

# 一类非参数不确定系统的自适应重复学习控制

陈 强<sup>†</sup>, 余歆祺

(浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310023)

**摘要:** 本文针对一类非参数不确定系统提出一种全限幅自适应重复学习控制方法. 利用期望轨迹的周期特性, 构造周期性期望控制输入, 并基于Lyapunov方法设计自适应重复学习控制器, 实现系统对周期性期望轨迹的高精度跟踪, 且无需已知非参数不确定性的上界. 设计全限幅学习律估计未知的期望控制输入, 保证估计值被限制在指定的界内. 同时, 通过构造完全平方方式消除部分误差相关项, 控制器设计中可避免使用符号函数, 从而抑制控制器抖振问题. 最后, 基于Lyapunov方法对误差收敛性进行了分析, 并通过仿真对比验证本文所提方法的有效性.

**关键词:** 重复学习控制; 自适应控制系统; 非参数不确定性; Lyapunov方法

**引用格式:** 陈强, 余歆祺. 一类非参数不确定系统的自适应重复学习控制. 控制理论与应用, 2020, 37(6): 1349 – 1357

DOI: 10.7641/CTA.2019.90523

## Adaptive repetitive learning control for a class of nonparametric uncertain systems

CHEN Qiang<sup>†</sup>, YU Xin-qi

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310023, China)

**Abstract:** In this paper, a fully saturated adaptive repetitive learning control (ARLC) scheme is proposed for a class of nonparametric uncertain systems. A periodic desired control input is constructed by using the periodic characteristic of the desired trajectory, and an adaptive repetitive learning controller is designed based on the Lyapunov methods to achieve the high-precision tracking of the periodic desired trajectory without knowing the upper bound of the nonparametric uncertainties in prior. Then, a fully saturated repetitive learning law is designed to estimate the unknown desired control input, such that the estimated value can be confined within a specified region. By completing the squares to eliminate some error-related terms, the signum function can be avoided in the controller design, and thus the chattering problem of the controller is suppressed. Finally, the error convergence performance of the proposed ARLC scheme is analyzed through the Lyapunov methods, and comparative simulations are provided to verify the effectiveness of the proposed scheme.

**Key words:** repetitive learning control; adaptive control systems; nonparametric uncertainties; Lyapunov methods

**Citation:** CHEN Qiang, YU Xinqi. Adaptive repetitive learning control for a class of nonparametric uncertain systems. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(6): 1349 – 1357

### 1 引言

重复控制与迭代学习控制同属学习控制, 旨在利用上一周期或上一次迭代的运行数据来修正当前控制输入, 进而改善系统的控制性能. 不同的是, 前者适用于连续、周期运行的系统, 而后者适用于在有限时间区间上重复运行的对象. 重复控制可以有效地跟踪周期性期望轨迹或抑制周期性扰动, 且工程实现时不需要完全依赖系统参数, 因此易于工程应用.

经典重复控制主要基于内模原理, 在频域内进行控制器设计<sup>[1-2]</sup>. 文献[3]针对带有周期扰动的时延系

统设计了一种重复控制器, 并设计干扰观测器补偿外部周期干扰的影响. 文献[4]针对非严格重复逆变器系统设计了一种自抗扰学习控制方法, 可以良好地抑制短时扰动造成的输出电压周期波动, 提高系统稳定性. 文献[5-6]针对一类时变不确定系统, 基于2维系统稳定性理论提出一种鲁棒重复控制器, 保证系统的鲁棒性与稳态跟踪精度. 文献[7-8]在恒压恒频脉冲宽度调制(pulse width modulation, PWM)逆变器中应用重复控制技术设计控制器, 有效提高了系统跟踪精度并抑制了谐波. 此外, 在有源电力滤波器<sup>[9]</sup>, 伺服系统<sup>[10]</sup>等

收稿日期: 2019-07-04; 录用日期: 2019-12-31.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: sdnjchq@zjut.edu.cn; Tel.: +86 15906613647.

本文责任编辑: 侯忠生.

国家自然科学基金项目(61973274, 61573320), 浙江省自然科学基金项目(LY17F030018)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61403343, 61573320) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province (LY17F030018).

场合,重复控制也得到了广泛应用.

近年来,基于Lyapunov方法的重复学习控制引起了广泛关注<sup>[11-13]</sup>.重复学习控制器设计通常需要处理两类系统不确定性,即参数不确定性与非参数不确定性.其中,处理参数不确定性时,系统需满足可参数化条件,重复学习控制主要针对未知参数进行学习<sup>[14-15]</sup>.然而,实际系统中存在的非参数不确定性,例如伺服电机、机器人系统中的状态相关负载转矩以及各种未建模动态等,使得系统的可参数化条件难以满足<sup>[16]</sup>.因此,有必要研究非参数不确定系统的重复学习控制方法.文献[17]针对一类非参数不确定系统,设计重复学习控制器用于解决输出跟踪问题,同时引入两个状态观测器用于估计系统和参考状态信息.文献[18]针对一类期望轨迹与扰动之间无公共周期的非参数不确定系统,提出了一种双周期重复学习控制方法.文献[19]针对一类满足Lipschitz条件的非参数不确定系统设计重复学习控制器,但重复学习律的设计中并未考虑对估计值进行限幅.文献[20]针对电流反馈永磁步进电机提出一种重复学习控制方法,并通过部分限幅学习律保证估计值的有界性.然而,由于学习律中含有无限幅项,因此不能保证将估计值限制在指定的界内.针对这一问题,文献[21]提出一种全限幅学习律,但目前基于全限幅学习律的重复学习控制文献相对较少.此外,文献[18-20]处理系统不确定性时,需要已知不确定性的界,然而实际中系统不确定性的界难以直接获得.

基于以上讨论,本文针对一类非参数不确定系统,基于Lyapunov方法提出一种全限幅自适应重复学习控制方法,实现对周期性期望轨迹的高精度跟踪.本文主要工作包括:1)利用期望轨迹的周期特性,构造周期性期望控制输入设计自适应重复学习控制器,提高系统的稳态跟踪精度,且无需已知非参数不确定性的界;2)设计全限幅学习律对未知周期性期望控制输入进行估计,与已有的部分限幅学习律相比,该学习律可保证估计值被限制在指定的界内;3)通过构造完全平方式消除部分误差相关项,控制器设计中避免了使用符号函数,从而保证控制信号连续以及抑制控制器抖振问题.

## 2 问题描述

考虑如下非参数不确定系统<sup>[22]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u, \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  表示系统状态;  $u \in \mathbb{R}$  表示控制输入;  $f(\mathbf{x})$  和  $g(\mathbf{x})$  均为未知有界非线性函数,其中  $f(\mathbf{x})$  表示系统中的非参数不确定性,  $g(\mathbf{x})$  表示与状态相关的控制增益.

**假设 1**  $g(\mathbf{x})$  为恒正或恒负的有界函数,即存在正常数  $g_m$  和  $g_M$ ,使得对  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , 有  $g_m \leq |g(\mathbf{x})| \leq g_M$  成立.不失一般性,本文假设  $g(\mathbf{x}) > 0$ .

**假设 2**  $f(\mathbf{x})$  和  $g(\mathbf{x})$  均满足 Lipschitz 条件,即对  $\forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{R}^n$ , 有  $|f(\mathbf{z}_1) - f(\mathbf{z}_2)| \leq l_{f0} \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|$  和  $|g(\mathbf{z}_1) - g(\mathbf{z}_2)| \leq l_{g0} \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|$  成立,其中:  $\|\cdot\|$  表示向量的 2-范数,  $l_{f0}, l_{g0} > 0$  为未知 Lipschitz 系数.

