

非仿射纯反馈系统自适应神经网络快速预设性能控制

胡剑波, 王应洋[†], 刘炳琪, 宋仕元

(空军工程大学 装备管理与无人机工程学院, 陕西 西安 710051)

摘要: 鉴于在纯反馈系统控制器设计过程中广泛采用的反推法需要逐级设计虚拟控制律, 设计过程复杂, 本文通过变量替换将一类未知非仿射纯反馈系统变换为等效的积分链式系统. 利用有限时间收敛的微分器对转换系统的状态进行估计, 并构造时变的误差面. 通过对误差面的瞬态与稳态值进行性能约束并设计自适应预设性能控制器, 实现了对跟踪误差的预设性能控制. 最后, 基于Lyapunov理论进行了稳定性分析, 证明了闭环系统所有信号半全局最终一致有界. 仿真算例表明了控制方法的有效性.

关键词: 非仿射系统; 预设性能; 自适应神经网络; 微分器

引用格式: 胡剑波, 王应洋, 刘炳琪, 等. 非仿射纯反馈系统自适应神经网络快速预设性能控制. 控制理论与应用, 2020, 37(10): 2218 – 2230

DOI: 10.7641/CTA.2020.90501

Adaptive neural fast prescribed performance control for non-affine pure-feedback systems

HU Jian-bo, WANG Ying-yang[†], LIU Bing-qi, SONG Shi-yuan

(Equipment Management and Unmanned Aerial Vehicle Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an Shaanxi 710051, China)

Abstract: Considering the complexity of backstepping control for non-affine pure-feedback systems, an equivalent transformational integral chain system is obtained based on variable substitution. The states of the transformational system are estimated by a finite-time-convergent differentiator. A time-varying stable manifold involving the tracking error and its high-order derivatives is chosen to deal with the high-order dynamics. An adaptive prescribed performance controller is constructed to ensure the finite-time convergence of the error manifold to a predefined region. The boundedness and convergence of the closed-loop system are proved by Lyapunov theory. Numerical simulations are performed to verify the theoretical findings.

Key words: non-affine systems; prescribed performance control; adaptive neural control; differentiator

Citation: HU Jianbo, WANG Yingyang, LIU Bingqi, et al. Adaptive neural fast prescribed performance control for non-affine pure-feedback systems. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(10): 2218 – 2230

1 引言

非仿射特性广泛存在于机械、生化和飞行控制等实际系统中, 有关非仿射系统的控制问题是近几年的研究热点^[1-11]. 一些在严反馈系统中应用的成果开始逐步拓展到非仿射系统中, 但非仿射函数不显含控制输入, 无法直接针对非仿射系统设计控制器. 采用不同方法设计控制器时, 通常需要对非仿射系统做一些相应的假设以变换为面向控制器设计的伪仿射系统.

拉格朗日中值定理^[1-3]和泰勒公式^[4-6]是将非仿射系统变换为伪仿射系统的有效手段. 针对变换后的伪仿射系统, 有两种典型的控制器设计方案: 基于反

推法逐步设计控制器和基于误差面设计控制器. 在基于反推法设计控制器方面: 文献[1]针对变换后的伪仿射模型, 设计了自适应神经网络控制器, 通过引入一阶低通滤波器避免了对虚拟控制律的反复求导; 文献[2]借助于自适应神经网络和Nussbaum函数, 解决了一类含未建模动态与控制增益符号未知的非仿射纯反馈系统的控制问题. 在基于误差面设计控制器方面: 文献[3]通过假设非仿射函数光滑可导将非仿射纯反馈系统变换为积分链式系统, 采用高阶滑模微分器观测变换模型的状态并针对变换模型设计了自适应神经网络估计器, 避免了反推法的繁琐过程, 减少了估

收稿日期: 2019-06-29; 录用日期: 2020-06-29.

[†]通信作者. E-mail: wangyingyang@outlook.com; Tel.: +86 29-84788466.

本文责任编辑: 席在荣.

计器的数量. 基于反推技术的控制方法可处理非匹配不确定性问题, 但需要逐级设计虚拟控制律; 基于误差面的控制方法通过数学变换把系统所有的不确定性集中到一项, 然后采用估计器进行统一估计, 大大降低了计算复杂度且无需虚拟控制律.

针对未知非仿射系统, 控制器设计往往依赖于宽松的可控性假设与复杂的估计器. 文献[7-11]采用模糊系统与神经网络等估计器对仿射系统中的未知非线性项进行估计并设计满足Lyapunov稳定性的控制律. 然而, 通过有限的模型信息无法实现准确的反馈补偿, 控制精度难以保证. 因此, 有必要在控制器设计过程中对跟踪误差施加约束, 以实现高精度跟踪控制.

对于含输出约束的控制问题, Ilchmann, Tee 与 Bechlious 等人相继提出了漏斗控制^[12-14]、界限Lyapunov函数^[15-17]与预设性能控制^[18-22]等方法. 上述方案将性能约束考虑到控制器设计过程中, 以保证闭环系统实现理想的控制性能. 预设性能控制可以更为灵活地和其他控制方法结合并应用到高阶系统, 因而得到了广泛的研究: 文献[18]将预设性能控制与反推技术结合, 解决了严反馈系统的控制问题; 文献[19]针对非仿射纯反馈系统, 基于反推法设计了一种低复杂度的预设性能控制器, 该方案无需任何估计器, 但在反推过程中的每一步都需要单独设计性能函数, 增大了产生控制器奇异问题的风险.

为避免文献[18-22]中复杂的反推设计过程同时保证跟踪误差满足预先设定的性能约束, 本文将针对一类未知非仿射纯反馈系统基于有限时间收敛的微分器设计一种自适应神经网络预设性能控制器.

2 问题描述与模型变换

考虑如下所示的一类非仿射纯反馈系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}), & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = f_n(x, u) + \Delta(t), \\ y = x_1, \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\bar{x}_i = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_i]^T \in \mathbb{R}^i$, $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$, x 为可测的状态向量; $y \in \mathbb{R}$ 与 $u \in \mathbb{R}$ 分别表示系统输出与控制输入; $f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})$ 与 $f_n(x, u)$ 为光滑的非仿射函数; $\Delta(t)$ 为外部干扰.

控制目标为: 设计自适应预设性能控制器, 使得闭环系统能够稳定地跟踪参考输入信号 y_d , 闭环系统所有信号半全局一致有界且跟踪误差满足预先规定的动态性能. 为避免反推设计的繁琐过程, 本节参照文献[3]将系统(1)变换为便于控制器设计的积分链式系统. 首先, 定义如下新的状态变量:

$$\begin{cases} \chi_1 = x_1, \\ \chi_i = \dot{\chi}_{i-1}, & i = 2, 3, \dots, n. \\ y = \chi_1, \end{cases} \quad (2)$$

当 $i = 2$ 时, 根据 $\chi_2 = \dot{\chi}_1 = f_1(x_1, x_2)$ 可得

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_2 &= \\ & \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \\ & \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} f_2(\bar{x}_2, x_3). \end{aligned} \quad (3)$$

由于未知非仿射函数 $f_2(\bar{x}_2, x_3)$ 对 x_3 连续可导, 由拉格朗日中值定理可知, 存在未知常数 $\vartheta_3 \in (0, 1)$ 满足

$$f_2(\bar{x}_2, x_3) = f_2(\bar{x}_2, 0) + \frac{\partial f_2(\bar{x}_2, x_3)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=x_3^{\vartheta_3}} x_3, \quad (4)$$

其中 $x_3^{\vartheta_3} = \vartheta_3 x_3$. 因此, $\dot{\chi}_2$ 可表述为

$$\dot{\chi}_2 = H_2(\bar{x}_2) + G_2(\bar{x}_3)x_3, \quad (5)$$

式中:

$$\begin{cases} H_2(\bar{x}_2) = \\ \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} f_2(\bar{x}_2, 0), \\ G_2(\bar{x}_3) = \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \frac{\partial f_2(\bar{x}_2, x_3)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=x_3^{\vartheta_3}}, \end{cases} \quad (6)$$

$H_2(\bar{x}_2)$ 与 $G_2(\bar{x}_3)$ 均为未知光滑函数.

当 $i = 3$ 时, 根据

$$\chi_3 = \dot{\chi}_2 = H_2(\bar{x}_2) + G_2(\bar{x}_3)x_3$$

可得

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_3 &= \sum_{j=1}^2 \frac{\partial H_2(\bar{x}_2)}{\partial x_j} f_j(\bar{x}_{j+1}) + \\ & \sum_{j=1}^2 \frac{\partial G_2(\bar{x}_3)}{\partial x_j} f_j(\bar{x}_{j+1})x_3 + \\ & \frac{\partial G_2(\bar{x}_3)}{\partial x_3} \dot{x}_3 x_3 + G_2(\bar{x}_3) \dot{x}_3 = \\ & \sum_{j=1}^2 \frac{\partial H_2(\bar{x}_2)}{\partial x_j} f_j(\bar{x}_{j+1}) + \\ & \sum_{j=1}^2 \frac{\partial G_2(\bar{x}_3)}{\partial x_j} f_j(\bar{x}_{j+1})x_3 + \\ & \left(\frac{\partial G_2(\bar{x}_3)}{\partial x_3} x_3 + G_2(\bar{x}_3) \right) f_3(\bar{x}_3, x_4). \end{aligned} \quad (7)$$

由于未知非仿射函数 $f_3(\bar{x}_3, x_4)$ 对 x_4 连续可导, 由拉格朗日中值定理可知, 存在未知常数 $\vartheta_4 \in (0, 1)$ 满足

$$f_3(\bar{x}_3, x_4) = f_3(\bar{x}_3, 0) + \frac{\partial f_3(\bar{x}_3, x_4)}{\partial x_4} \Big|_{x_4=x_4^{\vartheta_4}} x_4, \quad (8)$$

式中 $x_4^{\vartheta_4} = \vartheta_4 x_4$. 因此, $\dot{\chi}_3$ 可表述为

$$\dot{\chi}_3 = H_3(\bar{x}_3) + G_3(\bar{x}_4)x_4, \quad (9)$$

式中:

$$\begin{cases} H_3(\bar{x}_3) = & \left(\frac{\partial G_{n-1}(\bar{x}_n)}{\partial x_n}x_n + G_{n-1}(\bar{x}_n)\right)f_n(\bar{x}_n, x_{n+1}). \\ \sum_{j=1}^2 \frac{\partial H_2(\bar{x}_2)}{\partial x_j} f_j(\bar{x}_{j+1}) + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial G_2(\bar{x}_3)}{\partial x_j} f_j(\bar{x}_{j+1})x_3 + & (15) \\ \left(\frac{\partial G_2(\bar{x}_3)}{\partial x_3}x_3 + G_2(\bar{x}_3)\right)f_3(\bar{x}_3, 0), \\ G_3(\bar{x}_4) = \\ \left(\frac{\partial G_2(\bar{x}_3)}{\partial x_3}x_3 + G_2(\bar{x}_3)\right)\frac{\partial f_3(\bar{x}_3, x_4)}{\partial x_4}\Big|_{x_4=x_4^{\vartheta_4}}, \end{cases}$$

$H_3(\bar{x}_3)$ 与 $G_3(\bar{x}_4)$ 均为未知光滑函数.

