

含模型不确定性的上三角非线性系统的全局镇定

查雯婷^{1†}, 翟军勇², 梁莹玉¹

(1. 中国矿业大学(北京) 机电与信息工程学院, 北京 100083; 2. 东南大学 自动化学院, 江苏 南京 210096)

摘要: 本文针对一类具有模型不确定性的上三角非线性系统, 利用嵌套饱和和函数方法研究其全局镇定问题. 首先, 对系统中存在的未知幂指数、未知控制参数和不确定性非线性函数施加适当假设, 并基于Lyapunov稳定性定理利用已知的参数设计局部镇定控制器. 然后, 将设计的控制器与饱和和函数结合得到饱和控制器. 通过适当选取饱和度和, 可以证明只要不确定参数在限定的范围内, 该控制器都能够使得闭环系统全局渐近稳定. 最后, 选取不同的系统幂指数搭建数值仿真算例. 在相同的控制器作用下, 系统状态和控制轨迹渐近收敛至原点, 从而验证了所提控制算法的有效性和鲁棒性.

关键词: 非线性系统; 模型不确定性; 嵌套饱和方法; 鲁棒性; 全局镇定

引用格式: 查雯婷, 翟军勇, 梁莹玉. 含模型不确定性的上三角非线性系统的全局镇定. 控制理论与应用, 2020, 37(8): 1790 – 1798

DOI: 10.7641/CTA.2020.90811

Global stabilization of upper-triangular nonlinear systems with model uncertainties

ZHA Wen-ting^{1†}, ZHAI Jun-yong², LIANG Ying-yu¹

(1. School of Mechanical Electronic & Information Engineering,

China University of Mining & Technology (Beijing), Beijing 100083, China;

2. School of Automation, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210096, China)

Abstract: Based on the nested-saturation method, this paper considers the global stabilization problem for a class of upper-triangular nonlinear systems with model uncertainties. First, with respect to the unknown power integrators, control coefficients and uncertain nonlinear functions, certain assumptions are imposed. According to the Lyapunov stability theory, a state-feedback controller, only involving the known parameters, is iteratively designed to locally stabilize the nonlinear system. Then, a saturated controller is constructed by combining the nested function and the local stabilizer. With appropriately chosen saturation level, it can be proved that the saturated controller is able to make the closed-loop system globally asymptotically stable as long as the uncertain terms stay within the specified limits. Finally, a simulation example is conducted by selecting different sets of power integrators. With the same controller, system state and control trajectories converge to the origin asymptotically, which indicates the effectiveness and robustness of the proposed control scheme.

Key words: nonlinear system; model uncertainty; nested saturation approach; robustness; global stabilization

Citation: ZHA Wenting, ZHAI Junyong, LIANG Yingyu. Global stabilization of upper-triangular nonlinear systems with model uncertainties. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(8): 1790 – 1798

1 引言

在实际中, 由于外部干扰的存在, 往往不能建立准确的系统模型, 如控制参数未知、非线性函数未知、状态测量函数未知以及系统幂指数未知等. 随着控制理论的发展, 自适应控制被验证为处理不确定系统强有力的工具. 针对系统控制参数未知的情况, 文献[1]将

反步法与自适应技术相结合, 给出了全局状态反馈镇定控制律的设计方法. 在某些物理系统中控制方向难以确定, 如无标定视觉伺服系统^[2]. 文献[3]利用Nussbaum-type增益方法^[4]提出了一种针对三角型不确定非线性系统的重复学习控制策略, 然而系统中的非线性函数要求已知. 关于未知的非线性函数, 通常假设

收稿日期: 2019-09-26; 录用日期: 2020-04-23.

[†]通信作者. E-mail: wentingzha@126.com; Tel.: +86 15810229183.

本文责任编辑: 邓飞其.

国家自然科学基金项目(61703405, 61873061, 51707193)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61703405, 61873061, 51707193).