本文考虑周期为  $T$  的有界期望轨迹  $\mathbf{x}_r = [x_{1r} \ x_{2r} \ \dots \ x_{nr}]^T$ , 即  $\mathbf{x}_r(t) = \mathbf{x}_r(t - T)$ , 可构造期望控制输入

$$u_r = \frac{1}{g(\mathbf{x}_r)} (\dot{x}_{nr} - f(\mathbf{x}_r)), \quad (2)$$

满足

$$\begin{cases} \dot{x}_{1r} = x_{2r}, \\ \dot{x}_{2r} = x_{3r}, \\ \vdots \\ \dot{x}_{nr} = f(\mathbf{x}_r) + g(\mathbf{x}_r)u_r. \end{cases} \quad (3)$$

由  $\mathbf{x}_r$  的周期性可知,  $u_r$  同样为周期为  $T$  的周期信号, 即  $u_r(t) = u_r(t - T)$ .

本文控制目标为,根据期望轨迹  $\mathbf{x}_r$  和期望控制输入  $u_r$  的周期特性,设计自适应重复学习控制器  $u$ , 实现系统状态  $\mathbf{x}$  对期望轨迹  $\mathbf{x}_r$  的高精度跟踪.

## 3 自适应重复学习控制

### 3.1 误差动态

定义跟踪误差

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_r = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_{n-1} \ e_n]^T. \quad (4)$$

根据式(1),跟踪误差的导数满足

$$\dot{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \vdots \\ \dot{e}_n \\ \dot{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_n \\ f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u - \dot{x}_{nr} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

定义

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (6)$$

$$\mathbf{b} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T \in \mathbb{R}^n, \quad (7)$$

则式(5)可写为

$$\dot{\mathbf{e}} = K_1 \mathbf{e} + \mathbf{b}[f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u - \dot{x}_{nr}]. \quad (8)$$

定义向量  $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$ , 则式(8)可表示为

$$\dot{\mathbf{e}} = K_1 \mathbf{e} - \mathbf{b} \mathbf{a} \mathbf{e} + \mathbf{b}[f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u + \mathbf{a} \mathbf{e} - \dot{x}_{nr}] =$$

$$(K_1 - \mathbf{b}\mathbf{a})\mathbf{e} + \mathbf{b}[f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u + \mathbf{a}\mathbf{e} - \dot{x}_{nr}] = A\mathbf{e} + \mathbf{b}[f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u + \mathbf{a}\mathbf{e} - \dot{x}_{nr}], \quad (9)$$

其中

$$A = (K_1 - \mathbf{b}\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \end{bmatrix}. \quad (10)$$

选择向量  $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$ , 使得特征多项式  $D(s) = s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1$  为Hurwitz多项式, 保证矩阵  $A$  渐近稳定, 从而对任意对称正定矩阵  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 存在唯一的对称正定矩阵  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  使得以下Lyapunov方程成立:

$$A^T P + P A = -Q. \quad (11)$$

令  $\lambda_Q$  为矩阵  $Q$  的最小特征值, 则对任意向量  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , 有  $-\mathbf{v}^T Q \mathbf{v} \leq -\lambda_Q \|\mathbf{v}\|^2$  成立.

重复学习控制主要用于处理系统中的周期不确定性, 然而在误差动态(9)中, 系统不确定性并没有表现出周期特性, 因此难以直接基于式(9)设计重复学习控制器. 因此, 本文利用周期性期望控制输入  $u_r$  改写式(9). 将  $\dot{x}_{nr} = f(\mathbf{x}_r) + g(\mathbf{x}_r)u_r$  代入式(9)得

$$\dot{\mathbf{e}} = A\mathbf{e} + \mathbf{b}[f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_r) + g(\mathbf{x})u - g(\mathbf{x}_r)u_r + \mathbf{a}\mathbf{e}]. \quad (12)$$

由式(2)以及  $\dot{x}_{nr}$ ,  $f(\mathbf{x}_r)$  和  $g(\mathbf{x}_r)$  的有界性可得, 未知期望控制输入  $u_r$  为有界函数, 即存在正常数  $\bar{u}_r$ , 使得  $|u_r| \leq \bar{u}_r$ . 本文利用  $\mathbf{x}_r$  和  $u_r$  的周期性与有界性, 设计自适应重复学习控制器, 旨在提高系统的稳态跟踪精度. 为书写方便, 后文中分别记  $f_x = f(\mathbf{x})$ ,  $f_r = f(\mathbf{x}_r)$ ,  $g_x = g(\mathbf{x})$ ,  $g_r = g(\mathbf{x}_r)$ .

### 3.2 自适应重复学习控制设计

构造如下Lyapunov函数:

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T P \mathbf{e}. \quad (13)$$

对  $V$  求导可得

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T P \dot{\mathbf{e}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^T P \mathbf{e}. \quad (14)$$

将式(12)代入式(14)有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \mathbf{e}^T P A \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T A^T P \mathbf{e} + \\ &\mathbf{b}^T P \mathbf{e} [f_x - f_r + g_x u - g_r u_r + \mathbf{a}\mathbf{e}] = \\ &-\frac{1}{2} \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \alpha [f_x - f_r + g_x u - g_r u_r + \mathbf{a}\mathbf{e}]. \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $\alpha = \mathbf{b}^T P \mathbf{e}$ .

在式(15)中加减项  $(g_x - g_r)\hat{u}_r$ , 其中  $\hat{u}_r$  为  $u_r$  的估计

值, 则式(15)可改写为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \\ &-\frac{1}{2} \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \alpha [f_x - f_r + (g_x - g_r)\hat{u}_r + \\ &g_x(u - \hat{u}_r) - g_r(u_r - \hat{u}_r) + \mathbf{a}\mathbf{e}] \leq \\ &-\frac{1}{2} \lambda_Q \|\mathbf{e}\|^2 + \alpha [g_x(u - \hat{u}_r) - g_r(u_r - \hat{u}_r)] + \\ &|\alpha| [|f_x - f_r| + |g_x - g_r| \hat{u}_r + \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{e}\|]. \end{aligned} \quad (16)$$

根据假设2, 有  $|f_x - f_r| \leq l_{f0} \|\mathbf{e}\|$  和  $|g_x - g_r| \leq l_{g0} \|\mathbf{e}\|$ , 代入式(16)有

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \\ &-\frac{1}{2} \lambda_Q \|\mathbf{e}\|^2 + \alpha [g_x(u - \hat{u}_r) - g_r(u_r - \hat{u}_r)] + \\ &|\alpha| [l_{f0} \|\mathbf{e}\| + l_{g0} \|\mathbf{e}\| \hat{u}_r + \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{e}\|] = \\ &-\frac{1}{6} \lambda_Q \|\mathbf{e}\|^2 + \alpha [g_x(u - \hat{u}_r) - g_r(u_r - \hat{u}_r)] - \\ &\frac{1}{9} \lambda_Q \|\mathbf{e}\|^2 + l_{f0} |\alpha| \|\mathbf{e}\| - \frac{1}{9} \lambda_Q \|\mathbf{e}\|^2 + \\ &l_{g0} |\alpha| \|\mathbf{e}\| \hat{u}_r - \frac{1}{9} \lambda_Q \|\mathbf{e}\|^2 + |\alpha| \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{e}\|. \end{aligned} \quad (17)$$