当 $i = 4, 5, \dots, n-1$ 时, 与上述分析类似, 根据 $\chi_i = \dot{\chi}_{i-1} = H_{i-1}(\bar{x}_{i-1}) + G_{i-1}(\bar{x}_i)x_i$ 可以推导出

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_i = & \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial H_{i-1}(\bar{x}_{i-1})}{\partial x_j} f_j(\bar{x}_{j+1}) + \\ & \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial G_{i-1}(\bar{x}_i)}{\partial x_j} f_j(\bar{x}_{j+1})x_i + \left(\frac{\partial G_{i-1}(\bar{x}_i)}{\partial x_i}x_i + \right. \\ & \left. G_{i-1}(\bar{x}_i)\right)f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}). \end{aligned} \quad (11)$$

由于未知非仿射函数 $f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})$ 对 x_{i+1} 连续可导, 由拉格朗日中值定理可知, 存在未知常数 $\vartheta_{i+1} \in (0, 1)$ 满足

$$\begin{aligned} f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) = & \\ f_i(\bar{x}_i, 0) + \frac{\partial f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}}\Big|_{x_{i+1}=x_{i+1}^{\vartheta_{i+1}}}x_{i+1}, \end{aligned} \quad (12)$$

式中 $x_{i+1}^{\vartheta_{i+1}} = \vartheta_{i+1}x_{i+1}$. 因此, $\dot{\chi}_i$ 可表述为

$$\dot{\chi}_i = H_i(\bar{x}_i) + G_i(\bar{x}_{i+1})x_{i+1}, \quad (13)$$

式中:

$$\begin{cases} H_i(\bar{x}_i) = \\ \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial H_{i-1}(\bar{x}_{i-1})}{\partial x_j} f_j(\bar{x}_{j+1}) + \\ \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial G_{i-1}(\bar{x}_i)}{\partial x_j} f_j(\bar{x}_{j+1})x_i + \\ \left(\frac{\partial G_{i-1}(\bar{x}_i)}{\partial x_i}x_i + G_{i-1}(\bar{x}_i)\right)f_i(\bar{x}_i, 0), \\ G_i(\bar{x}_{i+1}) = \\ \left(\frac{\partial G_{i-1}(\bar{x}_i)}{\partial x_i}x_i + \right. \\ \left. G_{i-1}(\bar{x}_i)\right)\frac{\partial f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}}\Big|_{x_{i+1}=x_{i+1}^{\vartheta_{i+1}}}, \end{cases} \quad (14)$$

$H_i(\bar{x}_i)$ 与 $G_i(\bar{x}_{i+1})$ 均为未知光滑函数.

当 $i = n$ 时, 根据 $\chi_n = \dot{\chi}_{n-1} = H_{n-1}(\bar{x}_{n-1}) + G_{n-1}(\bar{x}_n)x_n$ 可以推导出

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_n = & \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial H_{n-1}(\bar{x}_{n-1})}{\partial x_j} f_j(\bar{x}_{j+1}) + \\ & \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial G_{n-1}(\bar{x}_n)}{\partial x_j} f_j(\bar{x}_{j+1})x_n + \end{aligned}$$

由于未知非仿射函数 $f_n(\bar{x}_n, x_{n+1})$ 对 x_{n+1} 连续可导, 由拉格朗日中值定理可知, 存在未知常数 $\vartheta_{n+1} \in (0, 1)$ 满足

$$f_n(\bar{x}_n, x_{n+1}) = f_n(\bar{x}_n, 0) + \frac{\partial f_n(\bar{x}_n, u)}{\partial u}\Big|_{u=u^{\vartheta_{n+1}}}u, \quad (16)$$

式中 $u^{\vartheta_{n+1}} = \vartheta_{n+1}u$. 因此, $\dot{\chi}_n$ 可表述为

$$\dot{\chi}_n = H_n(\bar{x}_n) + G_n(\bar{x}_n, u^{\vartheta_{n+1}})u + \Delta(t), \quad (17)$$

式中:

$$\begin{cases} H_n(\bar{x}_n) = \\ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial H_{n-1}(\bar{x}_{n-1})}{\partial x_j} f_j(\bar{x}_{j+1}) + \\ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial G_{n-1}(\bar{x}_n)}{\partial x_j} f_j(\bar{x}_{j+1})x_n + \\ \left(\frac{\partial G_{n-1}(\bar{x}_n)}{\partial x_n}x_n + G_{n-1}(\bar{x}_n)\right)f_n(\bar{x}_n, 0), \\ G_n(\bar{x}_n, u^{\vartheta_{n+1}}) = \\ \left(\frac{\partial G_{n-1}(\bar{x}_n)}{\partial x_n}x_n + \right. \\ \left. G_{n-1}(\bar{x}_n)\right)\frac{\partial f_n(\bar{x}_n, u)}{\partial u}\Big|_{u=u^{\vartheta_{n+1}}}, \end{cases} \quad (18)$$

$H_n(\bar{x}_n)$ 与 $G_n(\bar{x}_n, u^{\vartheta_{n+1}})$ 均为未知光滑函数. 由式(2)-(18)可知, 系统(1)可表述为

$$\begin{cases} \dot{\chi}_1 = \chi_2, \\ \dot{\chi}_i = \chi_{i+1}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \\ \dot{\chi}_n = H_n(\bar{x}_n) + G_n(\bar{x}_n, u^{\vartheta_{n+1}})u + \Delta(t), \\ y = \chi_1. \end{cases} \quad (19)$$

结合新定义的状态变量(2)和坐标变换(3)-(18), 非仿射纯反馈系统(1)被改写成了积分链式系统(19). 由于 $y_1 = x_1 = \chi_1$, 针对系统(1)所设置的控制目标可以通过控制变换后的系统(19)得以实现. 然而, 在系统(19)中, 状态 $\chi_i (i = 2, 3, \dots, n)$ 不能直接测得, 且 $H_n(\bar{x}_n)$ 与 $G_n(\bar{x}_n, u^{\vartheta_{n+1}})$ 均为未知函数. 下文将借助于必要的假设以保证系统(19)的可控性; 然后, 采用高阶微分器对状态 χ_i 进行估计; 最后, 针对系统(19)设计自适应神经网络预设性能输出反馈控制器.

假设1 指令信号 y_d 及其高阶导数 $y_d^{(i)} (i = 1, 2, \dots, n)$ 为连续有界的已知函数, 且存在未知正数 B_0 与 Δ^* 满足 $\sum_{i=0}^n (y_d^{(i)})^2 \leq B_0, |\Delta(t)| \leq \Delta^*$.

假设2 不失一般性, 假设存在未知正数 \underline{G} 满足 $G_n(\bar{x}_n, u^{\vartheta_{n+1}}) \geq \underline{G} > 0$.

注1 假设2作为必要的可控性条件被文献[1-6]广泛

采用. 在稳定性证明过程中, \underline{C} 值不必确知. 与文献[3]相比, 本文取消了对 $G_n(\bar{x}_n, u^{j_{n+1}})$ 上界的假设, 因此假设2具有更宽的适用范围.

引理 1^[23] 如果未知函数 $f(Z): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 在紧集 Ω_Z 上连续, 那么存在径向基神经网络 $W^* \Psi(Z)$ 与期望的估计精度 $\iota > 0$ 满足

$$\sup_{Z \in \Omega_Z} |f(Z) - W^* \Psi(Z)| \leq \iota, \quad (20)$$

其中: $\Psi(Z) = [\Psi_1(Z) \ \Psi_2(Z) \ \cdots \ \Psi_m(Z)]^T \in \mathbb{R}^m$ 是基函数向量, $Z \in \Omega_Z \subset \mathbb{R}^n$ 是基函数的输入矢量, $W^* = [w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_m]^T \in \mathbb{R}^m$ 是基函数的理想权值, $\Psi_j(Z)$ 可表示为

$$\Psi_j(Z) = \exp\left[-\frac{(Z - c_j)^T (Z - c_j)}{b_j^2}\right], \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (21)$$

式中 b_j 与 $c_j = [c_{j,1} \ c_{j,2} \ \cdots \ c_{j,n}]^T$ 分别是高斯基函数的宽度和中心点坐标向量.

3 控制器设计与稳定性分析

3.1 有限时间收敛的高阶微分器

变换系统(19)的状态 $\chi_i (i = 2, 3, \dots, n)$ 可视为系统输出 $y = \chi_1$ 的 $i - 1$ 阶微分. 为估计无数学解析表达式的信号的各阶导数, 文献[24-26]构造了一种有限时间收敛的新型高阶微分器, 其具体结构如下:

$$\begin{cases} \dot{\varsigma}_i = \varsigma_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1, \\ \dot{\varsigma}_n = h^n [-\kappa_1 \tanh(\varsigma_1 - \chi_1) - \kappa_2 \tanh \frac{\varsigma_2}{h} \cdots \\ - \kappa_n \tanh \frac{\varsigma_n}{h^{n-1}}], \end{cases} \quad (22)$$

其中: $h > 0, \kappa_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 为待设计参数, χ_1 是输入信号. 根据文献[24]有以下引理成立.