其满足线性增长条件或局部Lipschitz条件. 当线性增长率未知时, 文献[5]构造了一个通用的自适应输出反馈控制器, 使得系统状态调节至原点, 该结果被进一步推广至更一般的非线性时滞系统^[6-7]和随机系统^[8]中. 由于传感器测量噪声的存在或者传感器本身的结构特性, 系统状态不能被准确测量, 从而对控制器的设计带来很大困难. 文献[9]基于依次递减齐次度的概念和增加幂积分方法, 解决了高阶不确定非线性系统的量测反馈鲁棒控制问题. 文献[10]中指出由于外部环境的影响, 实际系统模型中的幂指数往往无法确定. 通过将未知幂指数漂移量限定在适当范围内, 利用区域齐次度的概念构造出一个全局状态反馈镇定控制器. 针对幂指数是时变函数的情况, 文献[11]利用系统幂指数的上下界设计出一个光滑的状态反馈控制器.

然而, 针对模型不确定性的全局控制结果大多集中于下三角系统或严格反馈系统. 实际中的物理系统, 如球-棍系统和倒立摆系统等, 常常被描述成上三角系统或前馈系统. 系统结构的特殊性决定了反步法和增加幂积分等方法不再适用于控制器的设计, 因此上三角非线性系统的全局控制问题吸引了越来越多控制学者的关注, 尤其是高阶上三角非线性系统, 即至少一个系统幂指数大于1. 嵌套饱和函数方法^[12]和forwarding方法^[13]是常用的两种控制器设计方法. 通过对非线性函数施加适当假设, 文献[14]给出了高阶上三角非线性系统的全局镇定饱和控制器设计方法. 为了放宽对系统非线性项的约束, 文献[15]将嵌套饱和函数和增加幂积分方法相结合, 解决了控制参数未知的高阶上三角系统的全局镇定问题. 在此基础上, 该结果被进一步推广至一类不确定大规模高阶上三角非线性系统中^[16]. 上述嵌套饱和函数方法是基于“由上至下”的原则设计控制器, 然后将饱和函数作用于所设计的控制, 基于“由下至上”的步骤恰当选取饱和度, 使得系统全局镇定. 与之不同, 基于Lyapunov直接方法的forwarding方法采用的是从下至上的设计思路. 文献[17]将扰动观测器与forwarding方法结合, 解决了不确定非线性系统的跟踪控制问题. 文献[18-19]将forwarding方法与广义齐次度的概念相结合, 给出了高阶上三角非线性系统的光滑和非光滑控制器设计方法. 在上述已有的结果中, 控制器的设计都用到了系统的幂指数. 若幂指数未知, 该设计方法将不再适用.

为了研究更一般的上三角系统, 本文综合考虑系统幂指数、控制参数和非线性函数均不确定的情况, 通过将不确定Lyapunov函数与嵌套饱和函数相结合, 解决了一类上三角不确定系统的全局镇定问题. 本文的难点体现在: 1) 由于系统幂指数未知, 不能利用文献[15]中传统的嵌套饱和函数方法来设计全局镇定控

制器; 2) 文献[10]中针对简单非线性系统的控制器设计方法不适用于本文考虑的上三角结构的系统; 3) 系统综合考虑各种模型不确定性, 给控制器的设计过程带来更多的困难.

2 问题描述及假设

本文研究如下非线性系统的全局镇定问题:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = d_1(x)x_2^{p_1} + \phi_1(x_2, \dots, x_n, u), \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = d_{n-1}(x)x_n^{p_{n-1}} + \phi_{n-1}(x_n, u), \\ \dot{x}_n = d_n(x)u + \phi_n(u), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x = (x_1 \ \dots \ x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ 分别为系统状态和控制输入. 对于 $i = 1, \dots, n-1$, 未知幂指数 $p_i \in \mathbb{R}_{\text{odd}}^{\geq 1} = \{q \in \mathbb{R} : q \geq 1, q \text{ 是两个奇数之比}\}$, 并且满足 $1 \leq a_i \leq p_i \leq b_i$, 其中 a_i 和 b_i 均已知. 不确定非线性函数 $d_i(\cdot)$'s 和 $\phi_i(\cdot)$'s 是 C^1 的, 且满足 $\phi_i(0) = 0$ 和 $d_i(\cdot) > 0$. 为了设计一个全局状态反馈控制器, 系统(1)需满足如下假设条件:

假设 1 对于 $i = 1, \dots, n-2$, $a_i \geq b_{i+1}$ 成立.

假设 2 存在正常数 $\underline{d}_i < 1$ 和 \bar{d}_i 满足

$$0 < \underline{d}_i \leq d_i(\cdot) \leq \bar{d}_i, \quad (2)$$

其中: $i = 1, \dots, n$, $x_{i+1} = u$.

