第 37 卷第 7 期
2020 年 7 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 37 No. 7
Jul. 2020

具有动态边界阻尼的波方程的降阶型差分半离散化的一致指数稳定性

郑 福†, 李 艳

(渤海大学 数理学院, 辽宁 锦州 121013)

摘要: 由于在最优控制的数值计算和可观性的反问题中, 离散系统关于离散化参数的一致指数稳定性具有重要作用, 因而一致指数稳定性得到广泛而深入的研究. 众所周知, 对指数稳定的波方程的空间变量用经典的有限差分或有限元离散化后, 离散格式产生高频病态伪特征模, 致使离散系统不是一致指数稳定的. 为了恢复一致指数稳定性, 学者们引入了添加数值粘性项法和滤波法等方法. 然而对于具有动态边界条件的波方程的一致指数稳定性问题研究的较少. 本文用降阶型差分方法对此问题进行研究, 先对具有动态边界条件的波方程进行降阶处理, 然后利用有限差分对其进行空间半离散化, 不用再对其进行任何处理, 引入合适的李雅普诺夫函数即可验证离散系统是一致指数稳定的.

关键词: 波动方程; 动态边界条件; 有限差分; 一致指数稳定性

引用格式: 郑福, 李艳. 具有动态边界阻尼的波方程的降阶型差分半离散化的一致指数稳定性. 控制理论与应用, 2020, 37(7): 1589 – 1594

DOI: 10.7641/CTA.2020.90645

The uniform exponential stability of wave equation with dynamical boundary damping discretized by the order reduction finite difference

ZHENG Fu†, LI Yan

(College of Mathematics and Physics, Bohai University, Jinzhou Liaoning 121013, China)

Abstract: Because the uniform exponential stabilities with respect to the discretized parameter play key roles in the computing of optimal control and the inverse problem of observability, they were broadly and intensively discussed. It is well known that, for the continuous wave equation, it is exponentially stable. If the continuous system is discretized in spacial variable by finite difference method, the numerical scheme yields spurious high frequency oscillations which induce the deficiency of the uniform exponential stability. To restore the uniform qualitative behaviors, researchers introduced the methods of vanishing viscosity terms and filtering. However, there are rare results on the uniform exponential stability of the wave equation with dynamical boundary condition. In this note, we shall apply finite difference approach of order reduction to study this question. That is to say, we reduce the order of the wave equation and then discretized spacial variable by finite difference method, the uniform exponential stability is tested by introducing suitable Lyapunov function and without any remedy.

Key words: wave equation; dynamical boundary condition; finite difference; uniform exponential stability

Citation: ZHENG Fu, LI Yan. The uniform exponential stability of wave equation with dynamical boundary damping discretized by the order reduction finite difference. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(7): 1589 – 1594

1 引言

现有一根长度为1的震动的弦, 令$y(t,x)$表示t时刻震动弦在$x\in(0,1)$处的位置, 弦的一端是固定的, 在弦的另一端施加动态边界反馈控制. 令$H_L^1(0,1)$为满足$z(x)\in L^2(0,1)$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(x)\in L^2(0,1)$, $z(x)$在闭区间$[0,1]$上绝对连续和$z(0)=0$的$z(x)$全体形成的空间. 设$(y^0(x),y^1(x))\in H_L^1(0,1)\times L^2(0,1)$表示弦的

收稿日期: 2019−08−03; 录用日期: 2020−04−08.

†通信作者. E-mail: zhengfu@amss.ac.cn; Tel.: +86 416-3400145.

本文责任编委: 郭宝珠.

国家自然科学基金项目(11871117)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (11871117).

初始状态, 对$\forall t \geqslant 0,\ w(t) \in \mathbb{R}^n$是控制器的状态. 令$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$是常数矩阵, $b, c \in \mathbb{R}^n$是列向量, d是正常数. 则具有动态边界阻尼的震动弦可用如下具有初边值条件的一维波方程描述:

$$\begin{cases} y_{tt}(t,x) - y_{xx}(t,x) = 0,\ x \in (0,1), \\ y(t,0) = 0,\ t \geqslant 0, \\ y_x(t,1) = -c^{\mathrm{T}} w(t) - d y_t(t,1),\ t \geqslant 0, \\ w_t = Aw(t) + b y_t(t,1),\ t \geqslant 0, \\ y(0) = y^0(x),\ y_t(0) = y^1(x),\ w(0) = \eta. \end{cases} \tag{1}$$