引理 2^[24-26] 如果信号 χ_1 对时间一阶广义可导并且满足 $\sup_{t \in [0, \infty)} |\chi_1| < \infty$, 那么对于 $\forall \kappa_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 与 $h \rightarrow \infty$, 存在 $\Upsilon_1 > 0$ 与 $\Upsilon_1 \Upsilon_2 > n$ 在有限时间内满足

$$\varsigma_i - \chi_1^{(i-1)}(t) = o\left(\frac{1}{h^{\Upsilon_1 \Upsilon_2 - i + 1}}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (23)$$

其中 $o\left(\frac{1}{h^{\Upsilon_1 \Upsilon_2 - i + 1}}\right)$ 表示 ς_i 与 $\chi_1^{(i-1)}(t)$ 的近似程度是 $\frac{1}{h^{\Upsilon_1 \Upsilon_2 - i + 1}}$ 的高阶无穷小, 且 $\Upsilon_1 = (1 - \Upsilon_3)/\Upsilon_3, \Upsilon_3 \in (0, \min\{\Upsilon_2/(\Upsilon_2 + n), 1/2\}), n \geq 2$.

注 2 引理2阐述了微分器(22)的特点, 具体证明过程参见文献[24-26], 本文不再赘述. ς_i 是 $\chi_1^{(i-1)}$ 的估计值, 估计误差是 $(1/h)^{\Upsilon_1 \Upsilon_2 - i + 1}$ 的高阶无穷小. 当选取足够大的参数 $h \gg 1$ 时, 估计误差可以任意小. 因此, 可假设存在未知正数 φ_i 满足 $|\varsigma_i - \chi_i| \leq \varphi_i$. 文献[24]指出: h 越大, 微分器响应

速度越快, 估计精度越高, 但可能引起超调并削弱噪声抑制能力. κ_i 越大, 对应的第 i 个状态的估计误差越小, 但同样可能引起超调并削弱噪声抑制能力. 因此, 在参数选取过程中应综合考虑微分器的估计精度、超调与噪声抑制能力.

3.2 控制器设计

针对变换系统(19)定义跟踪误差 e_i , 状态观测误差 \widehat{e}_i 和可用误差 $\hat{e}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 分别如下:

$$\begin{cases} e_1 = \chi_1 - y_d, \quad e_2 = \dot{e}_1 = \chi_2 - \dot{y}_d, \dots, \\ e_n = \dot{e}_{n-1} = \chi_n - \dot{y}_d^{n-1}, \\ \widehat{e}_1 = \varsigma_1 - \chi_1, \quad \widehat{e}_2 = \dot{\widehat{e}}_1 = \varsigma_2 - \chi_2, \dots, \\ \widehat{e}_n = \dot{\widehat{e}}_{n-1} = \varsigma_n - \chi_n, \\ \hat{e}_1 = \varsigma_1 - y_d, \quad \hat{e}_2 = \dot{\hat{e}}_1 = \varsigma_2 - \dot{y}_d, \dots, \\ \hat{e}_n = \dot{\hat{e}}_{n-1} = \varsigma_n - \dot{y}_d^{(n-1)}. \end{cases} \quad (24)$$

由上述定义可知 $\hat{e}_i = \widehat{e}_i + e_i, i = 1, 2, \dots, n$. 为便于设计控制器, 构造误差面

$$s(t) = p(r_0 + q)^{n-1} \hat{e}_1, \quad (25)$$

其中: $p > 0, q > 0$ 为待设计参数; $r_0 = \frac{d}{dt}$ 是一阶微分算子; $\hat{e} = [\hat{e}_1 \ \hat{e}_2 \ \cdots \ \hat{e}_n]^T$. 图1是由误差信号 $s(t)/p$ 驱动的 $n - 1$ 个串联低通滤波器, 阐释了式(25)所刻画的数学关系, 其中: $\omega_1(t) = \hat{e}_1(t), \omega_n(t) = s(t)/p$ 且 $\omega_{i+1}(t) = \dot{\omega}_i(t) + q\omega_i(t), i = 1, 2, \dots, n - 1$.

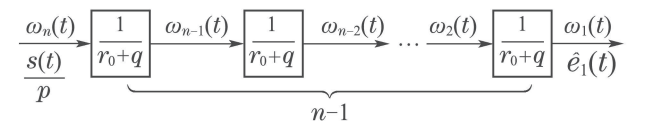


图 1 由误差面 $s(t)/p$ 驱动的 $n - 1$ 个串联低通滤波器
Fig. 1 A series of first order linear low pass filters driven by error manifold $s(t)/p$

为保证误差面 $s(t)$ 实现预设性能, 假设 $s(t)$ 满足以下不等式约束:

$$-\rho(t) < s(t) < \rho(t), \quad t \geq 0, \quad (26)$$

其中性能函数 $\rho(t)$ 定义为

$$\rho(t) = (\rho_0 - \rho_\infty) \exp(-lt) + \rho_\infty, \quad (27)$$

式中: $\rho_0 = \rho(0)$ 是性能函数的初始值, $\rho_\infty = \rho(\infty)$ 是性能函数的稳态值, $l \geq 0$ 是指数函数的收敛速率. 通过选择合适的参数 ρ_0, l 与 ρ_∞ 可使得 $q > l, \rho_0 > \rho_\infty > 0$ 且 $|s(0)| < \rho(0)$ 成立. 因此, $\dot{\rho}(t)$ 有界且保持非正; ρ_0 限制了跟踪误差 $s(t)$ 在瞬态的超调量; ρ_∞ 约束了跟踪误差 $s(t)$ 在稳态时的变化范围. 在具体应用中, $\rho(t)$ 的参数需根据实际对象的初始误差、物理系统响应带宽及跟踪精度需求进行选择.

定理 1 若不等式(26)成立, 则可用误差 $\hat{e}_i(t)$ 有界

并且满足以下预设的指数收敛约束

$$|\hat{e}_i(t)| < \bar{e}_i \exp(-lt) + \hat{e}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (28)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{e}_1 &= \frac{\rho_\infty}{pq^{n-1}}, \quad \hat{e}_i = \frac{\rho_\infty}{pq^{n-1}} + \sum_{k=1}^{i-1} C_{i-1}^k q^k \hat{e}_{i-k}, \\ & \quad i = 2, 3, \dots, n; \\ \bar{e}_1 &= \bar{\omega}_1, \quad \bar{e}_i = \bar{\omega}_1 + \sum_{k=1}^{i-1} C_{i-1}^k q^k \bar{e}_{i-k}, \\ & \quad i = 2, 3, \dots, n; \\ \bar{\omega}_i &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|\omega_k(0)|}{(q-l)^{k-i}} + \frac{\rho_0 - \rho_\infty}{p(q-l)^{n-i}}, \\ & \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \\ \bar{\omega}_n &= \frac{\rho_0 - \rho_\infty}{p}; \\ \omega_i(0) &= \sum_{k=0}^{i-1} C_{i-1}^k q^k \hat{e}_{i-k}(0), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right. \quad (29)$$

证 具体的证明过程分为以下3部分:

1) 结合 $\omega_{i+1}(t) = \dot{\omega}_i(t) + q\omega_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, 由数学归纳法可得

$$\omega_i(t) = \sum_{k=0}^{i-1} C_{i-1}^k q^k \hat{e}_{i-k}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (30)$$

根据式(30)可得

$$\omega_i(t) = \hat{e}_i(t) + \sum_{k=1}^{i-1} C_{i-1}^k q^k \hat{e}_{i-k}(t), \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (31)$$

且

$$\omega_i(0) = \sum_{k=0}^{i-1} C_{i-1}^k q^k \hat{e}_{i-k}(0), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (32)$$

2) 以下推导旨在证明 $|\omega_i(t)|$ ($i = 1, 2, \dots, n$)的有界性.

i) 当 $i = n$ 时, 解一阶微分方程 $s(t)/p = \dot{\omega}_{n-1}(t) + q\omega_{n-1}(t)$, $t \geq 0$ 可得

$$\begin{aligned} \omega_{n-1}(t) &= \\ \omega_{n-1}(0) \exp(-qt) &+ \exp(-qt) \int_0^t \frac{s(\tau)}{p} \exp(q\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (33)$$

根据 $q > l \geq 0$ 与不等式 $|s(t)|/p < [(\rho_0 - \rho_\infty) \exp(-lt) + \rho_\infty] / p$, $t \geq 0$ 可得

$$\begin{aligned} |\omega_{n-1}(t)| &\leq \\ |\omega_{n-1}(0)| \exp(-qt) &+ \\ \frac{\exp(-qt)}{p} \int_0^t ((\rho_0 - \rho_\infty) \exp((q-l)\tau) &+ \\ \rho_\infty \exp(q\tau)) d\tau &\leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &|\omega_{n-1}(0)| \exp(-qt) + \frac{\rho_0 - \rho_\infty}{p(q-l)} \exp(-lt) + \frac{\rho_\infty}{pq} - \\ &\underbrace{\left(\frac{(\rho_0 - \rho_\infty)}{p(q-l)} \exp(-qt) - \frac{\rho_\infty}{p(q-l)} \exp(-qt) \right)}_{<0} < \\ &\bar{\omega}_{n-1} \exp(-lt) + \frac{\rho_\infty}{pq}, \end{aligned} \quad (34)$$

其中

$$\bar{\omega}_{n-1} = |\omega_{n-1}(0)| \frac{\rho_0 - \rho_\infty}{p(q-l)}. \quad (35)$$

ii) 当 $i = n-1$ 时, 与上述步骤类似, 通过求解一阶微分方程 $\omega_{n-1}(t) = \dot{\omega}_{n-2}(t) + q\omega_{n-2}(t)$, $t \geq 0$ 可得

$$\begin{aligned} \omega_{n-2}(t) &= \omega_{n-2}(0) \exp(-qt) + \\ &\exp(-qt) \int_0^t \omega_{n-1}(\tau) \exp(q\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (36)$$

由式(34)和 $q > l \geq 0$ 可得

$$\begin{aligned} |\omega_{n-2}(t)| &\leq \\ |\omega_{n-2}(0)| \exp(-qt) &+ \\ \exp(-qt) \int_0^t (\bar{\omega}_{n-1} \exp(q-l)\tau + & \\ \frac{\rho_\infty}{bq} \exp(q\tau)) d\tau &\leq |\omega_{n-2}(0)| \exp(-qt) + \\ \frac{\bar{\omega}_{n-1}}{q-l} \exp(-lt) + \frac{D_\infty}{pq^2} - & \\ \underbrace{\left(\frac{\bar{\omega}_{n-1}}{q-l} \exp(-qt) - \frac{D_\infty}{pq^2} \exp(-qt) \right)}_{<0} < & \\ \bar{\omega}_{n-2} \exp(-lt) + \frac{\rho_\infty}{pq^2}, & \end{aligned} \quad (37)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{n-2} &= |\omega_{n-2}(0)| + \frac{\bar{\omega}_{n-1}}{q-l} = \\ |\omega_{n-2}(0)| + \frac{|\omega_{n-1}(0)|}{q-l} + \frac{\rho_0 - \rho_\infty}{p(q-l)^2}. \end{aligned} \quad (38)$$

iii) 当 $i = 1, 2, \dots, n-3$ 时, 求解一阶微分方程 $\omega_{i+1}(t) = \dot{\omega}_i(t) + q\omega_i(t)$, $t \geq 0$ 可得

$$\begin{aligned} \omega_i(t) &= \omega_i(0) \exp(-qt) + \\ \exp(-qt) \int_0^t \omega_{i+1}(\tau) \exp(q\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (39)$$