构造如下完全平方式:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{9} \lambda_Q \|\mathbf{e}\|^2 + l_{f0} |\alpha| \|\mathbf{e}\| - \frac{9}{4\lambda_Q} l_{f0}^2 \alpha^2 \leq 0, \\ &-\frac{1}{9} \lambda_Q \|\mathbf{e}\|^2 + l_{g0} |\alpha| \|\mathbf{e}\| \hat{u}_r - \frac{9}{4\lambda_Q} l_{g0}^2 \hat{u}_r^2 \alpha^2 \leq 0, \\ &-\frac{1}{9} \lambda_Q \|\mathbf{e}\|^2 + |\alpha| \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{e}\| - \frac{9}{4\lambda_Q} \|\mathbf{a}\|^2 \alpha^2 \leq 0, \end{aligned} \quad (18)$$

则式(17)可改写为

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \\ &-\frac{1}{6} \lambda_Q \|\mathbf{e}\|^2 + \alpha [g_x(u - \hat{u}_r) - g_r(u_r - \hat{u}_r)] + \\ &\frac{9}{4\lambda_Q} l_{f0}^2 \alpha^2 + \frac{9}{4\lambda_Q} l_{g0}^2 \hat{u}_r^2 \alpha^2 + \frac{9}{4\lambda_Q} \|\mathbf{a}\|^2 \alpha^2 = \\ &-\frac{1}{6} \lambda_Q \|\mathbf{e}\|^2 + \alpha [g_x(u - \hat{u}_r) - g_r(u_r - \hat{u}_r)] + \\ &\frac{9}{4\lambda_Q} l_f \alpha^2 + \frac{9}{4\lambda_Q} l_g \hat{u}_r^2 \alpha^2 + \frac{9}{4\lambda_Q} \|\mathbf{a}\|^2 \alpha^2, \end{aligned} \quad (19)$$

其中  $l_f = l_{f0}^2$ ,  $l_g = l_{g0}^2$  为未知常数.

根据式(19), 设计自适应重复学习控制器  $u$ , 表达式为

$$u = -\frac{9}{4\lambda_Q g_m} \|\mathbf{a}\|^2 \alpha + \hat{u}_r - \frac{9}{4\lambda_Q g_m} (\hat{l}_f \alpha + \hat{l}_g \hat{u}_r^2 \alpha), \quad (20)$$

其中  $\hat{u}_r$ ,  $\hat{l}_f$ ,  $\hat{l}_g$  分别表示  $u_r$ ,  $l_f$ ,  $l_g$  的估计值.

考虑未知期望控制输入  $u_r$  的周期性和有界性, 设计如下全限幅重复学习律用于更新  $\hat{u}_r$ :

$$\hat{u}_r(t) = \text{sat}(\hat{u}_{r0}(t)),$$

$$\begin{cases} \hat{u}_{r0}(t) = \text{sat}(\hat{u}_{r0}(t-T)) - \phi(t)\mu_0\alpha, & t \in [0, \infty), \\ \hat{u}_{r0}(t) = 0, & t \in [-T, 0), \end{cases} \quad (21)$$

其中:  $\mu_0$ 为学习增益,  $\text{sat}(\cdot)$ 为饱和函数, 对任一标量 $a$ 有

$$\text{sat}(a) = \begin{cases} a, & |a| \leq \bar{a}, \\ \bar{a}, & a > \bar{a}, \\ -\bar{a}, & a < -\bar{a}, \end{cases} \quad (22)$$

其中 $\bar{a}$ 为 $a$ 的限幅值. 由于 $|u_r| \leq \bar{u}_r$ , 因此式(21)中 $\hat{u}_{r0}(t)$ 的限幅值取为 $\bar{u}_r$ .  $\phi(t)$ 为定义在 $[0, +\infty)$ 上的连续函数, 其表达式为

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_0(t), & t \in [0, T), \\ 1, & t \in [T, +\infty), \end{cases} \quad (23)$$

其中 $\phi_0(t)$ 在 $t \in [0, T)$ 上单调递增, 且满足 $\phi_0(0) = 0$ .

此外, 式(20)中 $\hat{l}_f, \hat{l}_g$ 的自适应更新律设计为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{l}}_f &= \mu_1 \left( \frac{9}{4\lambda_Q} \alpha^2 - \varepsilon_1 \hat{l}_f \right), \\ \dot{\hat{l}}_g &= \mu_2 \left( \frac{9}{4\lambda_Q} \hat{u}_r^2 \alpha^2 - \varepsilon_2 \hat{l}_g \right), \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ 为正常数. 选择 $\hat{l}_f(0) \geq 0, \hat{l}_g(0) \geq 0$ , 由式(24)可以得出 $\hat{l}_f \geq 0, \hat{l}_g \geq 0$ .

将式(20)代入式(19)可得

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{6} \lambda_Q \|e\|^2 + \frac{9}{4\lambda_Q} \tilde{l}_f \alpha^2 + \frac{9}{4\lambda_Q} \tilde{l}_g \hat{u}_r^2 \alpha^2 - \alpha g_r \tilde{u}_r, \quad (25)$$

其中 $\tilde{u}_r, \tilde{l}_f, \tilde{l}_g$ 分别表示 $u_r, l_f, l_g$ 的估计误差, 定义为 $\tilde{u}_r = u_r - \hat{u}_r, \tilde{l}_f = l_f - \hat{l}_f, \tilde{l}_g = l_g - \hat{l}_g$ .

**注1** 通过构造完全平方式(18)消除式(17)中的 $l_{f0}|\alpha||e|, l_{g0}|\alpha||e||\hat{u}_r|$ 以及 $|\alpha||a||e|$ , 控制器(20)避免了使用符号函数, 从而削弱控制器的抖振现象.

**注2** 本文所设计的全限幅学习律(21)有别于常用的部分限幅学习律, 即 $\hat{u}_r(t) = \text{sat}(\hat{u}_r(t-T)) - \phi(t)\mu_0\alpha$ . 根据 $\alpha$ 的表达式, 只要 $e_i, i = 1, 2, \dots, n$ 有界, 部分限幅学习律同样可以保证 $\hat{u}_r(t)$ 有界. 然而与全限幅学习律相比, 部分限幅学习律由于含有无限幅项 $\phi(t)\mu_0\alpha$ , 因此难以保证将 $\hat{u}_r(t)$ 限制在指定的界内.

**注3** 式(21)中, 函数 $\phi(t)$ 用以保证 $\hat{u}_r(t)$ 在 $t = iT, i = 0, 1, 2, 3, \dots$ 处的连续性<sup>[4]</sup>, 其中 $\phi_0(t)$ 可选为线性或非线性形式. 为便于实现, 本文 $\phi_0(t)$ 简单取为线性函数 $\frac{t}{T}$ .

**注4** 根据误差动态(9), 可直接设计如下自适应鲁棒控制器(adaptive robust control, ARC)

$$u = -\frac{9}{4\lambda_Q g_m} \|a\|^2 \alpha - \frac{1}{g_m} \hat{\rho} \text{sgn} \alpha, \quad (26)$$

其中:  $\text{sgn}(\cdot)$ 表示符号函数,  $\hat{\rho}$ 表示不确定性 $f_x + \dot{x}_{nr}$ 的上界

估计值. 然而, 与本文所提控制器(20)相比, 控制器(26)的设计过程未能充分利用期望轨迹的周期特征, 且控制信号存在抖振问题.