Morgül对系统(1)及其变形进行了详细的研究, 研究结果表明在合适的能量空间和条件下, 系统(1)是指数稳定的[1–4]. 但是对于其数值逼近方面的研究几乎没有, 然而在过去二、三十年间, 如下具有边界阻尼的波方程的数值逼近问题得到广泛而深入的研究.

$$\begin{cases} y_{tt}(t,x) - y_{xx}(t,x) = 0,\ x \in (0,1),\ t > 0, \\ y(t,0) = 0, \\ y_x(t,1) = -\alpha y_t(t,1),\ \alpha > 0, \\ y(0,x) = y_0(x),\ y_t(0,x) = y_1(x). \end{cases} \tag{2}$$

众所周知, 系统(2)在能量空间中的解是存在唯一的且是指数稳定的[5–6], 但是用经典的有限差分或者有限元对系统(2)的空间变量进行离散化, 这些逼近格式都将产生高频病态伪特征模, 致使相应的离散系统关于离散化参数不是一致指数稳定的[7–8].

为了克服传统有限差分和有限元逼近格式在恢复一致指数稳定性方面的不足, 学者们做了大量细致而深刻的工作. 比如1991年Banks等人引入混合有限元法(指的是用不同的基函数去逼近未知变量$y(t,x)$和$y_t(t,x)$), 利用连续系统类似的验证方法证明离散系统是一致指数稳定的[9]. 2001年, Fabiano在能量空间中引入与能量内积等价的内积, 在新的空间中证明了Galerkin有限元空间半离散逼近格式可一致保持系统的指数稳定性[10]. 从2003到2007年, Zuazua, Tebou和Münch等人通过在有限差分格式中添加消失的数值粘性项, 恢复了一维波动方程和二维矩形域中的波动方程的有限差分半离散化逼近的一致指数稳定性[11–13]. 近期, 利用添加数值粘性项法来处理二阶双曲系统的一致稳定性或一致多项式稳定的结果可参看文[14–17]. Li和Sun[18]先将系统(2)看做Port-Hamiltonian系统[19], 也就是通过引入合适的中间变量同时对系统(2) 的空间变量和时间变量的导数进行降阶处理, 然后再用有限差分法对空间变量半离散化, 通过引入合适的李雅普诺夫函数和能量乘子法验证离散系统是一致指数稳定的.

受上述工作的启发, 本文研究系统(1)的一致指数稳定性问题. 通过对上述离散化方法比较后, 本文采用的降阶型差分格式, 此种方法的优点是不但得到的离散化格式简单, 易于被工程技术人员理解和接受, 而且完全可以逐步仿照连续系统的验证方法去验证离散系统的一致指数稳定性. 研究一致指数稳定性的动机主要来源于两个方面, 一是在数值逼近最优控制问题中验证一致指数稳定性是最困难且最重要的一步[9–14]; 另一个是在可观性的反问题的数值“back and forth”方法中, 向前和向后方程的一致指数稳定性起着关键性的作用[20]. 对于半群或者离散格式的收敛性问题, 即: 离散系统的解依照某种拓扑收敛到连续系统的解, 本文没有给出详细验证, 因为这已经超出了控制理论的范畴, 有兴趣的读者可从文[13]和文[21]查找相关的收敛性分析.

本文结构如下: 在第2节, 对系统(1)的指数稳定性给出了一种新的证明方法; 在第3节, 给出了系统(1)的半离散化逼近系统, 利用连续系统的验证方法验证离散系统具有一致指数稳定性.

2 连续系统的指数稳定性

令$\mathrm{Re}\, z$表示复数z的实部, 假设:

H_1: 矩阵A的所有特征值有负实部;

H_2: (A,b)是可控的和(c,A)是可观的;