由数学归纳法和 $q > l \geq 0$ 可得

$$\begin{aligned} |\omega_i(t)| &\leq \\ |\omega_i(0)| \exp(-qt) &+ \\ \exp(-qt) \int_0^t (\bar{\omega}_{i+1} \exp((q-l)\tau) &+ \\ \frac{\rho_\infty}{pq^{n-i-1}} \exp(q\tau)) d\tau &\leq \\ |\omega_i(0)| \exp(-qt) + \frac{\bar{\omega}_{i+1}}{q-l} \exp(-lt) &+ \frac{\rho_\infty}{pq^{n-i}} - \end{aligned}$$

$$\underbrace{\frac{\bar{\omega}_{i+1}}{q-l} \exp(-qt) - \frac{\rho_\infty}{pq^{n-i}} \exp(-qt)}_{<0} < \bar{\omega}_i \exp(-lt) + \frac{\rho_\infty}{pq^{n-i}}, \quad (40)$$

其中

$$\bar{\omega}_i = |\omega_i(0)| + \frac{\bar{\omega}_{i+1}}{q-l} = \sum_{k=i}^{n-1} \frac{|\omega_i(0)|}{(q-l)^{k-i}} + \frac{\rho_0 - \rho_\infty}{p(q-l)^{n-i}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-3. \quad (41)$$

3) 以下推导旨在证明 $|\hat{e}_i(t)|, i = 1, 2, \dots, n$ 的有界性.

i) 当 $i = 1$ 时, 根据式(40)可知

$$|\hat{e}_1(t)| = |\omega_1(t)| < \bar{e}_1 \exp(-lt) + \hat{e}_1, \quad (42)$$

其中:

$$\bar{e}_1 = \bar{\omega}_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|\omega_k(0)|}{(q-l)^{k-1}} + \frac{\rho_0 - \rho_\infty}{p(q-l)^{n-1}}, \quad \hat{e}_1 = \frac{\rho_\infty}{pq^{n-1}}. \quad (43)$$

ii) 当 $i = 2$ 时, 结合式(31)和式(42)可得

$$|\hat{e}_2(t)| \leq |\omega_2(t)| + |q\hat{e}_1(t)| < \bar{e}_2 \exp(-lt) + \hat{e}_2, \quad (44)$$

其中:

$$\bar{e}_2 = \bar{\omega}_2 + q\bar{e}_1, \quad \hat{e}_2 = \frac{\rho_\infty}{pq^{n-2}} + q\hat{e}_1. \quad (45)$$

iii) 当 $i = 3, 4, \dots, n$ 时, 由式(31)和数学归纳法可得

$$|\hat{e}_i(t)| \leq |\omega_i(t)| + \sum_{k=1}^{i-1} C_{i-1}^k q^k |\hat{e}_{i-k}(t)| < \bar{e}_i \exp(-lt) + \hat{e}_i, \quad (46)$$

其中:

$$\begin{cases} \bar{e}_i = \bar{\omega}_i + \sum_{k=1}^{i-1} C_{i-1}^k q^k \bar{e}_{i-k}, \\ \hat{e}_i = \frac{\rho_\infty}{pq^{n-i}} + \sum_{k=1}^{i-1} C_{i-1}^k q^k \hat{e}_{i-k}, \\ i = 3, 4, \dots, n. \end{cases} \quad (47)$$

根据式(42)(44)和式(46), 不等式(28)成立. 证毕.

为了实现预设性能控制, 带约束的误差面 $s(t)$ 可通过以下等式变换成不含约束的转化误差 $z(t)$:

$$s(t) = \rho(t)\Xi(z(t)), \quad \forall t \geq 0, \quad (48)$$

式中

$$\Xi(z(t)) = \frac{\exp(z(t)) - \exp(-z(t))}{\exp(z(t)) + \exp(-z(t))}$$

是单调递增的可导函数. 根据 $\Xi(z(t))$ 的定义可得

$$z(t) = \Xi^{-1} \frac{s(t)}{\rho(t)} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\zeta(t) + 1}{1 - \zeta(t)} \right), \quad (49)$$

其中 $\zeta(t) = s(t)/\rho(t)$ 定义为标准化误差. 假设选择适当的性能函数满足条件 $|s(0)| < \rho(0)$, 即 $|\zeta(0)| < 1$, 则有以下定理成立.

定理 2^[18] 若可通过设计控制律保证 $z(t)$ 对 $\forall t \geq 0$ 有界, 则 $|\zeta(t)| < 1$, 预设性能(26)可以实现.

证 假设存在正数 z_M 满足 $|z(t)| \leq z_M$, 由式(49)可得

$$\exp(-2z_M) \leq \frac{\zeta(t) + 1}{1 - \zeta(t)} \leq \exp(2z_M), \quad (50)$$

进一步可得

$$\begin{aligned} -1 < -\frac{\exp(-2z_M) - 1}{\exp(-2z_M) + 1} &\leq \\ \zeta(t) &\leq \frac{\exp(2z_M) - 1}{\exp(2z_M) + 1} < 1. \end{aligned} \quad (51)$$

根据不等式(51), 可知不等式(26)成立. 证毕.

对 $s(t)$ 求时间的一阶导数可得

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= p \sum_{i=1}^n C_{n-1}^{i-1} q^{n-i} \dot{\hat{e}}_i = \\ p \left[\sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1} q^{n-i} (\dot{\hat{e}}_i + \dot{e}_i) + \dot{\hat{e}}_n + H_n(\bar{x}_n) + \right. \\ &\left. G_n(\bar{x}_n, u^{\vartheta_{n+1}})u + \Delta(t) - y_d^{(n)} \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

对 $z(t)$ 求时间的一阶导数可得

$$\dot{z}(t) = r(\dot{s}(t) + v), \quad (53)$$

其中

$$r = \frac{1}{(1 - \zeta^2(t))\rho(t)}, \quad (54)$$

且

$$v = -\dot{\rho}(t)\zeta(t). \quad (55)$$

将式(52)代入式(53)中可得

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= rp \left[\sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1} q^{n-i} (\dot{\hat{e}}_i + \dot{e}_i) + \dot{\hat{e}}_n + \right. \\ &\left. H_n(\bar{x}_n) + G_n(\bar{x}_n, u^{\vartheta_{n+1}})u + \Delta(t) - y_d^{(n)} + \frac{v}{p} \right] = \\ &rp(\bar{f} + G_n(\bar{x}_n, u^{\vartheta_{n+1}})u + \Delta(t) - y_d^{(n)} + \frac{v}{p}), \end{aligned} \quad (56)$$

其中 $\bar{f} = \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1} q^{n-i} (\dot{\hat{e}}_i + \dot{e}_i) + \dot{\hat{e}}_n + H_n(\bar{x}_n)$. 定义紧集 $\Omega := \{z | z^2/2 \leq p\}$, 其中 p 为任意正数. 根据引理1, 在紧集 Ω_z 范围内, 可用神经网络 $W^*T\Psi(Z)$ 估计未知非线性连续函数 \bar{f} , 因此

$$\bar{f} = W^*T\Psi(Z) + \iota, \quad |\iota| \leq \iota^*, \quad (57)$$

其中: ι^* 为未知常数, $Z = [x \ \varsigma]^T$, $\varsigma = [\varsigma_1 \ \varsigma_2 \ \dots \ \varsigma_n]^T$.

通常理想权值 W^{*T} 未知, 其各元素值需基于Lyapunov稳定性理论设计自适应律进行估计. 为降低计算量, 本文不直接估计径向基函数的理想权值而是采用最小参数学习法估计 $\theta = \underline{G}^{-1}\|W^*\|^2$. 由式(54)与式(55)易知, 在紧集 Ω_z 范围内, $r \geq 1/\rho(0) > 0$ 且存在有界正数 \bar{v} 满足 $|v| \leq \bar{v}$. 根据Young不等式可得

$$\begin{aligned} \frac{z\dot{z}}{p} = & zr(G_n(\bar{x}_n, u^{\vartheta_{n+1}})u + W^{*T}\Psi(Z) + \\ & \iota + \Delta(t) - y_d^{(n)} + \frac{v}{p}) \leq \\ & zrG_n(\bar{x}_n, u^{\vartheta_{n+1}})u + \\ & \frac{(zr)^2\|W^*\|^2}{2a^2}\psi^T(Z)\psi(Z) + \frac{a^2}{2} + |zr|\underline{G}\delta^*, \end{aligned} \quad (58)$$

其中 a 是任意正数, 且 $\delta^* = \underline{G}^{-1}(\iota^* + \Delta^* + B_0 + \bar{v}/p)$.

设计自适应神经网络预设性能控制律如下:

$$u = -kzr - \frac{\hat{\theta}zr}{2a^2}\psi^T(Z)\psi(Z) - \hat{\delta}\tanh\frac{zr}{\lambda}, \quad (59)$$

$$\dot{\hat{\delta}} = a[zr\tanh\frac{zr}{\lambda} - \sigma\hat{\delta}], \quad (60)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \beta[\frac{(zr)^2}{2a^2}\psi^T(Z)\psi(Z) - \sigma\hat{\theta}], \quad (61)$$

其中: $k > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \sigma > 0$ 和 $\lambda > 0$ 是待设计参数; $\hat{\delta}$ 与 $\hat{\theta}$ 分别为 δ^* 与 θ 的估计值. 由文献[21]可知, 若选择初值 $\hat{\delta}(0) \geq 0$ 与 $\hat{\theta}(0) \geq 0$, 可保证对于 $\forall t \geq 0$ 均有 $\hat{\delta}(t) \geq 0$ 与 $\hat{\theta}(t) \geq 0$ 成立. 图2是本节所设计的控制方案示意图. 从图2中可以看出, 与基于反推法设计的控制器相比, 本节所设计的控制器无需虚拟控制律且只需要用一个神经网络估计未知函数, 降低了计算复杂度; 此外, 性能函数被纳入到控制律中, 保证了闭环系统的跟踪性能.