**注5** 本文所设计的全限幅学习律也可以用于定常参数 $l_f, l_g$ 的估计. 然而在实际工程应用中, 额外的重复学习律需要使用更多的内存空间, 导致硬件成本的上升. 为此, 本文设计自适应更新律来估计未知参数 $l_f, l_g$ , 在不影响控制性能的前提下, 更利于实际应用.

### 4 收敛性分析

**引理1**<sup>[13]</sup> 给定标量 $a, b$ , 假设 $|a| \leq \bar{b}$ , 其中 $\bar{b}$ 为 $b$ 的限幅值, 有如下不等式成立:

$$[a - \text{sat}(b)][b - \text{sat}(b)] \leq 0. \quad (27)$$

**定理1** 给定周期性期望轨迹 $x_r$ , 设计重复学习控制器(20), 全限幅重复学习律(21)以及自适应更新律(24), 则系统(1)的跟踪误差2-范数收敛至原点附近的邻域内.

**证** 构造如下类Lyapunov函数:

$$L = V + \frac{1}{2\mu_0} \int_{t-T}^t g_r \tilde{u}_r^2 dt + \frac{1}{2\mu_1} \tilde{l}_f^2 + \frac{1}{2\mu_2} \tilde{l}_g^2. \quad (28)$$

对式(28)求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{L} = \dot{V} + \frac{g(x_r(t))}{2\mu_0} (u_r - \hat{u}_r)^2 - \frac{g(x_r(t-T))}{2\mu_0} \times \\ [u_r(t-T) - \hat{u}_r(t-T)]^2 - \frac{1}{\mu_1} \tilde{l}_f \dot{\tilde{l}}_f - \frac{1}{\mu_2} \tilde{l}_g \dot{\tilde{l}}_g. \end{aligned} \quad (29)$$

考虑 $x_r$ 和 $u_r$ 的周期特性, 即 $x_r(t) = x_r(t-T), u_r(t) = u_r(t-T)$ , 式(29)可写为

$$\begin{aligned} \dot{L} = \dot{V} + \frac{g_r}{2\mu_0} (u_r - \hat{u}_r)^2 - \frac{g_r}{2\mu_0} [u_r - \hat{u}_r(t-T)]^2 - \\ \frac{1}{\mu_1} \tilde{l}_f \dot{\tilde{l}}_f - \frac{1}{\mu_2} \tilde{l}_g \dot{\tilde{l}}_g. \end{aligned} \quad (30)$$

由于 $(a-b)^2 - (a-c)^2 = (2a-b-c)(b-c)$ , 因此式(30)可改写为

$$\begin{aligned} \dot{L} = \dot{V} + \frac{g_r}{2\mu_0} [2u_r - \hat{u}_r - \hat{u}_r(t-T)] \times \\ [\hat{u}_r(t-T) - \hat{u}_r] - \frac{1}{\mu_1} \tilde{l}_f \dot{\tilde{l}}_f - \frac{1}{\mu_2} \tilde{l}_g \dot{\tilde{l}}_g = \\ \dot{V} - \frac{g_r}{2\mu_0} [2\tilde{u}_r + \hat{u}_r - \hat{u}_r(t-T)] \times \\ [\hat{u}_r - \hat{u}_r(t-T)] - \frac{1}{\mu_1} \tilde{l}_f \dot{\tilde{l}}_f - \frac{1}{\mu_2} \tilde{l}_g \dot{\tilde{l}}_g \leq \\ \dot{V} - \frac{g_r}{\mu_0} \tilde{u}_r [\hat{u}_r - \hat{u}_r(t-T)] - \frac{\tilde{l}_f \dot{\tilde{l}}_f}{\mu_1} - \frac{\tilde{l}_g \dot{\tilde{l}}_g}{\mu_2}. \end{aligned} \quad (31)$$

由重复学习律(21)可知,  $\hat{u}_r(t-T) = \text{sat}(\hat{u}_{r0}(t-T)) = \hat{u}_{r0} + \phi\mu_0\alpha$ , 其中 $\phi = \phi(t)$ , 代入式(31)有

$$\begin{aligned} \dot{L} \leq & \dot{V} - \frac{g_r}{\mu_0} \tilde{u}_r [\hat{u}_r - \hat{u}_{r0} - \phi \mu_0 \alpha] - \\ & \frac{1}{\mu_1} \tilde{l}_f \dot{\hat{l}}_f - \frac{1}{\mu_2} \tilde{l}_g \dot{\hat{l}}_g = \\ & \dot{V} + \frac{g_r}{\mu_0} [u_r - \text{sat}(\hat{u}_{r0})][\hat{u}_{r0} - \text{sat}(\hat{u}_{r0})] + \\ & g_r \phi \tilde{u}_r \alpha - \frac{1}{\mu_1} \tilde{l}_f \dot{\hat{l}}_f - \frac{1}{\mu_2} \tilde{l}_g \dot{\hat{l}}_g. \end{aligned} \quad (32)$$

根据引理1, 有不等式  $[u_r - \text{sat}(\hat{u}_{r0})][\hat{u}_{r0} - \text{sat}(\hat{u}_{r0})] \leq 0$  成立, 从而式(32)可化简为

$$\dot{L} \leq \dot{V} + g_r \phi \tilde{u}_r \alpha - \frac{1}{\mu_1} \tilde{l}_f \dot{\hat{l}}_f - \frac{1}{\mu_2} \tilde{l}_g \dot{\hat{l}}_g. \quad (33)$$

将式(25)代入式(33)可得

$$\begin{aligned} \dot{L} \leq & -\frac{1}{6} \lambda_Q \|e\|^2 + (\phi - 1) g_r \tilde{u}_r \alpha + \frac{9}{4 \lambda_Q} \tilde{l}_f \alpha^2 - \\ & \frac{1}{\mu_1} \tilde{l}_f \dot{\hat{l}}_f + \frac{9}{4 \lambda_Q} \tilde{l}_g \hat{u}_r^2 \alpha^2 - \frac{1}{\mu_2} \tilde{l}_g \dot{\hat{l}}_g. \end{aligned} \quad (34)$$

将自适应更新律(24)代入式(34)可得

$$\begin{aligned} \dot{L} \leq & -\frac{1}{6} \lambda_Q \|e\|^2 + (\phi - 1) g_r \tilde{u}_r \alpha + \varepsilon_1 \tilde{l}_f \dot{\hat{l}}_f + \varepsilon_2 \tilde{l}_g \dot{\hat{l}}_g = \\ & -\frac{1}{6} \lambda_Q \|e\|^2 + (\phi - 1) g_r \tilde{u}_r \alpha + \varepsilon_1 (-\tilde{l}_f^2 + \tilde{l}_f \dot{\hat{l}}_f - \\ & \frac{1}{4} l_f^2) + \frac{\varepsilon_1}{4} l_f^2 + \varepsilon_2 (-\tilde{l}_g^2 + \tilde{l}_g \dot{\hat{l}}_g - \frac{1}{4} l_g^2) + \frac{\varepsilon_2}{4} l_g^2 \leq \\ & -\frac{1}{6} \lambda_Q \|e\|^2 + (\phi - 1) g_r \tilde{u}_r \alpha + \delta_1, \end{aligned} \quad (35)$$

其中  $\delta_1 = \frac{\varepsilon_1}{4} l_f^2 + \frac{\varepsilon_2}{4} l_g^2$  为正常数.

