=1}^q \mu_i(t) [A_{ci} x_c(t) + B_{ci} y(t) - \\ \quad E_{ci} \psi(u(t))], \\ u(t) = \sum_{i=1}^q \mu_i(t) (C_{ci} x_c(t) + D_{ci} y(t)), t \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (6)$$

式中:  $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$  为并行分布补偿系统的状态变量,  $\psi(u) = u - \text{sat}(u)$  为死区函数,  $A_{ci}$ ,  $B_{ci}$ ,  $C_{ci}$ ,  $D_{ci}$  为反馈增益矩阵,  $E_{ci}$  为抗饱和增益矩阵. 综合式(3)、式(6)可得闭环系统:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^q w_{ijk}(t) [\tilde{A}_{ijk} \xi(t) + \\ \quad \tilde{A}_{di} \xi(t-\tau) - \tilde{E}_{ij} \psi(u(t))], \\ u(t) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \mu_i(t) \mu_j(t) K_{ij} \xi(t), t \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (7)$$

式中:  $\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}$ ,  $w_{ijk}(t) = \mu_i(t)\mu_j(t)\mu_k(t)$ ,

$$\tilde{A}_{ijk} = \begin{bmatrix} A_i + B_i D_{cj} C_k & B_i C_{cj} \\ B_{cj} C_k & A_{cj} \end{bmatrix}, \tilde{A}_{di} = \begin{bmatrix} A_{di} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{E}_{ij} = \begin{bmatrix} B_i \\ E_{cj} \end{bmatrix}, K_{ij} = [D_{ci} C_j \quad C_{ci}].$$

**问题 1** 求出使得闭环系统(7)局部渐近稳定的矩阵  $A_{ci}, B_{ci}, C_{ci}, D_{ci}, E_{ci}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_c$ , 并给出闭环系统(7)的吸引域估计及其优化模型.

为了便于问题求解, 给出如下假设:

**假设 1** 矩阵对  $(A_i, B_i)$  可控, 矩阵对  $(A_i, C_i)$  可观,  $i = 1, 2, \dots, q$ .

### 3 主要结果

#### 3.1 控制器设计

设  $K(a)$  代表矩阵  $K$  的第  $a$  行构成的行向量,  $K^T(a) = (K(a))^T$ , 符号\*为对称矩阵左下角对称块的缩写,  $\bar{v}$  为复数  $v$  的共轭, 简记  $\xi(t)$  为  $\xi$ , 设矩阵  $G_{ij}$  与  $K_{ij}$  同型,  $\bar{K}_{ij} = K_{ij} - G_{ij}$ , 定义多面体集

$$\Sigma = \bigcap_{i=1}^q \bigcap_{j=1}^q \{ \xi \mid |\bar{K}_{ij}(a)\xi| \leq u_{0a}, a = 1, 2, \dots, m \}.$$

为了便于定理证明, 首先给出两个引理.

**引理 1** 若  $\xi \in \Sigma$ , 则

$$\alpha = \psi^T(u(t))T \left( \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \mu_i(t)\mu_j(t)G_{ij}\xi - \psi(u(t)) \right) \geq 0, \quad (8)$$

对于所有的  $i, j = 1, 2, \dots, q$  及所有的对角正定矩阵  $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$  成立<sup>[18]</sup>.

**引理 2** 对任意合适维矩阵  $X, Y (Y > 0)$ ,  $Z$ , 有<sup>[18]</sup>

$$X^T Z + Z^T X \leq X^T Y X + Z^T Y^{-1} Z.$$

设对称正定矩阵  $P, Q$ , 矩阵  $N_{ij}$  可写成分块形式:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ * & P_{22} \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ * & Q_{22} \end{bmatrix},$$

且  $PQ = I$ ,  $N_{ij} = [N_{ij}^{(1)} \quad N_{ij}^{(2)}]$ , 式中:  $P_{11}, Q_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_{22}, Q_{22} \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$ ,  $N_{ij}^{(1)} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $N_{ij}^{(2)} \in \mathbb{R}^{m \times n_c}$ .