H_3: 存在另一常数$\gamma \geqslant 0$使得$d \geqslant \gamma$和

$$d + \mathrm{Re}\, c^{\mathrm{T}}(isI - A)^{-1} b > \gamma.$$

在这几个假设下, 由此可知系统(2)的传递函数

$$g(s) = d + c^{\mathrm{T}}(sI - A)^{-1} b$$

是正实的, 因而由Meyer-Kalman-Yakubovich引理(见文[1]P.1786)可知, 对给定任意对称正定矩阵$Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 存在对称正定矩阵$P \in \mathbb{R}^{n\times n}$、向量$q \in \mathbb{R}^n$、常数$\epsilon > 0$满足

$$A^{\mathrm{T}} P + PA = -qq^{\mathrm{T}} - \epsilon Q, \tag{3}$$

$$Pb - c = \sqrt{2(d-\gamma)}\, q. \tag{4}$$

为了达到降阶的目的, 将系统(2)看做Port-Hamiltonian系统的形式, 由文[19]中定理9.1.3和例9.2.1可知系统(2)是指数稳定的. 对系统(1)可进行同样的处理, 为此引入两个中间变量:

$$u(t,x) = y_x(t,x),\ v(t,x) = y_t(t,x), \tag{5}$$

进而得到系统(1)的等价形式, 即

$$\begin{cases} u_t(t,x) - v_x(t,x) = 0,\ x \in (0,1),\ t \geqslant 0, \\ v_t(t,x) - u_x(t,x) = 0, \\ v(t,0) = 0, \\ u(t,1) = -c^{\mathrm{T}} w(t) - d v(t,1), \\ \dot{w} = Aw(t) + b y_t(t,1), \\ u(0) = y_x^0(x),\ v(0) = y^1(x),\ w(0) = \eta. \end{cases} \tag{6}$$

引入空间$H = L^2(0,1) \times L^2(0,1) \times \mathbb{R}^n$及其内积

$$\langle z, \tilde{z} \rangle_H = \frac{1}{2}\int_0^1 (u\tilde{u} + v\tilde{v})\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\tilde{w}^{\mathrm{T}} P w, \tag{7}$$

其中: $z=(u,v,w)$, $\tilde{z}=(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})\in H$. 显然, 系统(6)的能量

$$F(t)=\frac{1}{2}\int_0^1[u^2+v^2]\mathrm{d}x+\frac{1}{2}w^{\mathrm{T}}Pw \tag{8}$$

相应于上述内积导出的范数.

这样, 可将系统(6)写成抽象微分方程形式:

$$\begin{cases} X'(t)=BX(t)=\begin{pmatrix} v_x \\ u_x \\ Aw+bv(1) \end{pmatrix}, \\ X(0)=X_0=(u^0(x),v^0(x),\eta)\in H, \end{cases} \tag{9}$$

其中算子B的定义域为

$$D(B)=\{z\in H|v(0)=0,\ u(1)=-c^{\mathrm{T}}w-dv(1)\}.$$

定理 1　算子B在H上生成的半群是收缩的C_0半群.

证　很容易看出, 算子B是稠定闭算子, 由直接计算得

$$\mathrm{Re}\langle Bz,z\rangle = -\gamma v^2(1)-\frac{1}{2}[\sqrt{2(d-\gamma)}v(1)-w^{\mathrm{T}}q]^2-\frac{\epsilon}{2}w^{\mathrm{T}}Qw. \tag{10}$$

进而有$\mathrm{Re}\langle Bu,u\rangle\leqslant 0$, 即$B$是耗散算子. 此外, 利用共轭算子的定义, 易于求得

$$B^*\tilde{z}=-(\tilde{v}_x,\tilde{u}_x,A\tilde{w}+b\tilde{v}(1)),$$
$$\forall\tilde{z}=(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})\in D(B^*).$$

定义域为

$$D(B^*)=\{\tilde{z}\in H|\tilde{v}(0)=0,\tilde{u}(1)+c\tilde{w}^{\mathrm{T}}-d\tilde{v}^2(1)=0,$$
$$\sqrt{2(d-\gamma)}(q^{\mathrm{T}}\tilde{w}-q\tilde{w}^{\mathrm{T}})\tilde{v}(1)=\tilde{w}^{\mathrm{T}}(qq^{\mathrm{T}}+\epsilon Q)\tilde{w}\}.$$

同样地,

$$\mathrm{Re}\langle B^*\tilde{z},\tilde{z}\rangle=-d\tilde{v}^2(1)\leqslant 0. \tag{11}$$

所以, B^*也是耗散算子, 进而得出由算子B生成的半群$T(t)$是收缩半群(文[19], 定理6.1.8).　　证毕.

定理1表明系统(6)的唯一解可以由$T(t)X_0$给出, 但是, 为了得到系统(6)的指数稳定性, 构造Lyapunov函数: $G(t)=F(t)+\varepsilon\phi(t)$, 其中$\phi(t)=\int_0^1 xuv\mathrm{d}x$, $0<\varepsilon<1$是可以自由选取的参数. 直接利用Cauchy不等式和三角不等式得如下引理.