假设 3 对于 $i = 1, \dots, n$, 存在正常数 ρ 和 q_i 满足

$$|\phi_i(\cdot)| \leq \rho(|x_{i+1}|^{q_i} + \dots + |x_n|^{q_i} + |u|^{q_i}), \quad (3)$$

其中 $q_i > b_i$.

注 1 文献[15]中的假设2.1给出了系统非线性函数所满足的条件, 在此基础上设计了齐次饱和控制器来镇定一类更广泛的上三角非线性系统. 本文所设计的线性结构控制器是齐次控制器的一种特殊情况, 在系统幂指数已知时, 上述假设与文献[15]中假设2.1相一致, 从而说明了假设的合理性.

下面给出控制器设计过程中会用到两个的引理.

引理 1^[20] 对于任意的 $p \in \mathbb{R}_{\text{odd}}^{\geq 1}$, $x \in \mathbb{R}$ 和 $y \in \mathbb{R}$, 以下不等式成立:

$$|x + y|^p \leq 2^{p-1}|x^p + y^p|,$$

$$(|x| + |y|)^{\frac{1}{p}} \leq |x|^{\frac{1}{p}} + |y|^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{p-1}{p}}(|x| + |y|)^{\frac{1}{p}}.$$

如果满足 $p \geq 1$ 和 $p \in \mathbb{R}_{\text{odd}}^+$, 则

$$\begin{cases} |x - y|^p \leq 2^{p-1}|x^p - y^p|, \\ |x|^{\frac{1}{p}} - |y|^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{p-1}{p}}|x - y|^{\frac{1}{p}}, \\ |x^p - y^p| \leq c|x - y|(|x - y|)^{p-1} + y^{p-1}, \end{cases} \quad (4)$$

其中 c 是一个正常数.

引理 2^[20] 对于任意的正实数 c, d 和实函数

$\gamma(x, y) > 0$, 如下不等式成立:

$$|x|^c|y|^d \leq \frac{c}{c+d}\gamma(x, y)|x|^{c+d} + \frac{d}{c+d}\gamma^{-\frac{c}{d}}(x, y)|y|^{c+d}.$$

3 局部镇定控制器设计

本节针对系统(1)设计状态反馈控制器, 使得闭环系统达到局部稳定. 首先, 考虑如下标称系统:

$$\dot{x}_i = d_i(x)x_{i+1}^{p_i}, \quad i=1, \dots, n-1, \quad \dot{x}_n = d_n(x)u, \quad (5)$$

并基于Lyapunov理论^[21]迭代地设计局部状态反馈控制器.

步骤 1 选取Lyapunov函数 $V_1 = \frac{1}{2}x_1^2$, 可得 V_1 关于时间的导数为

$$\dot{V}_1 = d_1(x)\xi_1(x_2^{p_1} - x_2^*x_1^{p_1}) + d_1(x)\xi_1x_2^{*p_1},$$

其中: x_2^* 是虚拟控制器, $\xi_1 = x_1$.

针对Lyapunov函数 V_1 , 定义集合

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | V_1(x_1) \leq N\},$$

其中 N 是一个正常数. 通过设计线性虚拟控制器

$$x_2^* = -\bar{\beta}_1\xi_1, \quad \bar{\beta}_1 > \left(\frac{n}{d_1}\right)^{\frac{1}{a_1}} > \left(\frac{n}{d_1}\right)^{\frac{1}{p_1}},$$

可得

$$\dot{V}_1|_{\Omega_1} \leq -n\xi_1^{p_1+1} + d_1(x)\xi_1(x_2^{p_1} - x_2^*x_1^{p_1}). \quad (6)$$

步骤 k 假设在第 $k-1$ 步, 存在一个关于 x_1, \dots, x_{k-1} 正定且径向无界的Lyapunov函数 $V_{k-1} : \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}$ 和一系列虚拟控制器 x_1^*, \dots, x_k^* ,

$$\begin{cases} x_1^* = 0, \quad \xi_1 = x_1, \quad x_i^* = -\bar{\beta}_{i-1}\xi_{i-1}, \\ \xi_i = \frac{x_i - x_i^*}{\bar{\beta}_{i-1}}, \quad \bar{\beta}_i > 0, \quad i = 2, \dots, k, \end{cases} \quad (7)$$