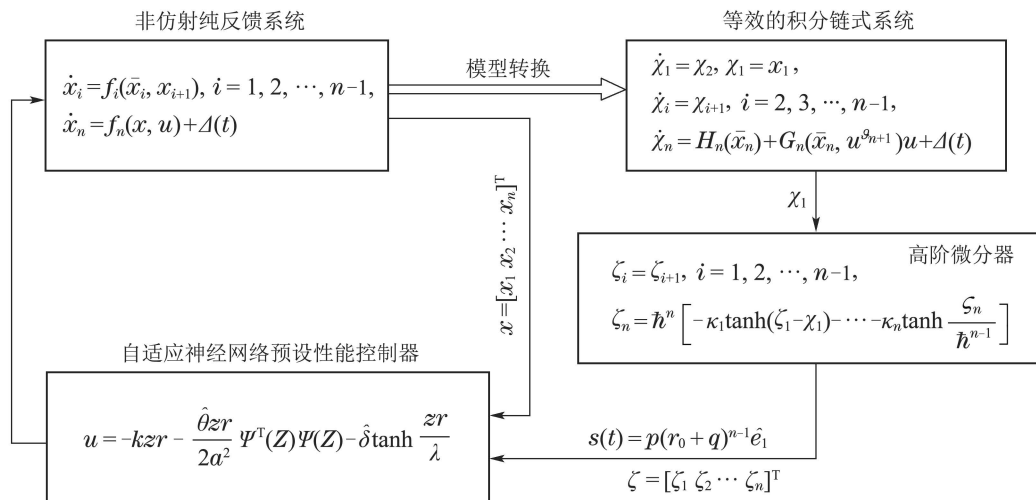


图2 自适应神经网络快速预设性能控制方案示意图

Fig. 2 The illustration of the adaptive neural network fast prescribed performance control

3.3 稳定性分析

定理3 若变换系统(19)满足假设1和假设2且 $|s(0)| < \rho(0)$ 成立, 则对于 $\forall P > 0$ 与紧集

$$\Omega_0 := \{(z(0) \ \hat{\delta}(0) \ \hat{\theta}(0))^T | z^2(0)/(2p) + \underline{G}\tilde{\delta}^2(0)/(2\alpha) + \underline{G}\tilde{\theta}^2(0)/(2\beta) \leq P\},$$

自适应神经网络预设性能控制器(22)(59)–(61)能够使闭环系统具有以下特性: 所有信号半全局最终一致有界; 跟踪误差满足预先设定的瞬态和稳态性能.

证 定义如下Lyapunov候选函数:

$$V = \frac{z^2}{2p} + \frac{\underline{G}\tilde{\delta}^2}{2\alpha} + \frac{\underline{G}\tilde{\theta}^2}{2\beta}, \quad (62)$$

其中: $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}, \tilde{\delta} = \delta^* - \hat{\delta}$. 对 V 求时间的一阶导数可得

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & zrG(\bar{x}_n, u^{\vartheta_{n+1}})u + \frac{(zr)^2\|W^*\|^2}{2a^2}\psi^T(Z)\psi(Z) + \\ & \frac{a^2}{2} + |zr|\underline{G}\delta^* - \frac{\underline{G}\tilde{\delta}\dot{\tilde{\delta}}}{\alpha} - \frac{\underline{G}\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}}}{\beta}. \end{aligned} \quad (63)$$

将式(59)代入式(63)可得

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -k\underline{G}(zr)^2 - \frac{\underline{G}\hat{\theta}(zr)^2}{2a^2}\psi^T(Z)\psi(Z) - \\ & \underline{G}\hat{\delta}zr\tanh\frac{zr}{\lambda} + \frac{(zr)^2\|W^*\|^2}{2a^2}\psi^T(Z)\psi(Z) + \\ & \frac{a^2}{2} + |zr|\underline{G}\delta^* - \frac{\underline{G}\tilde{\delta}\dot{\tilde{\delta}}}{\alpha} - \frac{\underline{G}\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}}}{\beta}, \end{aligned} \quad (64)$$

由 $\theta = \underline{G}^{-1}\|W^*\|^2, \tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ 与 $\tilde{\delta} = \delta^* - \hat{\delta}$ 可进一步得到

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -k\underline{G}(zr)^2 + \underline{G}\tilde{\theta}\left[\frac{(zr)^2}{2\alpha^2}\psi^T(Z)\psi(Z) - \frac{\dot{\theta}}{\beta}\right] + \\ & \underline{G}\tilde{\delta}\left[zr \tanh \frac{zr}{\lambda} - \frac{\dot{\delta}}{\alpha}\right] + \\ & \underline{G}\delta^*\left[|zr| - zr \tanh \frac{zr}{\lambda}\right] + \frac{a^2}{2}. \end{aligned} \quad (65)$$

将式(60)与式(61)代入式(65)得到

$$\dot{V} \leq -k\underline{G}(zr)^2 + \underline{G}\sigma\tilde{\theta}\tilde{\theta} + \underline{G}\sigma\tilde{\delta}\tilde{\delta} + 0.2785\underline{G}\delta^*\lambda + \frac{a^2}{2}. \quad (66)$$

根据 $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$, $\tilde{\delta} = \delta^* - \hat{\delta}$ 可知以下不等式成立:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(\theta - \tilde{\theta}) & \leq \frac{\theta^2}{2} - \frac{\tilde{\theta}^2}{2}, \\ \tilde{\delta}\tilde{\delta} = \tilde{\delta}(\delta^* - \tilde{\delta}) & \leq \frac{\delta^{*2}}{2} - \frac{\tilde{\delta}^2}{2}, \end{aligned} \quad (67)$$

将式(67)代入式(66)可得

$$\dot{V} \leq -k\underline{G}(zr)^2 - \frac{\underline{G}\sigma\tilde{\theta}^2}{2} - \frac{\underline{G}\sigma\tilde{\delta}^2}{2} + C_0, \quad (68)$$

其中 $C_0 = \underline{G}\sigma(\theta^2 + \delta^{*2})/2 + 0.2785\underline{G}\delta^*\lambda + a^2/2$. 考虑到 $r \geq 1/\rho(0)$, 选择控制参数 k, σ 满足

$$k \geq \frac{\Lambda\rho^2(0)}{2p\underline{G}}, \quad \sigma \geq \max\left\{\frac{\Lambda}{\alpha}, \frac{\Lambda}{\beta}\right\}, \quad (69)$$

其中 Λ 为任意正数, 进一步可得

$$\dot{V} \leq -\Lambda V + C_0. \quad (70)$$

由以上微分不等式可得

$$\begin{aligned} 0 \leq V(t) & \leq (V(0) - \frac{C_0}{\Lambda})\exp(-\Lambda t) + \frac{C_0}{\Lambda} \leq \\ & V(0)\exp(-\Lambda t) + \frac{C_0}{\Lambda}, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (71)$$

不等式(71)表明 $V(t)$ 将一致收敛于 C_0/Λ . 通过减小 σ, λ, a 同时增大 k, α, β 可以使得 C_0/Λ 任意小. 因此, 通过选择合适的设计参数可使 $C_0/\Lambda \leq P$. 当 $V = P$ 时, $\dot{V} \leq 0$, 即对于 $\forall t \geq 0, V \leq P$ 恒成立. 综上, 闭环系统中, $z, \tilde{\theta}, \tilde{\delta}$ 半全局最终一致有界. 此外, 由定理1可知, 误差 $\hat{e}(t)$ 有界且满足预设性能包络. 由 $|\hat{e}| \leq \aleph_i$ 和 $\hat{e}_i = \hat{e}_i + e_i$ 可知 $|e_i| \leq |\hat{e}_i| + \aleph_i$, 即误差 e_i 也满足指数收敛约束. 证毕.

注 3 $|s(0)| < \rho(0)$ 保证了当 $t \in [0, t_m)$ 时, 式(49)有定义, 即控制律有效, 其中 t_m 为大于 0 的极小值. 由定理3可知, 控制器可使得转换误差 $z(t)$ 有界. 根据定理2, $z(t)$ 有界, 则预设性能(26)可以实现. 若在某一时刻误差面将突破性能包络, $z(t)$ 将趋向于无穷大, 由式(68)可知 \dot{V} 将趋向负无穷, 即性能约束不会被违背. 因此, $t \in [0, t_m)$ 可推广到 $t \in [0, +\infty)$, 本文的控制器设计思路是合理的.

4 仿真研究

4.1 平衡车纵向倾角控制

为初步验证上述控制方案的适用性, 本小节以平

衡车纵向倾角跟踪控制为例进行仿真研究. 平衡车纵向旋转动力学方程如下^[27]:

$$\ddot{\phi} = \frac{mg\bar{l}\sin\phi}{I} - \frac{mF\bar{l}\cos\phi}{(M+m)I}, \quad (72)$$

其中: ϕ 为平衡车纵向倾角; $m = 85 \text{ kg}$ 为乘客质量; $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 为重力加速度; $\bar{l} = 0.85 \text{ m}$ 为乘客重心高度; $M = 10 \text{ kg}$ 为平衡车质量; $I = 68.98 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 为惯性矩; $F = 2k_t n_r (\Gamma - e_b) / (\aleph r_0)$ 是电机作用在平衡车上的力, 其中: $k_t = 0.869 \text{ N/A}$ 为电动机转矩常数; n_r 为传动系数; Γ 为电动机输入电压; e_b 为反电动势电压; $r_0 = 0.2 \text{ m}$ 为车轮半径; $\aleph = 1 \Omega$ 为电动机电阻值; 具体参数定义与取值见文献[27]. 令 $x_1 = \phi, x_2 = \dot{\phi}, u = -\Gamma$, 则系统(72)可改写为以下形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2, u) + \Delta(t), \end{cases} \quad (73)$$

其中:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, u) = & \\ & 2k_t n_r m \bar{l} \cos\phi / ((M+m)I\aleph r_0)u + mg\bar{l}\sin\phi / I \end{aligned}$$

为未知非仿射连续函数, $\Delta(t) = 2k_t n_r e_b m \bar{l} \cos\phi / ((M+m)I\aleph r_0)$ 可视为外部扰动.