**定理 1** 若存在两个对称正定矩阵  $P, Q$ , 定义如上, 对角正定矩阵  $T_1$  及合适维矩阵  $A_{ci}, B_{ci}, C_{ci}, D_{ci}, E_{ci}, N_{ij}$ , 使得

$$\begin{bmatrix} P & K_{ij}^T(a) - PN_{ij}^T(a) \\ * & u_{0a}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & L_b^T \\ * & d_b^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (10)$$

$$\Pi_{ijk} = \begin{bmatrix} \text{He}(\tilde{A}_{ijk}Q) + Q + \bar{A}_{di} & -\tilde{E}_{ij}T_1 + N_{ij}^T \\ * & -2T_1 \end{bmatrix} < 0. \quad (11)$$

式中:  $i, j, k = 1, 2, \dots, q$ ,  $a = 1, 2, \dots, m$ ,  $b = 1, 2, \dots, l$ ,  $\bar{A}_{di} = (1 - \varepsilon)^{-1} \tilde{A}_{di} Q \tilde{A}_{di}^T$ , 则闭环系统(7)在区域  $\Lambda = \{ \xi \mid \xi^T P \xi \leq 1 \}$  内渐近稳定.

**证** 设  $G_{ij} = N_{ij}P$ , 利用Schur补引理及式(9)可得  $u_{0a}^2 - \bar{K}_{ij}(a)P^{-1}\bar{K}_{ij}(a)^T \geq 0$ , 由  $\xi \in \Lambda$  及Holder不等式可得

$$\left| \frac{\bar{K}_{ij}(a)\xi}{u_{0a}} \right| = \left| \frac{\bar{K}_{ij}(a)}{u_{0a}} P^{-\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} \xi \right| \leq 1,$$

即  $\xi \in \Sigma$ . 由Schur补引理及式(10)得

$$P_{11} - \frac{L_b^T L_b}{d_b} \geq 0, x^T \frac{L_b^T L_b}{d_b} x \leq \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \leq 1,$$

即  $x(t) \in \Omega(x)$ . 取Lyapunov泛函

$$V = \xi^T P \xi + \int_{t-\tau}^t \xi^T(\theta) P \xi(\theta) d\theta,$$

则

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\xi^T P \xi + \xi^T P \xi - (1 - \dot{\tau})\xi^T(t - \tau)P\xi(t - \tau) = \\ & \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^q w_{ijk}(t) [\gamma_{ijk} + \beta_i - 2\xi^T P \tilde{E}_{ij} \psi(u)] + \\ & \xi^T P \xi - (1 - \dot{\tau})\xi^T(t - \tau)P\xi(t - \tau), \end{aligned}$$

式中:  $\gamma_{ijk} = \xi^T \text{He}(P \tilde{A}_{ijk}) \xi$ ,  $\beta_i = 2\xi^T(t - \tau) \tilde{A}_{di}^T P \xi$ . 利用引理1与引理2得

$$\beta_i \leq \xi^T P \bar{A}_{di} P \xi + (1 - \varepsilon)\xi^T(t - \tau)P\xi(t - \tau) + 2\alpha,$$

$$\text{故 } \dot{V} \leq \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^q w_{ijk}(t) \eta^T \Psi_{ijk} \eta, \quad \eta = \begin{bmatrix} \xi \\ \psi(u) \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{ijk} = \begin{bmatrix} \text{He}(P \tilde{A}_{ijk}) + P + P \bar{A}_{di} P & -P \tilde{E}_{ij} + G_{ij}^T T \\ * & -2T \end{bmatrix}.$$

设  $T_1 = T^{-1}$ , 利用合同变换的性质, 对式(11)分别左乘、右乘  $\text{diag}(P, T)$  得  $\Psi_{ijk} < 0$ ,  $i, j, k = 1, 2, \dots, q$ , 当  $\xi \neq 0$  时,  $\dot{V} < 0$ , 所以闭环系统(7)在区域  $\Lambda$  内渐近稳定. 证毕.