根据函数  $\phi(t)$  的定义(23), 分别在  $t \in [0, T]$  以及  $t \in [T, +\infty)$  两个区间上分析  $\|e\|$  的收敛性.

当  $t \in [0, T]$  时, 有

$$\begin{aligned} \dot{L} \leq & -\frac{\lambda_Q}{6} \|e\|^2 + \delta_1 + |(\phi - 1)| |g_r| |\tilde{u}_r| \|b^T P\| \|e\| = \\ & -\frac{\lambda_Q}{12} \|e\|^2 + \delta_1 + \frac{12}{4 \lambda_Q} (\phi - 1)^2 g_r^2 \tilde{u}_r^2 \|b^T P\|^2 - \\ & \left( \sqrt{\frac{\lambda_Q}{12}} \|e\| - \sqrt{\frac{12}{4 \lambda_Q}} |(\phi - 1)| |g_r| |\tilde{u}_r| \|b^T P\| \right)^2 \leq \\ & -\frac{\lambda_Q}{12} \|e\|^2 + \delta_1 + \frac{12}{4 \lambda_Q} (\phi - 1)^2 g_r^2 \tilde{u}_r^2 \|b^T P\|^2 \leq \\ & -\frac{\lambda_Q}{12} \|e\|^2 + \delta_2, \end{aligned} \quad (36)$$

其中  $\delta_2 = \delta_1 + \frac{12}{\lambda_Q} g_m^2 \tilde{u}_r^2 \|b^T P\|^2$  为正常数. 由式(36)

可得, 当  $\|e\| > \sqrt{\frac{12 \delta_2}{\lambda_Q}}$  时, 有  $\dot{L} < 0$  成立, 从而  $\|e\|$  在区间  $t \in [0, T]$  上有界.

当  $t \in [T, \infty)$  时, 由于  $\phi \equiv 1$ , 由式(35)可得

$$\dot{L} \leq -\frac{1}{6} \lambda_Q \|e\|^2 + \delta_1. \quad (37)$$

根据式(37), 当  $\|e\| > \sqrt{\frac{6 \delta_1}{\lambda_Q}}$  时, 有  $\dot{L} < 0$  成立, 从而  $\|e\|$  最终收敛至区间

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| \leq \sqrt{\frac{6 \delta_1}{\lambda_Q}}. \quad (38)$$

由式(38)可知, 选择较小的  $\delta_1$  或具有较大  $\lambda_Q$  的矩阵  $Q$ , 可保证  $\|e\|$  最终收敛到原点附近的邻域内, 且该邻域随着  $\delta_1$  的减小或  $\lambda_Q$  增加而减小. 证毕.

**注6** 根据  $\delta_1$  的表达式可以看出, 减小参数  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  可保证较小的  $\delta_1$ . 然而由式(24)可知, 过小的  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  会降低  $\dot{\hat{l}}_f$  和  $\dot{\hat{l}}_g$  的收敛速度. 此外, 由控制器(20)可以看出, 过小的  $\lambda_Q$  会使控制器增益过低, 从而影响跟踪误差的收敛速度.

### 5 仿真结果及分析

本节通过永磁步进电机系统与三阶非线性系统两个仿真实例验证所提自适应重复学习控制 (adaptive repetitive learning control, ARLC) 方法的有效性.

**例1** 在  $d - q$  坐标系下, 电流反馈永磁步进电机模型表达式为<sup>[20]</sup>

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{D}{J} x_2 - \frac{N_r i_f^2}{2J} \sum_{i=4}^j i L_{fi} \sin(i N_r x_1) - \\ \frac{T_L(x_1)}{J} + \frac{i_f N_r}{J} \sum_{i=1}^j i L_{mi} \cos[(1-i) N_r x_1], \end{cases} \quad (39)$$

其中:  $x_1, x_2$  分别表示转子位置、速度,  $J$  表示转动惯量,  $N_r$  表示极对数,  $D$  表示粘滞摩擦系数,  $T_L(\cdot)$  表示负载转矩,  $i_f$  表示永磁体等效电流,  $u$  为  $q$  轴输入电流,  $\frac{N_r i_f^2}{2J} \sum_{i=4}^j i L_{fi} \sin[i N_r x_1]$  表示齿槽转矩,  $\sum_{i=1}^j i L_{mi} \cos[(1-i) N_r x_1]$  表示非正弦气隙磁链分布, 仿真中取  $j = 4$ . 电机模型具体参数如表1所示.

表1 永磁步进电机模型参数

Table 1 Model parameters of the permanent magnet stepper motor

参数	值	参数	值
$J/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	$7.33 \times 10^{-2}$	$L_{f4}/\text{H}$	$1.766 \times 10^{-3}$
$D$	$2 \times 10^{-3}$	$L_{m1}/\text{H}$	$5 \times 10^{-3}$
$N_r$	50	$L_{m2}/\text{H}$	$5 \times 10^{-4}$
$T_L/(\text{N} \cdot \text{m})$	$1.72 \sin x_1$	$L_{m3}/\text{H}$	$1.66 \times 10^{-4}$
$i_f/\text{A}$	1	$L_{m4}/\text{H}$	$6.25 \times 10^{-5}$

对比式(1)与式(39), 可得控制增益  $g_x$  表达式为

$$\begin{aligned} g_x = & \frac{i_f N_r}{J} \sum_{i=1}^4 i L_{mi} \cos[(1-i) N_r x_1] = \\ & \frac{i_f N_r}{J} (L_{m1} + \sum_{i=2}^4 i L_{mi} \cos[(1-i) N_r x_1]). \end{aligned} \quad (40)$$

由表1可知,系统中 $L_{mi}, i=2,3,4$ 远小于 $L_{m1}$ ,因此存在正常数 $g_m$ ,满足 $g_x \geq g_m$ .

周期性期望轨迹设为 $x_{1r} = \sin(0.5\pi t)$ ,其中周期 $T = 4$ s. 矩阵 $A, Q$ 分别取为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -15 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

通过求解Lyapunov方程(11)得

$$P = \begin{bmatrix} 181 & 12 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}.$$

其他控制参数设置为 $g_m = 2.8, \mu_0 = 240, \mu_1 = 0.2, \mu_2 = 80, \varepsilon_1 = 1 \times 10^{-4}, \varepsilon_2 = 1 \times 10^{-5}$ . 系统初值设置为 $x_1(0) = 0.4, x_2(0) = 0$ .

仿真结果如图1-5所示,其中图1和图2分别描述了系统状态跟踪轨迹与跟踪误差的2-范数收敛轨迹. 由图1和图2可以看出,本文所提的自适应重复学习控制方法对周期期望轨迹具有良好的跟踪效果,且随着系统的周期运行,跟踪误差2-范数收敛至原点附近. 图3给出了期望控制输入 $u_r$ 的估计值及其估计误差. 由图3可知,本文所设计的全幅学习律(21)可以较准确地估计期望控制输入 $u_r$ . 图4给出了系统的控制输入信号,对比图3和图4可见,系统控制输入 $u$ 的波形基本与期望控制输入 $u_r$ 波形保持一致. 需要说明的是,所用的永磁步进电机系统(39)包含了大量的齿槽转矩与非正弦气隙磁链分布,因此期望控制输入 $u_r$ 本身含有大量的谐波成分,由于所提ARLC方法可以较准确地估计 $u_r$ ,因此 $u$ 的曲线并不光滑,这与理论分析中保证控制信号连续的结论并不矛盾. 图5给出了未知常数 $l_f, l_g$ 的估计. 由图1-5可以看出,本文所提的自适应重复学习控制方法能够实现对外期望控制输入的准确估计以及对周期期望轨迹的高精度跟踪.