使得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{k-1}|_{\Omega_{k-1}} &\leq -(n-k+2) \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i^{p_i+1} + \\ &\frac{d_{k-1}(\cdot)}{\bar{\beta}_{k-2}} \xi_{k-1}^{p_{k-1}+1} (x_k^{p_{k-1}} - x_k^*x_{k-1}^{p_{k-1}}), \end{aligned} \quad (8)$$

其中定义集合 $\Omega_j \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n | V_j(x_1, \dots, x_j) \leq N\}$, $j = 2, \dots, k-1$ 满足 $\Omega_{k-1} \subset \dots \subset \Omega_1$.

接下来证明式(8)在第 k 步仍然成立. 为了简便, 利用一个通用的常数 c 来表示任意有限的正常数, 且具体的数值随着位置的不同而改变. 选取如下Lyapunov函数:

$$V_k = V_{k-1} + \frac{\xi_k^{p_1-p_k+2}}{p_1-p_k+2} \quad (9)$$

和相应的集合 $\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n | V_k(x_1, \dots, x_k) \leq N\}$. 由定义可知, $\Omega_k \subset \Omega_{k-1}$ 成立.

由于 $\xi_k = \frac{x_k}{\bar{\beta}_{k-1}} + \dots + \frac{x_2}{\bar{\beta}_1} + x_1$, 结合系统(5), 对

V_k 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_k|_{\Omega_k} &\leq -(n-k+2) \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i^{p_i+1} + \\ &\frac{d_k(\cdot)}{\bar{\beta}_{k-1}} \xi_k^{p_1-p_k+1} x_{k+1}^{p_k} + \\ &\frac{d_{k-1}(\cdot)}{\bar{\beta}_{k-2}} \xi_{k-1}^{p_1-p_{k-1}+1} (x_k^{p_{k-1}} - x_k^*x_{k-1}^{p_{k-1}}) + \\ &\xi_k^{p_1-p_k+1} \left(\frac{d_{k-1}(\cdot)x_k^{p_{k-1}}}{\bar{\beta}_{k-2}} + \dots + \right. \\ &\left. \frac{d_2(\cdot)x_3^{p_2}}{\bar{\beta}_1} + d_1(\cdot)x_2^{p_1} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

根据 ξ_k 的定义, 由引理1-2可得

$$\begin{aligned} &\frac{d_{k-1}(\cdot)}{\bar{\beta}_{k-2}} \xi_{k-1}^{p_1-p_{k-1}+1} (x_k^{p_{k-1}} - x_k^*x_{k-1}^{p_{k-1}}) \leq \\ &\frac{cd_{k-1}\bar{\beta}_{k-1}^{p_{k-1}}}{\bar{\beta}_{k-2}} |\xi_{k-1}|^{p_1-p_{k-1}+1} |\xi_k| \times \\ &(|\xi_k|^{p_{k-1}-1} + |\xi_{k-1}|^{p_{k-1}-1}) \leq \\ &\frac{1}{2} \xi_{k-1}^{p_1+1} + \kappa_k \xi_k^{p_1+1}, \end{aligned} \quad (11)$$

其中 κ_k 是与 a_i 和 b_i 有关的正常数, $i = 1, \dots, k-1$.

由假设1可知, $p_1 \geq \dots \geq p_k$ 成立. 因此, 根据引理1-2可得

$$\begin{aligned} &\xi_k^{p_1-p_k+1} \left(\frac{d_{k-1}(\cdot)x_k^{p_{k-1}}}{\bar{\beta}_{k-2}} + \dots + d_1(\cdot)x_2^{p_1} \right) \leq \\ &|\xi_k|^{p_1-p_k+1} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{2^{b_i-1} \bar{d}_i \bar{\beta}_i^{b_i}}{\bar{\beta}_{i-1}} (|\xi_i|^{p_i} + |\xi_{i+1}|^{p_i}) \leq \\ &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i^{p_i+1} + h_{k,1}(x_1, \dots, x_k) \xi_k^{p_1+1}, \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $h_{k,1}(\cdot) \geq 0$ 是一个只和 p_i 's 上下界有关的连续函数, $\bar{\beta}_0 = 1$.