#### 3.2 间接LMI一步抗饱和和补偿算法

为了便于结论推导, 首先给出如下引理.

**引理 3** 已知对称矩阵  $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  和两个矩阵  $X \in \mathbb{R}^{i \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{j \times n}$ , 则存在一个合适维矩阵  $\Theta$  使得

$$\Gamma + X^T \Theta^T Y + Y^T \Theta X < 0,$$

当且仅当

$$N_X^T \Gamma N_X < 0, N_Y^T \Gamma N_Y < 0,$$

式中  $N_X$  和  $N_Y$  分别为由零空间  $\ker(X)$  和  $\ker(Y)$  的任意一组基向量作为列向量构成的矩阵<sup>[19]</sup>.

为了简化推导过程, 现设

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B}_i = \begin{bmatrix} 0 & B_i \\ I & 0 \end{bmatrix}, \Theta_j = \begin{bmatrix} A_{cj} & B_{cj} \\ C_{cj} & D_{cj} \end{bmatrix}, \\ \tilde{C}_k &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ C_k & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_i = \begin{bmatrix} \tilde{B}_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \bar{\Theta}_j = \begin{bmatrix} \Theta_j & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{C}_{Qk} &= \begin{bmatrix} \tilde{C}_k Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{C}_k = \begin{bmatrix} \tilde{C}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \\ G_{Qij} &= \begin{bmatrix} \text{He}(\tilde{A}_i Q) + Q + \bar{A}_{di} & -\bar{E}_{ij} T_1 + N_{ij}^T \\ * & -2T_1 \end{bmatrix}, \\ \bar{P} &= \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, G_{Pij} = \bar{P} G_{Qij} \bar{P}, \end{aligned}$$

则  $\tilde{A}_{ijk} = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i \Theta_j \tilde{C}_k$ , 式(11)可表示为

$$G_{Qij} + \text{He}(\bar{B}_i^T \bar{\Theta}_j \bar{C}_{Qk}) < 0. \quad (12)$$

利用引理3, 式(12)等价于

$$N_{\bar{B}_i}^T G_{Qij} N_{\bar{B}_i} < 0, N_{\bar{C}_{Qk}}^T G_{Qij} N_{\bar{C}_{Qk}} < 0. \quad (13)$$

由于  $\bar{C}_k = \bar{C}_{Qk} \bar{P}$ , 所以矩阵  $\bar{Q} N_{\bar{C}_{Qk}}$  各列列向量可作为矩阵  $\bar{C}_k$  的零空间的基底, 取  $N_{\bar{C}_k} = \bar{Q} N_{\bar{C}_{Qk}}$ , 则  $N_{\bar{C}_{Qk}}^T G_{Qij} N_{\bar{C}_{Qk}} = N_{\bar{C}_k}^T G_{Pij} N_{\bar{C}_k}$ , 所以  $N_{\bar{C}_{Qk}}^T G_{Qij} N_{\bar{C}_{Qk}} < 0$  与  $N_{\bar{C}_k}^T G_{Pij} N_{\bar{C}_k} < 0$  等价.

当  $N_{B_i^T} \neq 0, N_{C_k} \neq 0$  时, 有

$$N_{\bar{B}_i} = \begin{bmatrix} N_{B_i^T} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, N_{\bar{C}_k} = \begin{bmatrix} N_{C_k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