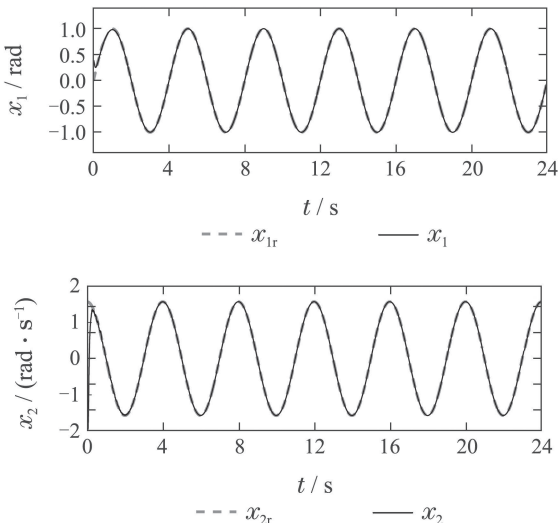


图1 状态跟踪轨迹

Fig. 1 States tracking trajectories

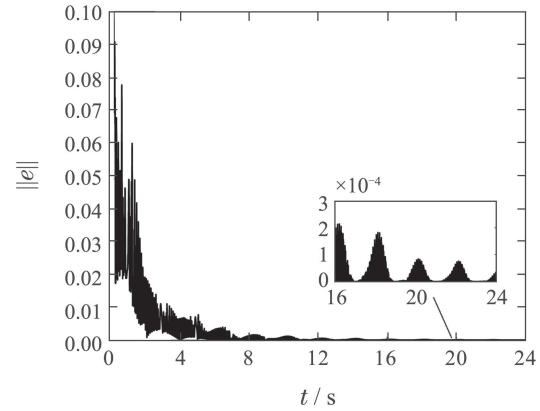


图2 跟踪误差2-范数

Fig. 2 2-norm of the tracking error

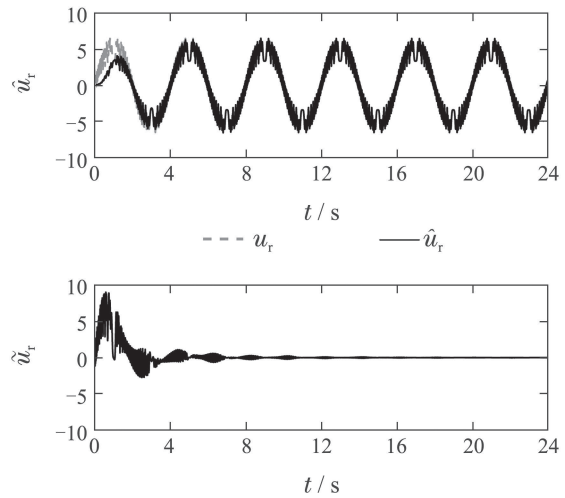


图3 期望控制输入的估计 $\hat{u}_r$ 及其估计误差 $\tilde{u}_r$

Fig. 3 Estimate of the desired control input  $\hat{u}_r$  and the estimation error  $\tilde{u}_r$

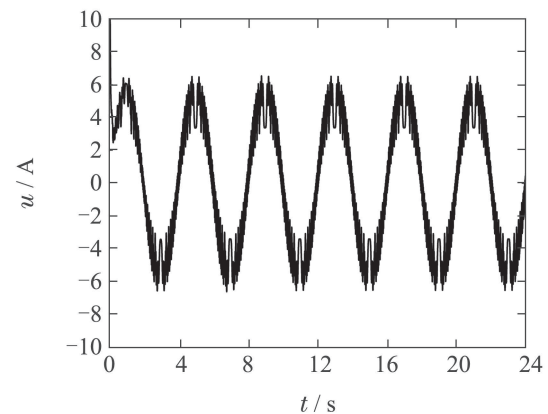
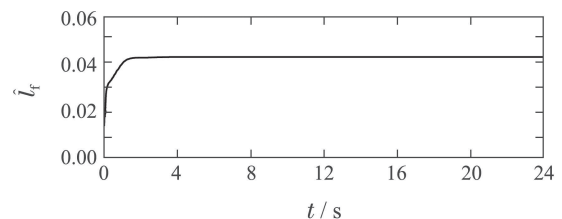


图4 控制输入

Fig. 4 Control input



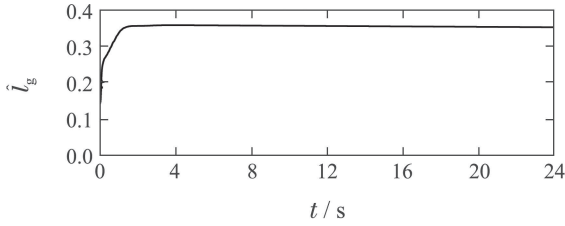


图 5 未知参数  $l_f, l_g$  的估计

Fig. 5 Estimates of the unknown parameters  $l_f$  and  $l_g$

**例 2** 考虑如下三阶非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = f_x + g_x u, \end{cases} \quad (41)$$

其中: 不确定性  $f_x = x_1^2 + x_2 + \sin x_3$ ; 控制增益  $g_x = 1 + 0.5\sin(x_1 + 0.25 \sin x_2)$ , 存在正常数  $g_m$ , 使得  $g_x \geq g_m$ .

期望轨迹设为  $x_{1r} = \sin(0.5\pi t)$ , 周期为  $T = 4$  s, 矩阵  $A, Q$  分别设为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -13 & -7 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

通过求解 Lyapunov 方程(11)得

$$P = \begin{bmatrix} 340.8 & 180.8 & 25 \\ 180.8 & 161.7 & 15.8 \\ 25 & 15.8 & 5.8 \end{bmatrix}. \quad (43)$$

其他控制参数设置为  $g_m = 0.6, \mu_0 = 240, \mu_1 = 0.2, \mu_2 = 80, \varepsilon_1 = 1 \times 10^{-4}, \varepsilon_2 = 1 \times 10^{-5}$ .

为显示本文所提 ARLC 方法的优越性, 进一步给出与自适应鲁棒控制 (adaptive robust control, ARC) 方法以及自适应神经网络控制 (adaptive neural-network control, ANNC) 方法的对比<sup>[23]</sup>. 其中 ARC 控制器形式由式(26)给出, 且  $\hat{\rho}$  的自适应更新律设计为

$$\dot{\hat{\rho}} = \mu_\rho (|\alpha| - \varepsilon_\rho \hat{\rho}), \quad (44)$$

其中参数设置为  $\mu_\rho = 2, \varepsilon_\rho = 7 \times 10^{-2}$ . ARC 控制器(26)中  $g_m$  同样设置为 0.6, 矩阵  $A, Q, P$  的取值同式(42)–(43), 即与 ARLC 控制器相同.