将式(11)-(12)代入式(10)中, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_k|_{\Omega_k} &\leq -(n-k+1) \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i^{p_i+1} + \\ &\frac{d_k(\cdot)}{\bar{\beta}_{k-1}} \xi_k^{p_1-p_k+1} x_{k+1}^{*p_k} + (\kappa_k + h_{k,1}(\cdot)) \xi_k^{p_1+1} + \\ &\frac{d_k(\cdot)}{\bar{\beta}_{k-1}} \xi_k^{p_1-p_k+1} (x_{k+1}^{p_k} - x_{k+1}^*x_k^{p_k}). \end{aligned} \quad (13)$$

由 $p_1 \geq \dots \geq p_k$ 知, V_k 是一个关于 x_1, \dots, x_k 正定且径向无界的函数, 从而 x_1, \dots, x_k 在 Ω_k 上有界. 由于 $h_{k,1}(\cdot)$ 关于 x_1, \dots, x_k 连续, 则 $h_{k,1}(\cdot)$ 在 Ω_k 上有界, 即 $h_{k,1}(\cdot) \leq \bar{h}_{k,1}$, $\bar{h}_{k,1} \geq 0$ 是一个常数.

通过选取第 $k+1$ 个虚拟控制器 $x_{k+1}^* = -\bar{\beta}_k \xi_k$, $\bar{\beta}_k > (\bar{h}_{k,1} + \kappa_k + n - k + 1)^{\frac{1}{a_k}} \bar{\beta}_{k-1}^{\frac{1}{a_k}} / \underline{d}_k^{\frac{1}{a_k}}$, 使得如下不等式成立:

$$\dot{V}_k|_{\Omega_k} \leq -(n-k+1) \sum_{i=1}^k \xi_i^{p_i+1} +$$

$$\frac{d_k(\cdot)}{\bar{\beta}_{k-1}} \xi_k^{p_1-p_k+1} (x_{k+1}^{p_k} - x_{k+1}^{*p_k}). \quad (14)$$

归纳部分证明完毕.

步骤 n 根据数学归纳法可知, 式(14)在 $k = n$ 时仍然成立. 故存在一个线性控制器

$$u = -\frac{\bar{\beta}_n}{\bar{\beta}_{n-1}} (x_n + \dots + \frac{\bar{\beta}_2}{\bar{\beta}_1} (x_2 + \bar{\beta}_1 x_1)), \quad (15)$$

使得

$$\dot{V}_n|_{\Omega_n} \leq -\sum_{i=1}^n \xi_i^{p_i+1}, \quad (16)$$

其中: Lyapunov 函数

$$V_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_1 - p_i + 2} \xi_i^{p_1-p_i+2},$$

集合 $\Omega_n \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n | V_n(x_1, \dots, x_n) \leq N\}$ 满足 $\Omega_n \subset \dots \subset \Omega_1$. 因此, 由 Lyapunov 稳定性定理可知闭环系统(5)-(15)在集合 Ω_n 上是局部渐近稳定的.

综合考虑系统(1)和标称系统(5)的关系, 可得在控制器(15)作用下, Lyapunov 函数 V_n 关于系统(1)的导数为

$$\dot{V}_n|_{\Omega_n} \leq -\sum_{i=1}^n \xi_i^{p_i+1} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_n}{\partial x_i} \phi_i. \quad (17)$$

由假设1-3可知 $q_i > p_i \geq p_{i+1} \geq \dots \geq p_n$, 则不等式(17)中的非线性项可估计为

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_n}{\partial x_i} \phi_i \leq \\ & \sum_{i=1}^n \frac{\rho}{\bar{\beta}_{i-1}} (|\xi_i|^{p_1-p_i+1} + \dots + |\xi_n|^{p_1-p_n+1}) \times \\ & (\bar{\beta}_i^{q_i} |\xi_{i+1} - \xi_i|^{q_i} + \dots + \bar{\beta}_n^{q_i} |\xi_n|^{q_i}) \leq \\ & c \sum_{i=1}^n (\sum_{j=i}^n |\xi_j|^{p_1-p_j+1}) \times (\sum_{j=i}^n |\xi_j|^{q_i}) \leq \\ & R(x_1, \dots, x_n) (\xi_1^{p_1+1} + \dots + \xi_n^{p_1+1}), \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $R(\cdot) \geq 0$ 是关于 x_1, \dots, x_n 的连续函数.