上述非仿射模型呈积分链式结构, 为系统(1)的特殊形式. 因此不需要采用微分器对变换系统进行状态估计. 由 $f(x_1, x_2, u)$ 与 $\Delta(t)$ 的具体形式易知系统(73)满足假设1与假设2, 因此可设计如下自适应神经网络预设性能控制器:

$$u = -zr - \frac{\hat{\theta}zr}{2 \times 0.1^2} \psi^T(\bar{x}_2)\psi(\bar{x}_2) - \hat{\delta} \tanh \frac{zr}{0.2}, \quad (74)$$

其中: 转化误差 $z = \ln[(\zeta(t) + 1)/(1 - \zeta(t))]/2$, 标准化误差 $\zeta(t) = s(t)/\rho(t)$, 误差面 $s(t) = 3e_1(t) + 0.4 \cdot e_2(t)$, 自适应更新律

$$\begin{cases} \dot{\hat{\delta}} = zr \tanh \frac{zr}{0.2} - 0.5\hat{\delta}, \\ \dot{\hat{\theta}} = \frac{(zr)^2}{2 \times 0.1^2} \psi^T(\bar{x}_2)\psi(\bar{x}_2) - 0.5\hat{\theta}. \end{cases} \quad (75)$$

神经网络 $W^{*T}\psi(\bar{x}_2)$ 包含 5 个单元, 均匀分布在区间 $[-0.5, 0.5]$ 上, 每个单元宽度为 0.5. 设置 $\hat{\delta}(0) = 0, \hat{\theta}(0) = 0$. 预设性能函数取为

$$\rho(t) = (3 - 0.05)\exp(-2t) + 0.05. \quad (76)$$

为体现所设计的预设性能控制器 (prescribed performance control, PPC) 的性能, 本节以文献[3]所设计的自适应神经网络控制器 (adaptive neural control, ANC) 作为对照算例. 在仿真中, 初始条件 $\phi(0) = 40^\circ, \dot{\phi}(0) = 0$, 指令信号 $\phi_d = 0, \dot{\phi}_d = 0$.

图3-5为具体的仿真结果. 图3(a)显示 PPC 算例的误差面 s 满足瞬态和稳态性能约束. 由于未考虑性能约束, ANC 算例的误差面 s 超出了性能包络. 从图4(a)

可以看出,与ANC相比,PPC的实际跟踪轨迹具有更小的超调.图4(b)和图5(a)表明系统状态和自适应参数均有界.与PPC相比,由于ANC误差面未进行性能

约束,其状态 x_2 的峰值更大,对于平衡车使用者而言,体验感会更差.从图4(b)可以看出两种控制器所需的控制输入相当,且不存在高频抖振.

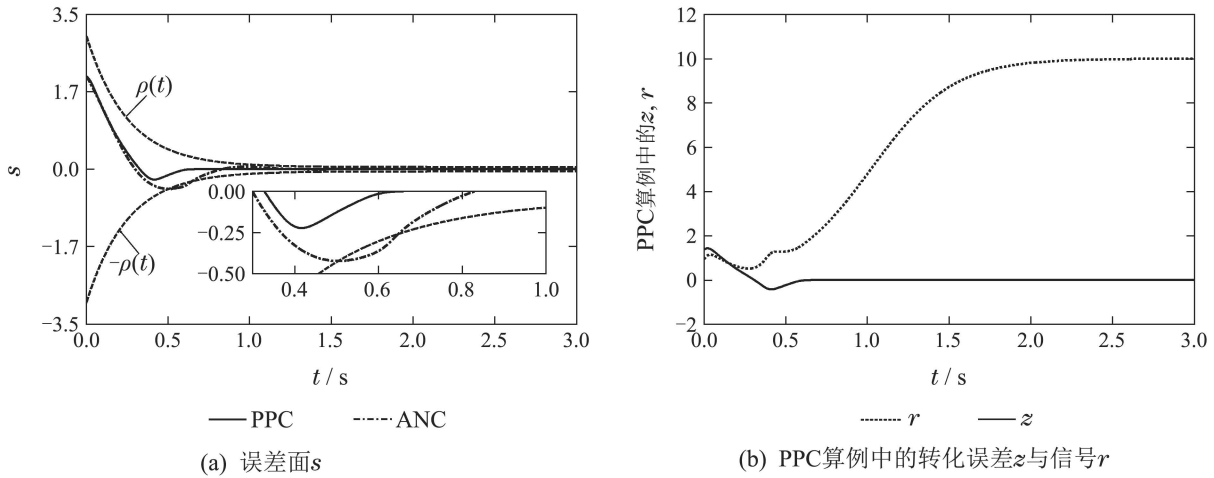


图3 误差面与转化误差

Fig. 3 The error manifolds and transformed error

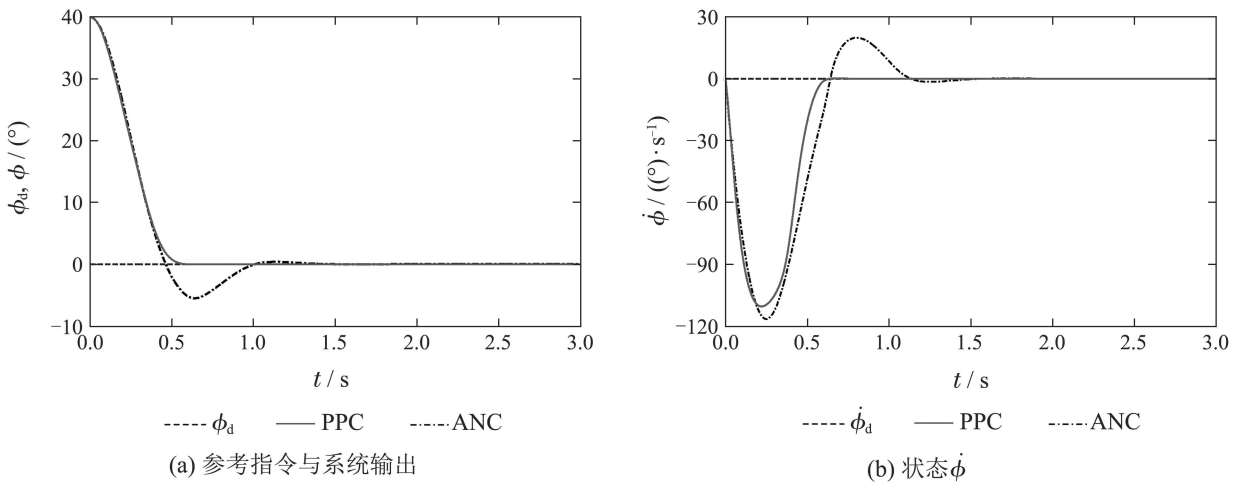


图4 参考指令、系统输出与状态

Fig. 4 The reference trajectory, system outputs and states

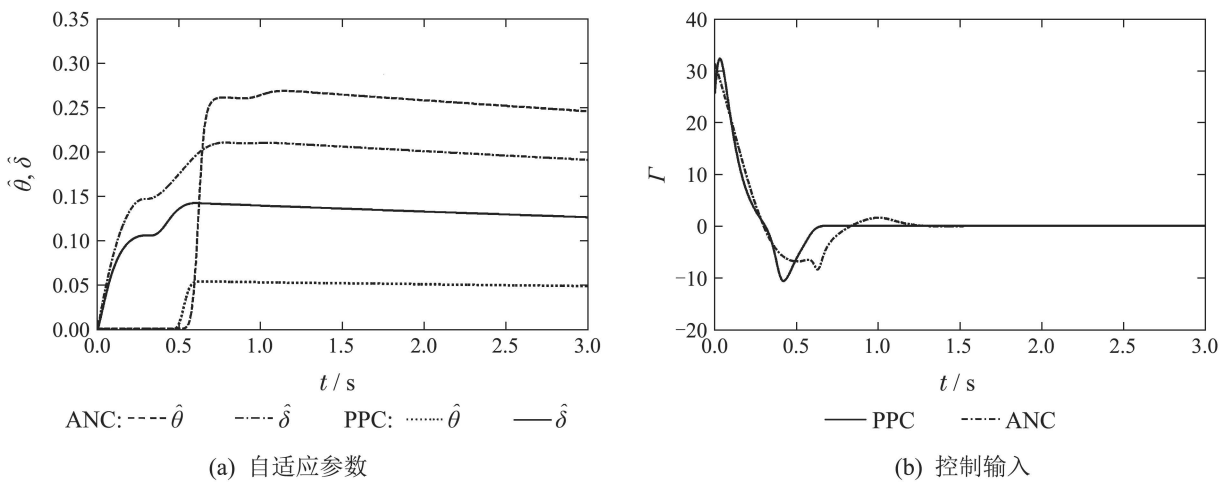


图5 自适应参数与控制输入

Fig. 5 The adaptive parameters and control inputs

4.2 单连杆机械臂角度跟踪控制

为了进一步验证本章所提出控制方案的适用性, 本小节以含模型不确定性的单连杆机械臂系统为控制对象, 对比了文献[3]的自适应神经网络控制方法(ANC)和本节提出的预设性能控制方法(PPC). 仿真的机械臂系统动力学模型表述如下^[28]:

$$\begin{cases} D\ddot{\phi} + B\dot{\phi} + N \sin \phi = \tau, \\ M\dot{\tau} + H\tau = u + 0.5 \sin u - K_m \dot{\phi} + \Delta(t), \end{cases} \quad (77)$$

其中: ϕ 是机械臂角度; τ 是电动机电枢电流; u 表示控制输入; $\Delta = 0.2 \sin t$ 代表外部干扰. 详细的参数定义与取值参见文献[28], 其中: $D=1, B=1, N=10, M=0.05, H=0.5, K_m=10$. 指令信号由以下 Van der Pol 振荡器产生:

$$\begin{cases} \dot{x}_{d1} = x_{d2}, \\ \dot{x}_{d2} = -x_{d1} + \eta(1 - x_{d1}^2)x_{d2}, \\ y_d = x_{d1}, \end{cases} \quad (78)$$