引理 1　Lyapunov 函数$G(t)$等价于能量$F(t)$, 即

$$C_1F(t)<G(t)<C_2F(t),$$

其中: $C_1=1-\varepsilon$, $C_2=1+\varepsilon$.

引理 2　辅助函数$\phi(t)$满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t)\leqslant -F(t)+(d^2+\frac{1}{2})v^2(1)+ cc^{\mathrm{T}}|w(t)|^2+\frac{1}{2}w^{\mathrm{T}}Pw. \tag{12}$$

证　直接求导得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t)=\\ &\int_0^1 xu_xu\mathrm{d}x+\int_0^1 xvv_x\mathrm{d}x=\\ &xu^2|_0^1-\int_0^1 xu_xu\mathrm{d}x-\int_0^1 u^2\mathrm{d}x+xv^2|_0^1-\\ &\int_0^1 xv_xv\mathrm{d}x-\int_0^1 v^2\mathrm{d}x=\\ &u^2(1,t)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t)+v^2(1,t)-\\ &\int_0^1(u^2+v^2)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t)=\frac{1}{2}(u^2(1,t)+v^2(1,t))-\frac{1}{2}\int_0^1(u^2+v^2)\mathrm{d}x.$$

由于$u(t,1)=-c^{\mathrm{T}}w(t)-dv(t,1)$, 所以

$$u^2(1,t)\leqslant 2cc^{\mathrm{T}}|w(t)|^2+2d^2v^2(1,t),$$

将其代入上式可得式(12).　　证毕.

定理 2　能量$F(t)$具有如下指数衰减率: $F(t)\leqslant\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}t}F(0)$, 其中$\varepsilon$满足$0<\varepsilon<\min\{\frac{2\gamma}{2d^2+1},\frac{\epsilon w^{\mathrm{T}}Qw}{2cc^{\mathrm{T}}|w(t)|^2+w^{\mathrm{T}}Pw},1\}$.

证　由式(11)和引理2可知

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t)+\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t)\leqslant\\ &-\varepsilon F(t)-\gamma v^2(1)-\frac{\epsilon}{2}w^{\mathrm{T}}Qw-\\ &\frac{1}{2}[\sqrt{2(d-\gamma)}v(1)-w^{\mathrm{T}}q]^2+\\ &\frac{\varepsilon}{2}[(2d^2+1)v^2(1)+2cc^{\mathrm{T}}|w(t)|^2+w^{\mathrm{T}}Pw]\leqslant\\ &-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}G(t)-[\gamma-\frac{\varepsilon}{2}(2d^2+1)]v^2(1)-\\ &\frac{1}{2}[\sqrt{2(d-\gamma)}v(1)-w^{\mathrm{T}}q]^2-\\ &[\frac{\epsilon}{2}w^{\mathrm{T}}Qw-\varepsilon cc^{\mathrm{T}}|w(t)|^2-\frac{\varepsilon}{2}w^{\mathrm{T}}Pw]\leqslant\\ &-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}G(t),\end{aligned}$$

其中选取参数ε确保

$$\begin{cases}\gamma-\frac{\varepsilon}{2}(2d^2+1)>0,\\ \frac{\epsilon}{2}w^{\mathrm{T}}Qw-\varepsilon cc^{\mathrm{T}}|w(t)|^2-\frac{\varepsilon}{2}w^{\mathrm{T}}Pw>0.\end{cases} \tag{13}$$

所以, $\varepsilon<\min\{\frac{2\gamma}{2d^2+1},\frac{\epsilon w^{\mathrm{T}}Qw}{2cc^{\mathrm{T}}|w(t)|^2+w^{\mathrm{T}}Pw},1\}$. 由Gronwall引理得$G(t)\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}t}G(0)$, 再根据引理1, 得$F(t)\leqslant \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}t}F(0)$. 证毕.

3 离散化系统的一致指数稳定性

在构造系统(6)的有限差分空间半离散化之前, 先引入一些符号, 对任意的$N\in\mathbb{N}^+$, 将区间$[0,1]$进行等距划分:

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_j=jh<\cdots<x_{N+1}=1,$$

其中网格尺寸$h=\frac{1}{N+1}$. 令$U_j(t)=u(x_j,t)$, $V_j(t)=v(x_j,t)$. 用

$$\delta_xU_{j+\frac12}(t)=\frac{U_{j+1}(t)-U_j(t)}{h},$$

$$\delta_x^2U_j(t)=\frac{U_{j+1}(t)-2U_j(t)+U_{j-1}(t)}{h^2},$$

$$U_{j+\frac12}(t)=\frac{U_{j+1}(t)+U_j(t)}{2}$$

分别表示一阶差分算子、二阶差分算子和平均算子.