由于 Lyapunov 函数 V_n 关于 x_1, \dots, x_n 是正定且径向无界的, 因此通过恰当选取 N , 使得 $\forall x \in \Omega_n, R(\cdot) < \frac{1}{2}$ 成立. 结合式(17)可知

$$\dot{V}_n|_{\Omega_n} \leq -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \xi_i^{p_i+1}, \quad (19)$$

进而可得闭环系统(1)-(15)在集合 Ω_n 上是局部渐近稳定的.

4 全局饱和控制器设计

本节将进一步考虑非线性系统(1)的全局渐近镇定问题. 将设计的控制器(15)与饱和函数

$$\sigma(s) = \begin{cases} \epsilon \operatorname{sgn} s, & |s| > \epsilon, \\ s, & |s| \leq \epsilon \end{cases}$$

相结合, 得到如下饱和控制器:

$$u = -\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} \sigma(x_n + \dots + \frac{\beta_2}{\beta_1} \sigma(x_2 + \beta_1 \sigma(x_1))), \quad (20)$$

$0 < \epsilon < 1$ 是一个待定的参数, 同时增益 $\beta_i > \bar{\beta}_i$ 满足

$$\begin{cases} (\frac{\beta_1}{2})^{a_1} \underline{d}_1 - 1 - \bar{d}_1 b_1 (2^{b_1-2} + 1) (1 + \beta_1^{b_1-1}) > 0, \\ (\frac{\beta_i}{\beta_{i-1}})^{a_{i-1}} ((\frac{1}{2})^{a_i} \frac{d_i \beta_i}{\beta_{i-1}} - b_i (2^{b_i-2} + 1)), \\ -1 - \alpha_{i-1}(\cdot) - b_i (2^{b_i-2} + 1) > 0, \\ \forall i = 2, \dots, n-1, \\ \beta_n > \frac{2(\alpha_{n-1}(\cdot) + 1)\beta_{n-1}}{\underline{d}_n}, \end{cases} \quad (21)$$

其中:

$$\begin{aligned} \alpha_i(\cdot) &= \frac{\beta_i}{\beta_{i-1}} (\bar{d}_i (1 + \frac{\beta_i}{\beta_{i-1}})^{b_i} + 1 + \alpha_{i-1}(\cdot)), \\ i = 2, \dots, n-1, \quad \alpha_1(\cdot) &= \beta_1 (\bar{d}_1 (1 + \beta_1)^{b_1} + 1). \end{aligned}$$

首先引入下列引理, 该引理的证明将在附录中给出.

引理 3 对于闭环系统(1)-(20), 若系统状态满足 $|x_j| \leq \epsilon (1 + \frac{\beta_{j-1}}{\beta_{j-2}})$, $j = i+1, \dots, n$, 则存在式(21)

中定义的 $\alpha_i(\beta_1, \dots, \beta_i)$ 和 $0 < \epsilon_1 < 1$, 使得对于任意的 $0 < \epsilon \leq \epsilon_1$, 如下不等式成立: $\forall i = 1, \dots, n$,

$$\begin{cases} |\phi_i(\cdot)| \leq \epsilon^{p_i}, \\ |u_i(\bar{t}) - u_i(\underline{t})| \leq \epsilon^{p_i} \alpha_i(\cdot) (\bar{t} - \underline{t}), \quad \forall \bar{t} \geq \underline{t}, \end{cases} \quad (22)$$

其中: $u_i = -\frac{\beta_i}{\beta_{i-1}} \sigma(x_i - u_{i-1})$, $\beta_0 = 1$.

在引理3的基础上, 如下定理给出了本文的主要结论.

定理 1 在假设1-3的条件下, 存在充分小的 $\epsilon \in (0, \epsilon_1]$, 使得饱和控制器(20)能够全局镇定非线性系统(1).

证 上一节给出了系统(1)在集合 Ω_n 中局部镇定的结论. 如果能够证明在饱和控制器(20)作用下, 系统状态经过一段时间后能够进入并永远停留在集合 Ω_n 中, 则系统(1)全局稳定的结论自然成立. 因此, 该定理的证明分为如下两步:

首先, 利用归纳法证明当 β_i 满足式(21)时, 饱和控制器(20)能够使得系统状态依次收敛到一个由 ϵ 决定的小区域内.