则

$$\begin{cases} Q_{11} > 0, \\ N_{\bar{B}_i}^T G_{Qij} N_{\bar{B}_i} = \begin{bmatrix} D_i & H_{ij} \\ * & -2T_1 \end{bmatrix} < 0, \\ D_i = N_{\bar{B}_i}^T (\text{He}(A_i Q_{11}) + Q_{11} + (1 - \varepsilon)^{-1} A_{di} Q_{11} A_{di}^T) N_{\bar{B}_i}, \\ H_{ij} = -N_{\bar{B}_i}^T B_i T_1 + N_{\bar{B}_i}^T (N_{ij}^{(1)})^T, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} P_{11} > 0, \\ N_{\bar{C}_k}^T G_{Pij} N_{\bar{C}_k} = \begin{bmatrix} N_{\bar{C}_k}^T F_i N_{C_k} & W_{ijk} \\ * & -2T_1 \end{bmatrix} < 0, \\ F_i = \text{He}(P_{11} A_i) + P_{11} + (1 - \varepsilon)^{-1} P_{11} A_{di} Q_{11} A_{di}^T P_{11}, \\ W_{ijk} = -N_{\bar{C}_k}^T P_{11} B_i T_1 - N_{\bar{C}_k}^T M_j T_1 + N_{\bar{C}_k}^T P_{11} (N_{ij}^{(1)})^T + N_{\bar{C}_k}^T R_{ij}, \\ M_j = P_{12} E_{cj}, R_{ij} = P_{12} (N_{ij}^{(2)})^T. \end{cases} \quad (15)$$

利用条件  $PQ = I$ , 有

$$\begin{cases} P_{11} Q_{11} + P_{12} Q_{12}^T = I, \\ P_{11} Q_{12} + P_{12} Q_{22} = 0, \\ P_{12}^T Q_{11} + P_{22} Q_{12}^T = 0, \\ P_{12}^T Q_{12} + P_{22} Q_{22} = I. \end{cases} \quad (16)$$

**引理4** 矩阵  $P, Q$  定义如上, 若  $P_{11}$  和  $Q_{11}$  正定,  $P_{12}$  列满秩, 且

$$\begin{bmatrix} P_{11} & I \\ I & Q_{11} \end{bmatrix} > 0, \quad (17)$$

则  $P, Q$  正定.

**证** 利用Schur补引理得  $Q_{11} - P_{11}^{-1} > 0$ , 分别左乘、右乘  $P_{11}$ , 得  $P_{11} - P_{11} Q_{11} P_{11} < 0$ , 则  $P_{22} - P_{12}^T P_{11}^{-1} P_{12} = -P_{12}^T (P_{11} - P_{11} Q_{11} P_{11})^{-1} P_{12} > 0$ , 所以  $P, Q$  正定. 证毕.

因此有如下算法:

间接LMI一步抗饱和和补偿算法:

**步骤1** 求解式(14)得到矩阵  $Q_{11}, T_1, N_{ij}^{(1)}, i, j = 1, 2, \dots, q$ ;

**步骤2** 求解式(10)(15)和式(17)得到矩阵  $P_{11}, M_j, R_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, q$ ;

**步骤3** 选择列满秩矩阵  $P_{12}$ , 求解式(16)得  $P, Q$ , 则补偿增益矩阵  $E_{cj} = (P_{12}^T P_{12})^{-1} P_{12}^T M_j, N_{ij}^{(2)} = R_{ij}^T P_{12} (P_{12}^T P_{12})^{-1}, i, j = 1, 2, \dots, q$ ;

**步骤4** 求解下式(18), 得到反馈增益矩阵  $A_{cj}, B_{cj}, C_{cj}, D_{cj}, j = 1, 2, \dots, q$ ,

$$\begin{cases} G_{Qij} + \text{He}(\bar{B}_i^T \bar{\Theta}_j \bar{C}_{Qk}) < 0, \\ \begin{bmatrix} P & -[D_{ci} C_j \ C_{ci}]^T + P N_{ij}^T \\ * & U_0 \end{bmatrix} \geq 0, \end{cases} \quad (18)$$

式中  $U_0 = \text{diag}\{u_{01}^2, u_{02}^2, \dots, u_{0m}^2\}$ .