这样就可用有限差分方法对系统(6)进行离散化, 由于系统(6)的第1个方程在$(x_{j+\frac12},t)$是有意义的, 即

$$u'(x_{j+\frac12},t)-v_x(x_{j+\frac12},t)=0,$$

其中$x_{j+\frac12}=(j+\frac12)h$. 用微分算子替换后得到

$$U'_{j+\frac12}(t)-\delta_xV_{j+\frac12}(t)=r_{j+\frac12}(t),\tag{14}$$

其中: $\xi_1,\xi_2\in(x_j,x_{j+1})$,

$$r_{j+\frac12}(t)=(-\frac18u'_{xx}(\xi_1,t)+\frac{1}{24}v_{xxx}(\xi_2,t))h^2.$$

同理, 系统(6)的第2个方程也可以记为

$$V'_{j+\frac12}(t)-\delta_xU_{j+\frac12}(t)=s_{j+\frac12}(t),\tag{15}$$

其中: $\xi_3,\xi_4\in(x_j,x_{j+1})$,

$$s_{j+\frac12}(t)=(-\frac18v'_{xx}(\xi_3,t)+\frac{1}{24}u_{xxx}(\xi_4,t))h^2.$$

忽略方程(14)和(15)中的无穷小项, 并分别用$u_j(t)$和$v_j(t)$代替$U_j(t)$和$V_j(t)$, 得到系统(6)的有限差分空间半离散化形式:

$$\begin{cases}u'_{j+\frac12}(t)-\delta_xv_{j+\frac12}(t)=0,\ j=0,\cdots,N,\\ v'_{j+\frac12}(t)-\delta_xu_{j+\frac12}(t)=0,\\ v_0(t)=0,\\ u_{N+1}(t)=-c^{\mathrm{T}}w(t)-dv_{N+1}(t),\\ \dot w=Aw(t)+bv_{N+1}(t),\\ u_j(0)=u_j^0,\ v_j(0)=v_j^0,\ w(0)=\eta,\end{cases}\tag{16}$$

其中: 若u_j^0和v_j^0分别是初值$u^0(x_j)$和$v^0(x_j)$的估计时, $u_j(t)$和$v_j(t)$分别是$u(x_j,t)$和$v(x_j,t)$的估计, 但当初始条件足够光滑时, 则有$u^0(x_j)=u_j^0$, $v^0(x_j)=v_j^0$.

根据上述引入的记号和简单计算可得如下引理[18]:

引理 3 对任意的$\{U_j\}_j$, $\{V_j\}_j$, $\{W_j\}_j$, 有

$$h\sum_{j=0}^N\delta_xU_{j+\frac12}V_{j+\frac12}+h\sum_{j=0}^NU_{j+\frac12}\delta_xV_{j+\frac12}=U_{N+1}V_{N+1}-U_0V_0\tag{17}$$

和

$$\begin{aligned}&h\sum_{j=0}^N\delta_xU_{j+\frac12}V_{j+\frac12}W_{j+\frac12}+\\&h\sum_{j=0}^NU_{j+\frac12}\delta_xV_{j+\frac12}W_{j+\frac12}+\\&h\sum_{j=0}^NU_{j+\frac12}V_{j+\frac12}\delta_xW_{j+\frac12}=\\&U_{N+1}V_{N+1}W_{N+1}-U_0V_0W_0-\\&\frac14\sum_{j=0}^N(U_{j+1}-U_j)(V_{j+1}-V_j)(W_{j+1}-W_j).\end{aligned}\tag{18}$$

定义$\tilde u(t)=\{u_j(t)\}_j$的L^2范数:

$$\|\tilde u(t)\|=\sqrt{h\sum_{j=0}^Nu^2_{j+\frac12}(t)}.\tag{19}$$

有限差分系统(16)的离散能量记为

$$F_h(t)=\frac12(\|\tilde u(t)\|^2+\|\tilde v(t)\|^2)+\frac12w^{\mathrm{T}}Pw.\tag{20}$$

这里的$F_h(t)$是连续能量$F(t)$的有限差分半离散化形式. 因而有如下定义:

定义 1 若存在与t和h无关的两个正数M和η使得

$$F_h(t)\leqslant M\mathrm{e}^{-\eta t}F_h(0),$$

则称系统(16)是一致指数稳定的.