ANNC 控制器由文献[23]给出, 具体形式如下:

虚拟控制器  $\alpha_1, \alpha_2$  和控制器  $u$  定义为

$$\begin{cases} \alpha_1 = -c_1 z_1 - x_{2r}, \\ \alpha_2 = -c_2 z_2 - z_1 - \dot{\alpha}_1 \end{cases} \quad (45)$$

和

$$u = -z_2 - c_3 z_3 - \hat{W}^T S(Z), \quad (46)$$

其中:  $c_1, c_2, c_3$  为正常数;  $z_1, z_2$  和  $z_3$  为误差变量, 表达式为

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - x_{1r}, \\ z_2 = x_2 - \alpha_1, \\ z_3 = x_3 - \alpha_2; \end{cases} \quad (47)$$

$S(Z) = [s_1(Z) \ s_2(Z) \ \cdots \ s_l(Z)]^T, Z \in \mathbb{R}^q$  为  $q$  维输入向量,  $l$  表示神经网络节点个数.  $s_i(Z), i = 1, 2, \dots, l$  取为高斯函数, 表达式为

$$s_i(Z) = \exp\left[-\frac{(Z - \mu_i)^T (Z - \mu_i)}{\eta_i^2}\right], \quad (48)$$

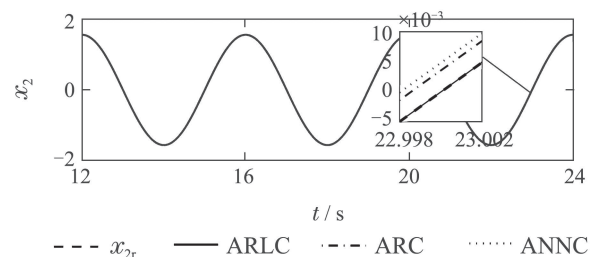
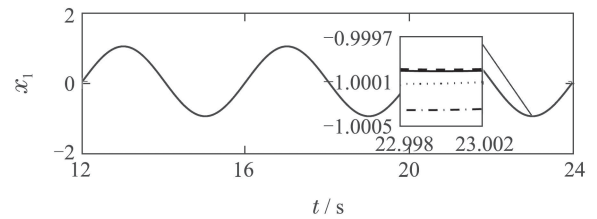
其中:  $\mu_i = [\mu_{i1} \ \mu_{i2} \ \cdots \ \mu_{iq}]$  为聚类中心,  $\eta_i$  为高斯函数宽度. 此外, 式(46)中  $\hat{W} = [w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_l]^T$  为神经网络权值向量的估计值, 其更新律为

$$\dot{\hat{W}} = \Gamma[S(Z)z_3 - \sigma \hat{W}], \quad (49)$$

其中:  $\sigma$  为正参数,  $\Gamma$  为增益矩阵.

本仿真实例中,  $c_1, c_2$  和  $c_3$  的取值根据式(43)的最后一行在一定范围内进行调节, 选取跟踪效果较好的一组取值为  $c_1 = 20, c_2 = 25, c_3 = 30$ . 输入向量  $Z = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_{2r} \ x_{3r} \ \dot{x}_{3r}]^T$ ; 神经网络节点数  $l = 100$ ; 聚类中心  $\mu_i (i = 1, 2, \dots, l)$  分布于  $[-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3]$ ; 高斯函数宽度取为  $\eta_i = 10, i = 1, 2, \dots, l$ ; 增益矩阵  $\Gamma = 2 \times I_6$ , 其中  $I_6$  为单位矩阵; 正参数  $\sigma = 0.5$ .

仿真对比结果如图6–10所示. 图6和图7给出了 ARLC 与 ARC 以及 ANNC 的跟踪性能对比. 由图6和图7可见, 在 ARC 或 ANNC 控制下系统稳态时仍存在一定的周期性跟踪误差; 而在 ARLC 控制下, 系统周期性跟踪误差随着系统运行被逐渐消除. 因此, 本文所提 ARLC 方法具有更高的周期轨迹跟踪精度. 图8给出了 ARLC 与 ARC 以及 ANNC 的控制输入对比, 由图8可以看出, ARC 方法存在明显的抖振现象, 而 ARLC 方法和 ANNC 方法由于在控制设计时避免了使用符号函数, 有效抑制了控制器抖振问题. 图9给出了期望控制输入的估计  $\hat{u}_r$  及其估计误差  $\hat{u}_r$ , 可以看出本文所设计的学习律(21)可实现对期望控制输入的准确估计. 图10给出了未知常数  $l_f, l_g$  的估计.



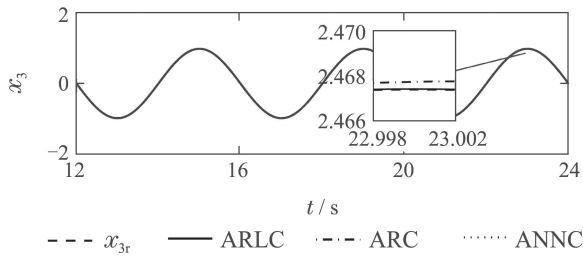


图6 ARLC与ARC以及ANNC的跟踪轨迹对比

Fig. 6 Comparison of tracking trajectories among ARLC, ARC and ANNC

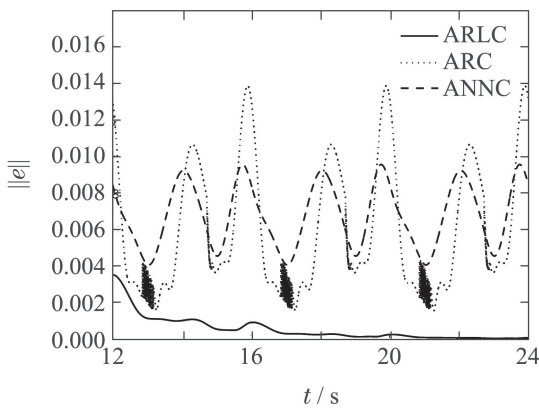


图7 ARLC与ARC以及ANNC跟踪误差2-范数对比

Fig. 7 Comparison of 2-norm of tracking error among ARLC, ARC and ANNC

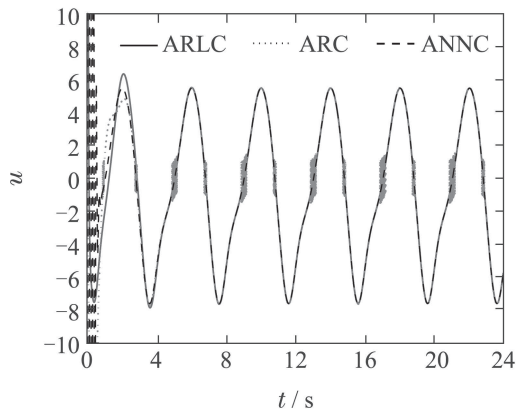


图8 ARLC与ARC以及ANNC控制输入对比

Fig. 8 Comparison of control inputs among ARLC, ARC and ANNC

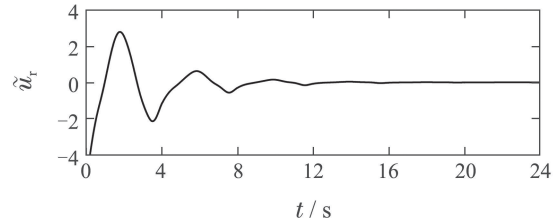
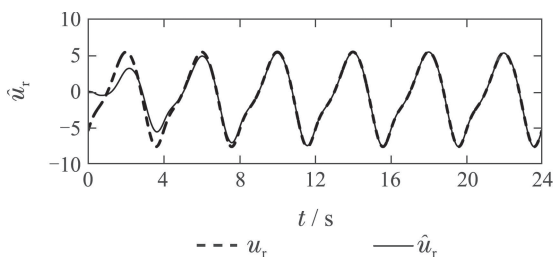