**注1** 一般情况下,  $n > m, n > p$ , 此时,  $N_{C_i^T} \neq 0, N_{C_k} \neq 0, i, k = 1, 2, \dots, q$ , 步骤1到步骤4没有问题. 但当  $n \leq m$  或  $n \leq p$  时, 以上算法可能会出现如下3种情形:

**情形1** 当  $\text{rank}(B_i) = \text{rank}(C_k) = n, i, k = 1, 2, \dots, q$  时, 有  $N_{B_i^T} = N_{C_k} = 0, i, k = 1, 2, \dots, q$ , 则步骤1到步骤3只能求得矩阵  $P, Q, T_1$ , 而矩阵  $N_{ij}^{(1)}, N_{ij}^{(2)}, E_{cj}$  只能通过步骤4一并求出;

**情形2** 当  $\text{rank}(B_i) = n, i = 1, 2, \dots, q$ , 且存在  $k$  使得  $\text{rank}(C_k) \neq n$  时, 有  $N_{B_i^T} = 0, i = 1, 2, \dots, q$ , 设  $S_{ij} = P_{11} (N_{ij}^{(1)})^T$ , 求解式(15)可得到  $S_{ij}$ , 进一步可求得  $N_{ij}^{(1)}$ ;

**情形3** 当  $\text{rank}(C_k) = n, k = 1, 2, \dots, q$ , 且存在  $i$  使得  $\text{rank}(B_i) \neq n$  时,  $N_{C_k} = 0, k = 1, 2, \dots, q$ , 此时可通过步骤4而不是步骤3求得  $N_{ij}^{(2)}, E_{cj}$ .

**注2** 值得注意的是, 假设1对于式(14)-(15)的成立是必要条件. 事实上, 如果存在  $(A_i, B_i)$  不可控, 那么必然存在一个不稳定特征值  $\lambda_i$  及其对应的左特征向量  $v_i$ , 使得  $v_i^T A_i =$

$\lambda_i v_i^T, v_i^T B_i = 0$ , 所以  $v_i \in \text{Ker}(B_i^T)$ .

1) 若  $\lambda_i > 0$ , 选择  $v_i$  为  $N_{B_i^T}$  的第 1 列, 则  $N_{B_i^T}^T G_{Qij} N_{B_i}$  的第 1 个元素为  $(2\lambda_i + 1)v_i^T Q_{11} v_i + (1 - \varepsilon)^{-1} v_i^T A_{di} Q_{11} A_{di}^T v_i > 0$ , 所以不等式(14)无解;

2) 若  $\text{Re}\lambda_i > 0$ , 由于矩阵  $A_i, B_i$  是实矩阵, 所以  $\bar{v}_i^T A_i = \bar{\lambda}_i \bar{v}_i^T, \bar{v}_i^T B_i = 0$ , 选择  $\text{Re}v_i = \frac{v_i + \bar{v}_i}{2}$  作为  $N_{B_i^T}$  的第 1 列, 则  $N_{B_i^T}^T G_{Qij} N_{B_i}$  的第 1 个元素为

$$a_{11} = \bar{v}_i^T Q_{11} v_i \text{Re}(\lambda_i) + \text{Re}(\lambda_i v_i Q_{11} v_i) + \text{Re}(v_i) Q_{11} \text{Re}(v_i) + (1 - \varepsilon)^{-1} \text{Re}(v_i) A_{di} Q_{11} A_{di}^T \text{Re}(v_i).$$

另一方面, 若选择  $\text{Im}v_i = \frac{v_i - \bar{v}_i}{2j}$  作为  $N_{B_i^T}$  的第 1 列, 则此时  $N_{B_i^T}^T G_{Qij} N_{B_i}$  的第 1 个元素为

$$b_{11} = \bar{v}_i^T Q_{11} v_i \text{Re}\lambda_i - \text{Re}(\lambda_i v_i Q_{11} v_i) + \text{Im}(v_i) Q_{11} \text{Im}(v_i) + (1 - \varepsilon)^{-1} \text{Im}(v_i) A_{di} Q_{11} A_{di}^T \text{Im}(v_i),$$

那么  $a_{11} < 0$  与  $b_{11} < 0$  不能同时成立, 所以式(14)无解. 同理可证, 如果存在  $(A_i, C_i)$  不可观, 那么式(15)也无解.