接下来用上节的方法验证离散化系统(16)的一致指数稳定性.

引理 4 由式(20)定义的离散能量$F_h(t)$满足

$$\frac{\mathrm{d}F_h(t)}{\mathrm{d}t}=-\gamma v^2_{N+1}(t)-\frac12[\sqrt{2(d-\gamma)}v_{N+1}(t)-w^{\mathrm{T}}q]^2-\frac{\epsilon}{2}w^{\mathrm{T}}Qw.$$

证 用$hu_{j+\frac12}(t)$乘以式(16)的第1个方程, 得

$$h\sum_{j=0}^Nu'_{j+\frac12}(t)u_{j+\frac12}(t)-h\sum_{j=0}^N\delta_xv_{j+\frac12}(t)u_{j+\frac12}(t)=0.$$

由引理3中的式(17)得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|\tilde{u}(t)\|^2}{\mathrm{d}t}+h\sum_{j=0}^{N}\delta_x u_{j+\frac{1}{2}}(t)v_{j+\frac{1}{2}}(t)= u_{N+1}v_{N+1}. \tag{21}$$

同理, 用$hv_{j+\frac{1}{2}}(t)$乘以式(16)的第2个方程得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|\tilde{v}(t)\|^2}{\mathrm{d}t}+h\sum_{j=0}^{N}\delta_x u_{j+\frac{1}{2}}(t)v_{j+\frac{1}{2}}(t)=0. \tag{22}$$

两式合并, 得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(\|\tilde{u}(t)\|^2+\|\tilde{u}(t)\|^2)}{\mathrm{d}t}=u_{N+1}v_{N+1}.$$

根据$F_h(t)$的定义,

$$\frac{\mathrm{d}F_h(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(\|\tilde{u}(t)\|^2+\|\tilde{u}(t)\|^2)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}(w_t^{\mathrm{T}}Pw+w^{\mathrm{T}}Pw_t).$$

根据式(3)–(4)和$u_{N+1}(t)=-c^{\mathrm{T}}w(t)-dv_{N+1}(t)$, 得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F_h(t)}{\mathrm{d}t}=&\\ &-c^{\mathrm{T}}w(t)v_{N+1}(t)-dv_{N+1}^2(t)+\\ &\frac{1}{2}(w^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}P+PA)w+bv_{N+1}Pw+w^{\mathrm{T}}Pbv_{N+1})=\\ &-\frac{1}{2}[\sqrt{2(d-\gamma)}v_{N+1}(t)-w^{\mathrm{T}}q]^2-\\ &\gamma v_{N+1}^2(t)-\frac{\epsilon}{2}w^{\mathrm{T}}Qw.\end{aligned}$$

证毕.

引理4表明系统的离散能量随着时间的增加而减少. 与连续情形类似, 为了得到离散系统能量的一致指数衰减率, 需要构造如下Lyapunov函数: $G_h(t)=F_h(t)+\varepsilon\phi_h(t)$, $0<\varepsilon<1$, 其中辅助函数$\phi_h(t)$满足

$$\phi_h(t)=h\sum_{j=0}^{N}x_{j+\frac{1}{2}}(t)u_{j+\frac{1}{2}}(t)v_{j+\frac{1}{2}}(t).$$

与引理1类似, 也有如下引理:

引理 5　Lyapunov函数$G_h(t)$等价于能量$F_h(t)$, 即$C_1F_h(t)<G_h(t)<C_2F_h(t)$.