仿真中取 $\eta = 0.2, [x_{d1} \ x_{d2}]^T = [1.5 \ 0.8]^T$. 根据模型变换(2)–(18), 令 $\chi_1 = \phi, \chi_2 = \dot{\chi}_1, \chi_3 = \dot{\chi}_2$, 则系统(77)可以改写为以下形式:

$$\begin{cases} \dot{\chi}_1 = \chi_2, \\ \dot{\chi}_2 = \chi_3, \\ \dot{\chi}_3 = H_2(\bar{x}_2) + G_2(\bar{x}_3, u^{\vartheta_4})u + \Delta'(t), \\ y = \chi_1, \end{cases} \quad (79)$$

其中

$$\begin{cases} H_3(\bar{x}_3) = [K_m \chi_2 - H(D\chi_3 + B\chi_2 + N \sin \chi_1)] - M(B\chi_3 - N\chi_2 \cos \chi_1)/(MD), \\ G_3(\bar{x}_3, u^{\vartheta_4}) = (1 + 0.5 \cos(u^{\vartheta_4}))/MD, \\ \Delta'(t) = 0.2 \sin t/(MD). \end{cases} \quad (80)$$

由此可知系统(79)满足假设1与假设2. 在控制器设计

过程中, 需要获取变换模型(79)的状态估计值. 根据原理2可采用如下有限时间收敛的三阶微分器:

$$\begin{cases} \dot{\varsigma}_1 = \varsigma_2, \\ \dot{\varsigma}_2 = \varsigma_3, \\ \dot{\varsigma}_3 = 80^3[-20 \tanh(\varsigma_1 - \chi_1) - 10 \tanh \frac{\varsigma_2}{80} - 10 \tanh \frac{\varsigma_3}{80^2}]. \end{cases} \quad (81)$$

设计如下自适应神经网络预设性能控制器:

$$u = -zr - \frac{\hat{\theta}zr}{2 \times 0.1^2} \psi^T(Z)\psi(Z) - \hat{\delta} \tanh \frac{zr}{0.2}, \quad (82)$$

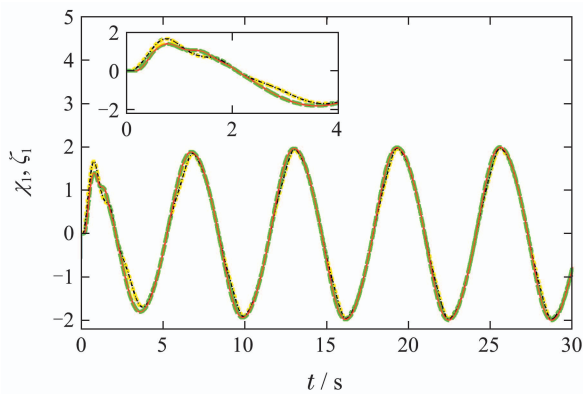
其中: 转化误差 $z = \ln[(\zeta(t) + 1)/(1 - \zeta(t))]/2$, 标准化误差 $\zeta(t) = s(t)\rho(t)$, 误差面 $s(t) = 4\hat{e}_1(t) + 0.4\hat{e}_2(t) + 0.01\hat{e}_2(t)$, 自适应更新律设计为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\delta}} = zr \tanh \frac{zr}{0.2} - 0.5\hat{\delta}, \\ \dot{\hat{\theta}} = \frac{(zr)^2}{2 \times 0.1^2} \psi^T(Z)\psi(Z) - 0.5\hat{\theta}. \end{cases} \quad (83)$$

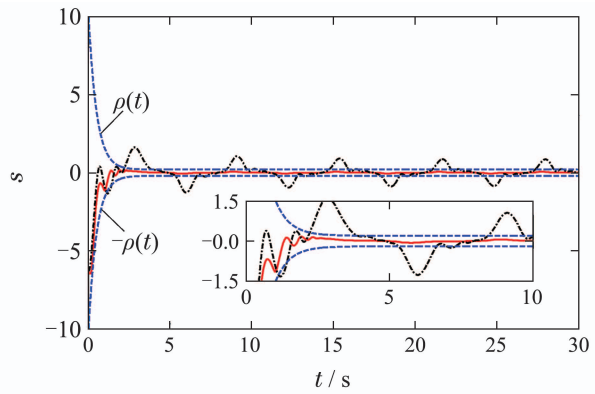
神经网络 $W^{*T}\psi(Z)$ 包含 9 个单元, 均匀分布在区间 $[-12, 12]$ 上, 每个单元宽度为 2. $\hat{\delta}(0) = 0, \hat{\theta}(0) = 0$. 预设性能函数取为

$$\rho(t) = (10 - 0.4) \exp(-2t) + 0.4. \quad (84)$$

图6–8为具体的仿真结果. 图6(a)表明微分器能精确地估计变换系统的状态 χ_1 , 图6(b)显示 PPC 的误差面 s 满足瞬态和稳态性能约束. 从图 7 可以看出, 与 ANC 相比, PPC 的实际跟踪轨迹具有更小的超调与稳态误差. 图 8 和图 9(a)表明系统状态和自适应参数均有界. 从图 9(b)可以看出, 在控制初始阶段, ANC 控制输入的峰值较 PPC 大. 由图 10 可知, 新型微分器能有效地估计状态 χ_1 的二阶和三阶导数. 综上所述, 本章所设计自适应神经网络预设性能控制器能使闭环系统所有信号半全局一致有界且跟踪误差满足预设性能.