### 3.3 吸引域估计及其优化模型

由定理 1 知闭环系统(7)的一个吸引域估计为  $\Lambda$ , 由于笔者真正感兴趣的是原系统(1)的吸引域, 因此, 仅考虑区域  $\Lambda$  与  $x(t)$  向量空间的交空间  $\bar{\Lambda} = \{x | x^T P_{11} x \leq 1\}$ , 以矩阵  $P_{11}$  的最大特征值  $\lambda_{\max}$  的最小化为优化目标, 考虑如下优化模型:

$$\begin{aligned} \min_{P_{11}, M_j, R_{ij}, i, j=1, 2, \dots, q} \quad & \lambda \\ \text{s.t.} \quad & \lambda I \geq P_{11}, \\ & \text{LMIs(10)(15)(17)}. \end{aligned} \tag{19}$$

间接 LMI 一步抗饱和和补偿算法中的步骤 2 做出如下改变就能得到优化算法.

步骤 2 求解式(19)得到矩阵  $P_{11}, M_j, R_{ij}, \lambda, i, j = 1, 2, \dots, q$ .

### 4 数值仿真

取

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{bmatrix} -1.5 - 0.25x_1 & 1 \\ 1 & -0.5 + 0.25x_1 \end{bmatrix}, \\ f_d(x) &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.15 - 0.075x_1 \\ 0.15 + 0.075x_1 & -0.1 \end{bmatrix}, \\ g(x) &= \begin{bmatrix} 0.75 + 0.125x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ h(x) &= [0 \ 1.25 - 0.125x_1], \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

当  $x \in \Omega(x) = \{x \in \mathbb{R}^n | |Lx| \leq d\}$  时, 系统可用 T-S 模型(3)重构. 式(3)中:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \\ A_{d1} &= \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0.3 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad A_{d2} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [0 \ 1], \\ C_2 &= [0 \ 1.5], \quad L = [1 \ 0], \quad d = 2, \\ \mu_1(t) &= 0.5 + 0.25x_1(t), \quad \mu_2(t) = 0.5 - 0.25x_1(t). \end{aligned}$$

引入一维并行分布补偿系统, 取时滞  $\tau = 0.9$ , 初值  $\xi(t) = [1 \ -1.5 \ -0.5]^T, t \in [-0.9, 0]$ , 运用 MATLAB 的 LMI 工具箱求解间接 LMI 一步抗饱和和补偿算法, 得

$$\begin{aligned} A_{c1} &= -1.9638, \quad A_{c2} = -4.0178, \quad B_{c1} = -2.8493, \\ B_{c2} &= -2.1472, \quad C_{c1} = 0.1523, \quad C_{c2} = 0.2017, \\ D_{c1} &= -0.6185, \quad D_{c2} = -2.0573, \quad E_{c1} = 9.4630, \\ E_{c2} &= 3.6341, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} 0.4992 & 0.0209 & -0.2885 \\ 0.0209 & 0.2914 & -0.0673 \\ -0.2885 & -0.0673 & 0.3672 \end{bmatrix}, \\ Q &= \begin{bmatrix} 3.7189 & 0.4261 & 3.0000 \\ 0.4261 & 3.6315 & 1.0000 \\ 3.0000 & 1.0000 & 5.2637 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$T_1 = 1.6736, \quad T = 0.5975, \quad \lambda_{\max} = 0.5013.$$

优化后,

$$P = \begin{bmatrix} 0.2724 & 0.0121 & 0.0029 \\ 0.0121 & 0.1347 & 0.0837 \\ 0.0029 & 0.0837 & 0.4514 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\max} = 0.2735.$$

结合求解结果, 可得闭环系统(7)的状态图如图 1 所示, 闭环系统优化前后的吸引域如图 2 所示.