引理 6　辅助函数$\phi_h(t)$满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_h(t)\leqslant -F_h(t)+cc^{\mathrm{T}}|w(t)|^2+(d^2+\frac{1}{2})v_{N+1}^2(t)+\frac{1}{2}w^{\mathrm{T}}Pw. \tag{23}$$

证　直接对$\phi_h(t)$求导有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_h(t)=&h\sum_{j=0}^{N}x_{j+\frac{1}{2}}(t)u'_{j+\frac{1}{2}}(t)v_{j+\frac{1}{2}}(t)+\\ &h\sum_{j=0}^{N}x_{j+\frac{1}{2}}(t)u_{j+\frac{1}{2}}(t)v'_{j+\frac{1}{2}}(t)=\\ &h\sum_{j=0}^{N}x_{j+\frac{1}{2}}(t)\delta_x v_{j+\frac{1}{2}}(t)v_{j+\frac{1}{2}}(t)+\\ &h\sum_{j=0}^{N}x_{j+\frac{1}{2}}(t)u_{j+\frac{1}{2}}(t)\delta_x u_{j+\frac{1}{2}}(t).\end{aligned}$$

根据引理3中的式(18)得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_h(t)=&\\ &-h\sum_{j=0}^{N}v_{j+\frac{1}{2}}^2(t)-h\sum_{j=0}^{N}x_{j+\frac{1}{2}}(t)v_{j+\frac{1}{2}}(t)\delta_x v_{j+\frac{1}{2}}(t)+\\ &|v_{N+1}(t)|^2-\frac{h}{4}\sum_{j=0}^{N}(v_{i+1}-v_i)^2-h\sum_{j=0}^{N}u_{j+\frac{1}{2}}^2(t)-\\ &h\sum_{j=0}^{N}x_{j+\frac{1}{2}}(t)\delta_x u_{j+\frac{1}{2}}(t)u_{j+\frac{1}{2}}(t)+\\ &|u_{N+1}(t)|^2-\frac{h}{4}\sum_{j=0}^{N}(u_{i+1}-u_i)^2=\\ &-h\sum_{j=0}^{N}v_{j+\frac{1}{2}}^2(t)-h\sum_{j=0}^{N}x_{j+\frac{1}{2}}(t)v_{j+\frac{1}{2}}(t)\delta_x v_{j+\frac{1}{2}}(t)-\\ &h\sum_{j=0}^{N}u_{j+\frac{1}{2}}^2(t)-h\sum_{j=0}^{N}x_{j+\frac{1}{2}}(t)\delta_x u_{j+\frac{1}{2}}(t)u_{j+\frac{1}{2}}(t)+\\ &|v_{N+1}(t)|^2-\frac{h}{4}\sum_{j=0}^{N}(v_{i+1}-v_i)^2+\\ &|u_{N+1}(t)|^2-\frac{h}{4}\sum_{j=0}^{N}(u_{i+1}-u_i)^2\leqslant\\ &-2F_h(t)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_h(t)+v_{N+1}^2(t)+u_{N+1}^2(t)+w^{\mathrm{T}}Pw.\end{aligned}$$

由于$u_{N+1}(t)=-c^{\mathrm{T}}w(t)-dv_{N+1}(t)$, 所以有$u_{N+1}^2(t)\leqslant 2cc^{\mathrm{T}}w^2(t)+2d^2v_{N+1}^2(t)$, 将其代入上述不等式即可得到式(23).　　证毕.

定理 3　系统(16)是一致指数稳定的.

证　由引理4和引理6有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_h(t)=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_h(t)+\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_h(t)\leqslant\\ &-\gamma v_{N+1}^2(t)-\varepsilon F_h(t)-\frac{\epsilon}{2}w^{\mathrm{T}}Qw-\\ &\frac{1}{2}[\sqrt{2(d-\gamma)}v_{N+1}(t)-w^{\mathrm{T}}q]^2+\\ &\frac{\varepsilon}{2}[(2d^2+1)v_{N+1}^2(t)+2cc^{\mathrm{T}}|w(t)|^2+w^{\mathrm{T}}Pw]\leqslant\\ &-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}G_h(t)-[\gamma-\frac{\varepsilon}{2}(2d^2+1)]v_{N+1}^2(t)-\\ &\frac{1}{2}[\sqrt{2(d-\gamma)}v_{N+1}(t)-w^{\mathrm{T}}q]^2-\\ &[\frac{\epsilon}{2}w^{\mathrm{T}}Qw-\varepsilon cc^{\mathrm{T}}|w(t)|^2-w^{\mathrm{T}}Pw\frac{\epsilon}{2}]\leqslant\\ &-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}G_h(t),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases}\gamma-\dfrac{\varepsilon}{2}(2d^2+1)>0,\\ \dfrac{\epsilon}{2}w^{\mathrm{T}}Qw-\varepsilon cc^{\mathrm{T}}|w(t)|^2-\dfrac{\epsilon}{2}w^{\mathrm{T}}Pw>0.\end{cases}$$

所以有$\varepsilon < \min\{\frac{2\gamma}{2d^2+1}, \frac{\epsilon w^{\mathrm{T}}Qw}{2cc^{\mathrm{T}}|w(t)|^2+w^{\mathrm{T}}Pw}, 1\}$.