(a) 微分器估计值



(b) 误差面s

图 6 微分器估计值与误差面

Fig. 6 The differentiator estimates and error manifolds

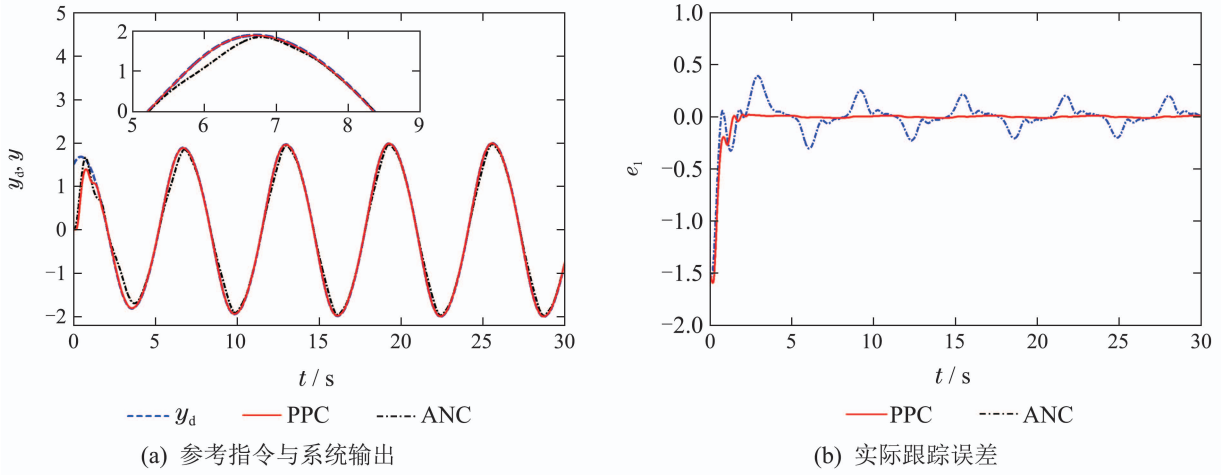


图7 参考指令、系统输出与实际跟踪误差

Fig. 7 The reference signal, outputs and actual tracking errors

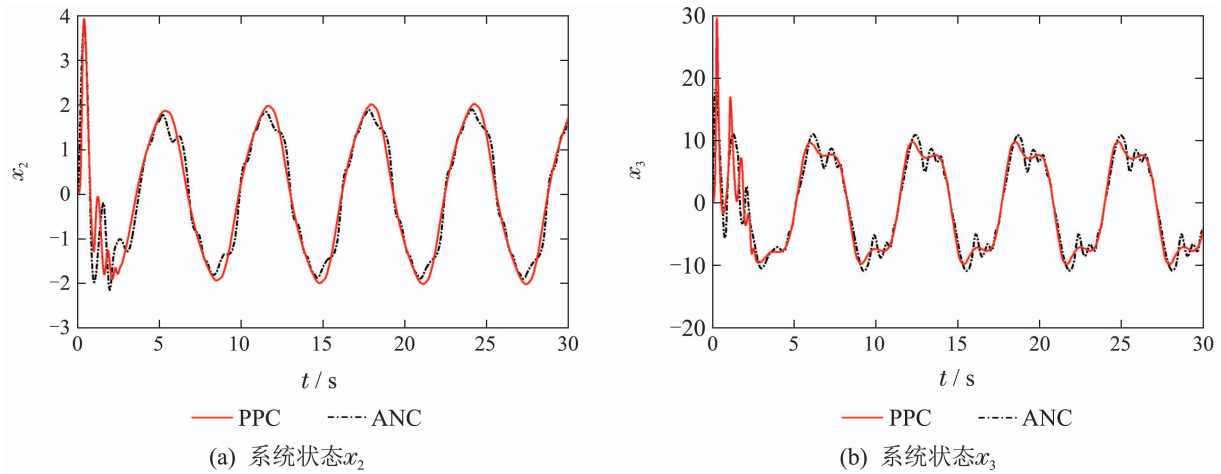


图8 系统状态

Fig. 8 The system states

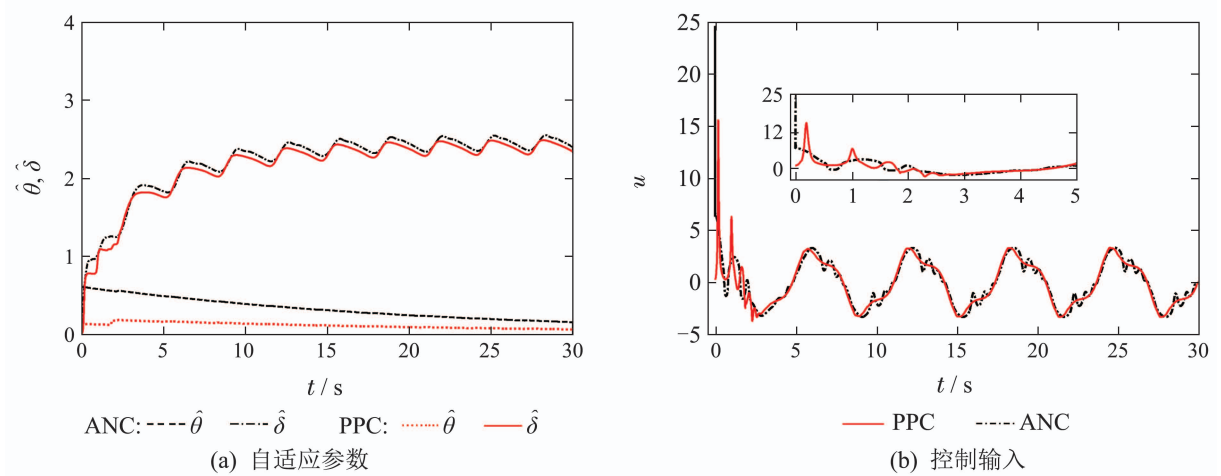


图9 自适应参数与控制输入

Fig. 9 The adaptive parameters and control inputs

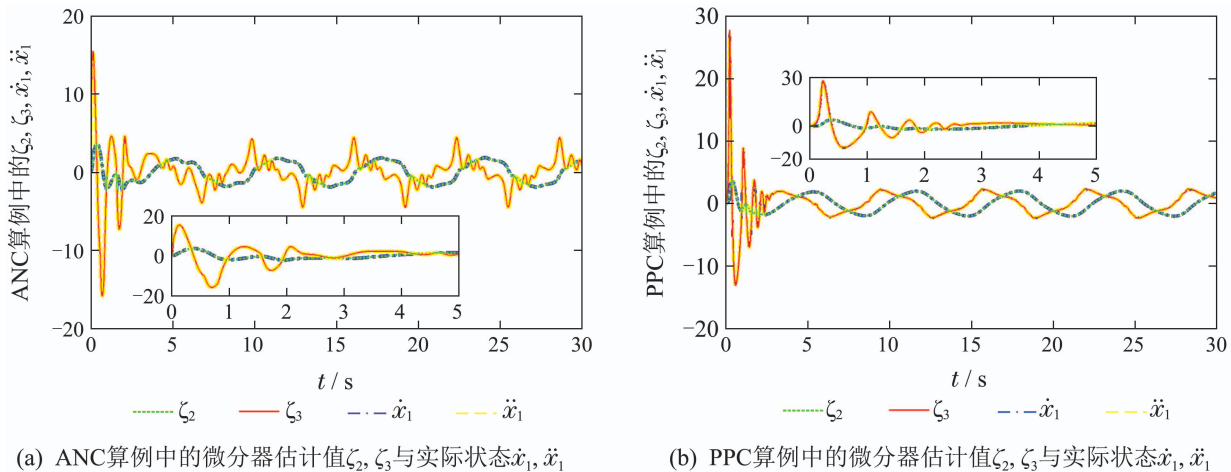


图 10 微分器估计值与系统状态

Fig. 10 The differentiator estimates and system states

5 结论

针对一类非仿射纯反馈系统, 本文设计了一种自适应神经网络预设性能控制器. 首先, 基于非仿射函数光滑的条件, 将非仿射纯反馈系统变换为具有积分链式结构的伪仿射系统. 其次, 利用有限时间收敛的微分器对变换系统的状态进行估计. 为便于设计控制器, 基于带性能约束的误差面构造了转化误差. 最后, 采用自适应神经网络技术对连续未知函数进行估计并设计控制律. 与纯反馈系统控制器设计中常采用的反推技术相比, 本章提出的控制器避免了复杂的反推过程, 控制器只需要一个神经网络估计器, 降低了计算复杂度. 在控制器设计过程中考虑性能约束, 使得闭环系统的瞬态和稳态性能得到了保证. 快速的瞬态收敛过程可能要求较大的控制输入响应速度, 因此, 下一步将对考虑控制输入频率受限的预设性能控制器进行研究.

参考文献:

- [1] YU Z X, YU Z Y. Adaptive neural dynamic surface control for nonlinear pure-feedback systems with multiple time-varying delays: A Lyapunov-Razumikhin method. *Asian Journal of Control*, 2013, 15(4): 1124 – 1138.
- [2] AREFI M M, ZAREI J, KARIMI H R. Adaptive output feedback neural network control of uncertain non-affine systems with unknown control direction. *Journal of the Franklin Institute*, 2014, 351(8): 4302 – 4316.
- [3] NA J, REN X, ZHENG D. Adaptive control for nonlinear pure-feedback systems with high-order sliding mode observer. *IEEE Transactions on Neural Networks & Learning Systems*, 2013, 24(3): 370.
- [4] LABIOD S, GUERRA T M. Indirect adaptive fuzzy control for a class of nonaffine nonlinear systems with unknown control directions. *International Journal of Control Automation and Systems*, 2010, 8(4): 903 – 907.
- [5] BOULKROUNE A, M'SAAD M, FARZA M. Adaptive fuzzy tracking control for a class of MIMO nonaffine uncertain systems. *Neurocomputing*, 2012, 93(2): 48 – 55.
- [6] ZHOU W D, LIAO C Y, ZHENG L. Adaptive fuzzy output feedback control for a class of nonaffine nonlinear systems with unknown dead-zone input. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 79(4): 1 – 13.
- [7] ZHANG Qiang, YUAN Zhugang, XU Dezhi. Second order dynamic terminal sliding mode control for a class of nonaffine nonlinear systems with input constraint. *Control and Decision*, 2016, 31(9): 1537 – 1545.
(张强, 袁铸钢, 许德智. 一类输入受限的不确定非仿射非线性系统二阶动态 terminal 滑模控制. *控制与决策*, 2016, 31(9): 1537 – 1545.)
- [8] KUMAR P, KUMAR N, PANWAR V. RBF neural control design for SISO nonaffine nonlinear systems. *Procedia Computer Science*, 2018, 125(1): 25 – 33.
- [9] ZHOU Weidong, LIAO Chengyi. Indirect adaptive fuzzy output-feedback controller for a SISO nonaffine system with unknown control direction. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(9): 1131 – 1137.
(周卫东, 廖成毅. 控制方向未知的SISO非仿射系统间接自适应模糊输出反馈控制. *控制理论与应用*, 2013, 30(9): 1131 – 1137.)
- [10] CHEN Longsheng, WANG Qi. Adaptive dynamic surface fault-tolerant control for uncertain non-affine pure feedback systems with input constraint. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(2): 221 – 227.
(陈龙胜, 王琦. 输入受限的非仿射纯反馈不确定系统自适应动态面容错控制. *控制理论与应用*, 2016, 33(2): 221 – 227.)
- [11] ANSARI H, ALFI A. A robust controller design for uncertain nonlinear non-affine systems. *International Journal of Dynamics and Control*, 2019, 7(1): 1443 – 1452.
- [12] ILCHMANN A, TRENN S. Input constrained funnel control with applications to chemical reactor models. *Systems & Control Letters*, 2004, 53(5): 361 – 375.
- [13] HOPFE N, ILCHMANN A, RYAN E P. Funnel control with saturation: linear MIMO systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(2): 532 – 538.
- [14] HACKL CM. *Funnel Control*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2017.
- [15] TEE K P, GE S S, TAY E H. Barrier Lyapunov functions for the output-constrained nonlinear systems. *Automatica*, 2009, 45(4): 918 – 927.
- [16] LIU Y J, TONG S. Barrier Lyapunov functions-based adaptive control for a class of nonlinear pure-feedback systems with full state constraints. *Automatica*, 2016, 64(1): 70 – 75.

- [17] WANG C, WU Y, YU J. Barrier Lyapunov functions-based adaptive control for nonlinear pure-feedback systems with time-varying full state constraints. *International Journal of Control Automation and Systems*, 2017, 15(16): 1 – 9.
- [18] BECHLIOLIS C P, ROVITHAKIS G A. Adaptive control with guaranteed transient and steady state tracking error bounds for strict feedback systems. *Automatica*, 2009, 45(2): 532 – 538.
- [19] BECHLIOLIS C P, ROVITHAKIS G A. A low-complexity global approximation-free control scheme with prescribed performance for unknown pure feedback systems. *Automatica*, 2014, 50(4): 1217 – 1226.
- [20] CHEN Ming, LI Xiaohua. Adaptive finite-time tracking control for nonaffine nonlinear systems based on prescribed performance. *Control and Decision*, 2020, 35(5): 1259 – 1260.
(陈明, 李小华. 基于预设性能的非仿射非线性系统自适应有限时间跟踪控制. *控制与决策*, 2020, 35(5): 1259 – 1260.)
- [21] WANG Y Y, HU J B, WANG J H. Adaptive neural novel prescribed performance control for non-affine pure-feedback systems with input saturation. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 93(3): 1241 – 1259.
- [22] ZHANG L, TONG S C, LI Y M. Prescribed performance adaptive fuzzy output-feedback control of uncertain nonlinear systems with unmodeled dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 77(4): 1653 – 1665.
- [23] WANG L X, MENDEL J M. Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least squares learning. *IEEE Transactions on Neural Networks & Learning Systems*, 1992, 3(5): 807 – 814.
- [24] BU X W, WU X Y. Design of a class of new nonlinear disturbance observers based on tracking differentiators for uncertain dynamic systems. *International Journal of Control Automation and Systems*, 2015, 13(3): 595 – 602.
- [25] GUO B Z, ZHAO Z L. On convergence of tracking differentiator. *International Journal of Control*, 2011, 84(4): 693 – 701.
- [26] WANG Xinhua, LIU Jinkun. *Differentiator Design and Application: Signal Filtering and Differentiation*. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2010.
(王新华, 刘金琨. 微分器设计与应用: 信号滤波与求导. 北京: 电子工业出版社, 2010.)
- [27] PINTO L J, KIM D H, LEE J Y. Development of a segway robot for an intelligent transport system. *IEEE/SICE International Symposium on System Integration*. Fukuoka, Japan: Kyushu University, 2012, 12: 710 – 715.
- [28] LI Y, TONG S C. Adaptive fuzzy output-feedback control of pure-feedback uncertain nonlinear systems with unknown dead zone. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2014, 22(5): 1341 – 1347.

作者简介:

胡剑波 教授, 博士, 目前研究方向为滑模控制、智能控制与无人作战, E-mail: jian_bo_h@163.com;

王应洋 讲师, 博士, 目前研究方向为自适应控制与预设性能控制, E-mail: wangyingyang@outlook.com;

刘炳琪 安全监察师, 硕士, 目前研究方向为系统安全性建模与体系缺陷识别, E-mail: bingqi0828_liu@163.com;

宋仕元 硕士研究生, 目前研究方向为智能控制与无人作战, E-mail: shi_yuan_song@163.com.