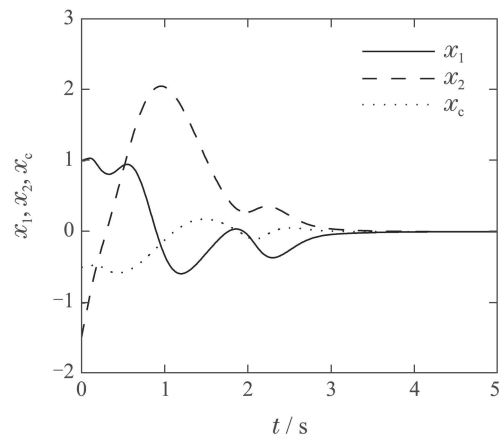


图 1 闭环系统(7)的状态图

Fig. 1 The states diagram of closed-loop system (7)

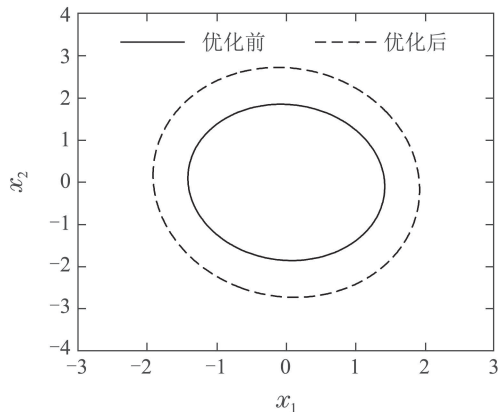


图2 闭环系统(7)的吸引域对比图

Fig. 2 The comparison chart of attraction domain in closed-loop system (7)

由图1可知, 4 s后, 系统状态趋于0, 达到稳定状态, 间接LMI一步抗饱和补偿算法起到了明显的控制效果. 由图2可知, 优化模型(19)起到了较为显著的优化作用.

## 5 结论

本文研究了一类时滞变化率上确界小于1的饱和时滞非线性系统的抗饱和设计. 首先利用T-S模型对时滞非线性系统精确重构, 再利用动态输出反馈引入并行分布补偿系统, 综合得到闭环控制系统. 然后, 利用Lyapunov稳定性理论、扇形区间不等式、Schur补引理、矩阵不等式的等价引理以及矩阵合同变换等理论, 得到间接LMI一步抗饱和补偿算法及吸引域优化模型, 实现了一步求解反馈增益矩阵和补偿增益矩阵的目标. 最后进行了数值仿真, 仿真结果验证了本文提出的抗饱和设计的有效性.