利用Gronwall引理得$G_h(t) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}t}G_h(0)$, 再根据引理5, 得$F_h(t) \leqslant \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}t}F_h(0)$. 最后根据定义1可知系统(16)是一致指数稳定的. 证毕.

参考文献:

[1] MORGÜL O. A dynamic control law for the wave equation. *Automatica*, 1994, 30(2): 1785 – 1792.

[2] MORGÜL O. The stabilization and stability robustness against small time delays of some damped wave equations. *IEEE Transactions on Automatic Control,* 1995, 40(2): 1626 – 1630.

[3] MORGÜL O. Stabilization and disturbance rejection for the wave equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(1): 89 – 95.

[4] MORGÜL O. An exponential stability result for the wave equation. *Automatica*, 2002, 38(1): 731 – 735.

[5] LUO Z H, GUO B Z, MORGÜL O. *Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems with Applications*. London: Springer-Verlag, 1999.

[6] GUO B Z, LUO Y H. Controllability and stability of a second order hyperbolic system with collocated sensor/actuator. *Systems Control & Letters*, 2002, 46(1): 45 – 65.

[7] INFANTE J A, ZUAZUA E. Boundary observability for the space semi discretizations of the 1–d wave equation. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 1999, 33(2): 407 – 438

[8] ZUAZUA E. Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods. *SIAM Review*, 2005, 47(2): 197 – 243.

[9] BANKS H T, ITO K, WANG C. Exponentially stable approximations of weakly damped wave equations. *Estimation and Control of Distributed Parameter Systems, International Series: Numerical Mathematics, 100*. Birkhäuser, Basel: Springer, 1991: 1 – 33.

[10] FABIANO R H. Stability preserving Galerkin approximations for a boundary damped wave equation. *Nonlinear Analysis*, 2001, 47(8): 4545 – 4556.

[11] TEBOU L T, ZUAZUA E. Uniform exponential long time decay for the space semi-discretization of a locally damped wave equation via an artificial numerical viscosity. *Numerische Mathematik*, 2003, 95(3): 563 – 598.

[12] MÜNCH A, PAZOTO P F. Uniform stabilization of a viscous numerical approximation for a locally damped wave equation. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2007, 13(2): 265 – 293.

[13] TEBOU L T, ZUAZUA E. Uniform boundary stabilization of the finite difference space discretization of the 1–d wave equation. *Advances in Computational Mathematics*, 2007, 26(1): 337 – 365.

[14] RAMDANI K, TAKAHASHI T, TUCSNAK M. Uniformly exponentially stable approximations for a class of second order evolution equations-application to LQR problems. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2007, 13(3): 503 – 527.

[15] ABDALLAH F, NICAISE S, VALEIN J, et al. Uniformly exponentially or polynomially stable approximations for second order evolution equations and some applications. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2013, 19(3): 844 – 887.

[16] MANIAR L, NAFIRI S. Approximation and uniform polynomial stability of C_0–Semigroups. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2016, 22(1): 208 – 235.

[17] AALTO A. Output error minimizing back and forth nudging method for initial state recovery. *Systems & Control Letters*, 2016, 94(1): 111 – 117.

[18] LI F, SUN Z. A finite difference scheme for solving the Timoshenko beam equations with boundary feedback. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2007, 200: 606 – 627.

[19] JACOB B, ZWART H. *Linear Port-Hamiltonian System on Infinite-dimensional Space*. Basel: Springer, 2012.

[20] GARCIA G, TAKAHASHI T. Numerical observers with vanishing viscosity for the 1–d wave equation. *Advances in Computational Mathematics*, 2014, 40(4): 711 – 745.

[21] ITO K, KAPPEL F. The Trotter-Kato theorem and approximation of PDEs. *Mathematics of Computation*, 1998, 67(221): 21 – 44.

作者简介:

郑 福 博士, 副教授, 硕士生导师, 近期主要从事分布参数控制系统和可修复系统的研究, E-mail: zhengfu@amss.ac.cn;

李 艳 硕士研究生, 近期主要从事分布参数系统的稳定性研究, E-mail: 1720394835@qq.com.