图9 期望控制输入的估计u\_r及其估计误差u\_r-tilde

Fig. 9 Estimate of the desired control input  $\hat{u}_r$  and the estimation error  $\tilde{u}_r$

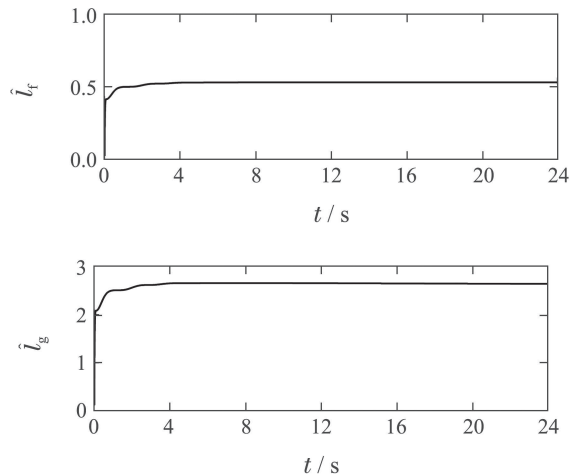


图10 未知参数l\_f, l\_g的估计

Fig. 10 Estimates of the unknown parameters  $l_f$  and  $l_g$

由图6-10可以看出, 本文所提ARLC方法能够实现周期轨迹的高精度跟踪以及对期望控制输入的准确估计. 在消除系统周期性跟踪误差和提高系统跟踪精度的同时, 能够有效抑制控制器抖振问题.

## 6 结论

本文针对一类非参数不确定系统, 基于Lyapunov方法设计自适应重复学习控制器, 实现系统对周期性期望轨迹的高精度跟踪. 利用期望轨迹的周期特性, 构造周期性期望控制输入, 并设计全振幅学习律对其估计, 保证估计值被限制在指定的界内. 通过构造完全平方消除部分误差相关项, 控制器设计中可避免使用符号函数, 从而保证控制信号连续. 此外, 对非参数不确定性界的平方设计自适应估计律, 减少控制器对系统模型信息的依赖. 仿真对比验证了本文所提方法的有效性.

## 参考文献:

- [1] HARA S, YAMAMOTO Y, OMATA T, et al. Repetitive control system: a new type servo system for periodic exogenous signals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, 33(7): 659 - 668.
- [2] DAI X, ZHOU X, TIAN S, et al. Iterative learning control for MIMO singular distributed parameter systems. *IEEE Access*, 2017, 5: 24094 - 24104.



- [3] NA J, GRINO R, COSTA-CASTELLO R, et al. Repetitive controller for time-delay systems based on disturbance observer. *IET Control Theory and Applications*, 2010, 4(11): 2391 – 2404.
- [4] MENG Qi, HOU Zhongsheng. Active disturbance rejection learning control for inverter systems with non-repetitive features. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(11): 1663 – 1671.  
(孟琦, 侯忠生. 非严格重复逆变器系统自抗扰学习控制. 控制理论与应用, 2018, 35(11): 1663 – 1671.)
- [5] ZHOU Lan, WU Min, SHE Jinhua, et al. Design of robust repetitive control system with a state observer. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(9): 942 – 948.  
(周兰, 吴敏, 余锦华, 等. 具有状态观测器的鲁棒重复控制系统设计. 控制理论与应用, 2009, 26(9): 942 – 948.)
- [6] WU M, ZHOU L, SHE J. Design of observer-based  $H_\infty$  robust repetitive-control system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(6): 1452 – 1457.
- [7] ZHOU K, WANG D, ZHANG B, et al. Plug-in dual-mode-structure repetitive controller for CVCF PWM inverters. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, 56(3): 784 – 791.
- [8] YE Y, WU Y, XU G, et al. Cyclic repetitive control of CVCF PWM DC-AC converters. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, 64(12): 9399 – 9409.
- [9] GAO Feng. A repetitive control strategy for three-phase active power filters in variable-frequency power grid. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(4): 447 – 456.  
(高峰. 变频电网三相有源电力滤波器重复控制策略. 控制理论与应用, 2018, 35(4): 447 – 456.)
- [10] SUN Yibiao, YAN Feng, LIU Chunfang. Robust repetitive control for permanent-magnet linear synchronous motor based on  $\mu$  Theory. *Proceedings of the CSEE*, 2009, 29(30): 52 – 57.  
(孙宜标, 闫峰, 刘春芳. 基于 $\mu$ 理论的永磁直线同步电机鲁棒重复控制. 中国电机工程学报, 2009, 29(30): 52 – 57.)
- [11] SADEGH N, HOROWITZ R, KAO W, et al. A unified approach to design of adaptive and repetitive controllers for robotic manipulators. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1990, 112(4): 618 – 629.
- [12] DIXON W, ZERGEROGLU E, DAWSON D, et al. Repetitive learning control: a Lyapunov-based approach. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2002, 32(4): 538 – 545.
- [13] LI He, SUN Mingxuan, ZHANG Jing. Repetitive learning control for a class of uncertain nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2018, 44(10): 128 – 137.  
(李鹤, 孙明轩, 张静. 一类不确定非线性系统的重复学习控制. 自动化学报, 2018, 44(10): 128 – 137.)
- [14] XU J. A new periodic adaptive control approach for time-varying parameters with known periodicity. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(4): 579 – 583.
- [15] SUN Meimei, HU Yun'an, WEI Jianming. Adaptive repetitive learning synchronization of uncertain fractional order multi-scroll chaotic systems. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(7): 936 – 944.  
(孙美美, 胡云安, 韦建明. 不确定分数阶多涡卷混沌系统自适应重复学习同步控制. 控制理论与应用, 2016, 33(7): 936 – 944.)
- [16] YU M, HUANG D, HE W. Robust adaptive iterative learning control for discrete-time nonlinear systems with both parametric and non-parametric uncertainties. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2016, 30(7): 972 – 985.
- [17] HUANG D, XU J, YANG S, et al. Observer based repetitive learning control for a class of nonlinear systems with non-parametric uncertainties. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2015, 25(8): 1214 – 1229.
- [18] YAN Qiuzhen, LIU Xiangbin, ZHU Sheng, et al. Dual-period repetitive control for nonparametric uncertain systems. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(9): 1311 – 1319.  
(严求真, 柳向斌, 朱胜, 等. 非参数不确定系统的双周期重复控制. 控制理论与应用, 2018, 35(9): 1311 – 1319.)
- [19] XU J, YAN R. On repetitive learning control for periodic tracking tasks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(11): 1842 – 1848.
- [20] BIFARETTI S, TOMEI P, VERRELLI C M. Brief paper: a global robust iterative learning position control for current-fed permanent magnet step motors. *Automatica*, 2011, 47(1): 227 – 234.
- [21] SUN M. Partial-period adaptive repetitive control by symmetry. *Automatica*, 2012, 48(9): 2137 – 2144.
- [22] SUN M, WU T, CHEN L, et al. Neural AILC for error tracking against arbitrary initial shifts. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, 29(7): 2705 – 2716.
- [23] GE S, WANG C. Direct adaptive NN control of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2002, 13(1): 214 – 221.

#### 作者简介:

陈强 博士, 副教授, 目前研究方向为自适应控制、学习控制, E-mail: sdnjqh@zjut.edu.cn;

余敬祺 硕士研究生, 目前研究方向为学习控制, E-mail: yxqzjut@163.com.