## 参考文献:

- [1] HUSSAIN M, REHAN M. Nonlinear time-delay anti-windup compensator synthesis for nonlinear time-delay systems: a delay-range-dependent approach. *Neurocomputing*, 2016, 186(19): 54 – 65.
- [2] TARBOURIECH S, TURNER M. Anti-windup design: an overview of some recent advances and open problems. *IET Control Theory and Applications*, 2009, 3(1): 1 – 19.
- [3] DA SILVA J M G, OLIVEIRA M Z, COUTINHO D, et al. Static anti-windup design for a class of nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, 24(5): 793 – 810.
- [4] MIAO Yinlong, WANG Jingcheng, WU Feng. Anti-windup compensation design based on LMI and IMC. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(2): 303 – 306.  
(缪银龙, 王景成, 吴风. 基于LMI和IMC的动态反馈抗饱和和补偿设计. 控制理论与应用, 2007, 24(2): 303 – 306.)
- [5] WANG Naizhou, PEI Hailong, WANG Jun, et al. State feedback design for a class of non-rational systems subject to actuator saturation. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(6): 823 – 831.  
(王乃洲, 裴海龙, 王俊, 等. 一类饱和和非有理系统状态反馈设计. 控制理论与应用, 2015, 32(6): 823 – 831.)
- [6] LI H, ZHANG X, LIU Q. Adaptive output feedback control for a class of large-scale output-constrained nonlinear time-delay systems. *IET Control Theory and Applications*, 2017, 12(1): 174 – 181.
- [7] ZHANG X, SU C. Stability analysis and anti-windup design of switched linear systems with actuator saturation. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2018, 16(3): 1247 – 1253.
- [8] PARK J K, CHOI C H, CHOO H. Dynamic anti-windup method for a class of time-delay control systems with input saturation. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2000, 10(6): 457 – 488.
- [9] KLUG M, CASTELAN, EUGÊNIO B, et al. Fuzzy dynamic output feedback control through nonlinear Takagi-Sugeno models. *Fuzzy Sets and Systems*, 2015, 263: 92 – 111.
- [10] ZENG Zhezhao, LIU Wenjue. Wisdom PI control for first-order systems with time-delay. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(8): 1322 – 1328.  
(曾喆昭, 刘文珏. 一阶时滞系统的智慧PI控制. 控制理论与应用, 2019, 36(8): 1322 – 1328.)
- [11] TARBOURIECH S, JR J M G D S, GARCIA G. Delay-dependent anti-windup strategy for linear systems with saturating inputs and delayed outputs. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2004, 14(7): 665 – 682.
- [12] JIA Ru, WANG Gang, SONG Huadong. New stability criterion for time-delay Takagi-Sugeno fuzzy systems. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(3): 317 – 323.  
(贾茹, 汪刚, 宋华东. 一类新的Takagi-Sugeno模糊时滞系统的稳定性准则. 控制理论与应用, 2018, 35(3): 317 – 323.)
- [13] HUSSAIN M, REHAN M, AHN C K, et al. Static anti-windup compensator design for nonlinear time-delay systems subjected to input saturation. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 95(3): 1879 – 1901.
- [14] HE Hanlin, XU Wenwei, YAN Lu. Algebraic anti-windup compensation design for a class of distributed time-delayed cellular neural networks. *Systems Engineering and Electronics*, 2017, 39(6): 1341 – 1346.  
(何汉林, 徐文巍, 严路. 分布时滞细胞神经网络的代数抗饱和和补偿设计. 系统工程与电子技术, 2017, 39(6): 1341 – 1346.)
- [15] WANG Qing, WANG Yong, PENG Cheng, et al. Two-step anti-windup control of helicopter. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2011, 37(7): 888 – 894.  
(汪庆, 王永, 彭程, 等. 直升机两步法抗饱和和控制. 北京航空航天大学学报, 2011, 37(7): 888 – 894.)
- [16] LEE D H, JOO Y H, TAK M H. LMI conditions for local stability and stabilization of continuous-time T-S fuzzy systems. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 2015, 13(4): 986 – 994.
- [17] TAHOUN A H. Anti-windup adaptive PID control design for a class of uncertain chaotic systems with input saturation. *ISA Transactions*, 2017, 66(1): 176 – 184.
- [18] XIE L, DE SOUZA C E. Robust  $H_\infty$  control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(8): 1188 – 1191.
- [19] GAHINET P, APKARIAN P. A linear matrix inequality approach to control. *Robust and Nonlinear Control*, 1994, 4(4): 421 – 428.

## 作者简介:

李豪杰 硕士研究生, 目前研究方向为非线性系统抗饱和控制、稳定性理论, E-mail: 1138408459@qq.com;

何汉林 博士, 教授, 目前研究方向为反馈控制理论、稳定性理论, E-mail: hanlinhe62@aliyun.com;

查苗 博士研究生, 目前研究方向为导航制导与稳定性控制, E-mail: 1074057666@qq.com.