步骤 1 证明存在时刻 $t_1 > 0$, 使得 $\forall t \geq t_1$,

$$|x_n(t) - u_{n-1}(t)| < \epsilon$$

成立. 为了得到这个结论, 首先利用反证法证明存在时刻 $t_1 > 0$, 使得

$$|x_n(t_1) - u_{n-1}(t_1)| \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (23)$$

若上式不成立, 则 $\forall t \geq 0, |x_n(t) - u_{n-1}(t)| > \frac{\epsilon}{2}$. 此时包括正负两种情形, 即 $x_n(t) - u_{n-1}(t) > \frac{\epsilon}{2}, \forall t \geq 0$ 和 $x_n(t) - u_{n-1}(t) < -\frac{\epsilon}{2}, \forall t \geq 0$. 针对正的情形, 可得

$$\dot{x}_n(t) = d_n(\cdot)u_n(t) + \phi_n(\cdot) < -\frac{\beta_n d_n}{2\beta_{n-1}}\epsilon + \epsilon = -\mu_n\epsilon, \quad (24)$$

其中 $\mu_n = \frac{\beta_n d_n}{2\beta_{n-1}} - 1 > 0$. 因此, $\forall t > 0$,

$$x_n(t) < x_n(0) - \mu_n\epsilon t. \quad (25)$$

由 u_{n-1} 的定义可知 $|u_{n-1}(t)| \leq \frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}}\epsilon$, 从而 $\forall t > 0$,

$$\frac{\epsilon}{2} - \frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}}\epsilon < x_n(t) < x_n(0) - \mu_n\epsilon t. \quad (26)$$

当时间趋近于无穷大时, 上式中的 $x_n(0) - \mu_n\epsilon t$ 将会趋近于负无穷大, 式(26)导致矛盾. 从而,

$$x_n(t) - u_{n-1}(t) > \frac{\epsilon}{2}, \forall t \geq 0$$

不成立. 类似可得负的情形也不成立, 因此 $\exists t_1 > 0$, 使得式(23)成立.

接下来同样利用反证法证明 $\forall t \geq t_1$,

$$|x_n(t) - u_{n-1}(t)| < \epsilon$$

成立. 假设上式不成立, 则存在时刻 $t'_1 \in [t_1, +\infty)$ 和 $t''_1 \in [t_1, +\infty)$, 使得

$$\begin{cases} |x_n(t'_1) - u_{n-1}(t'_1)| = \frac{\epsilon}{2}, \\ |x_n(t''_1) - u_{n-1}(t''_1)| = \epsilon, \\ \frac{\epsilon}{2} \leq |x_n(t) - u_{n-1}(t)| \leq \epsilon, \forall t \in [t'_1, t''_1]. \end{cases} \quad (27)$$

考虑式(27)中正的情形, 则 $\forall t \in [t'_1, t''_1]$,

$$\begin{aligned} \dot{x}_n(t) &= -\frac{d_n(\cdot)\beta_n}{\beta_{n-1}}\sigma(x_n(t) - u_{n-1}(t)) + \phi_n(\cdot) \leq \\ &-\frac{d_n\beta_n\epsilon}{2\beta_{n-1}} + \epsilon = -\mu_n\epsilon. \end{aligned} \quad (28)$$

对式(28)两边在 $[t'_1, t''_1]$ 上同时积分可得

$$x_n(t''_1) - x_n(t'_1) \leq -\mu_n\epsilon(t''_1 - t'_1). \quad (29)$$

另一方面, 结合式(27)和 $|u_{n-1}(t)| \leq \frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}}\epsilon$, 可得 $\forall t \in [t'_1, t''_1]$

$$|x_n(t)| \leq (1 + \frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}})\epsilon. \quad (30)$$

从而由引理3可知

$$|u_{n-1}(t''_1) - u_{n-1}(t'_1)| \leq \epsilon^{p_{n-1}}\alpha_{n-1}(\cdot)(t''_1 - t'_1). \quad (31)$$

结合式(29)–(31)可知

$$\begin{aligned} \epsilon &= x_n(t''_1) - u_{n-1}(t''_1) = \\ &x_n(t''_1) - x_n(t'_1) + x_n(t'_1) - u_{n-1}(t'_1) + \\ &u_{n-1}(t'_1) - u_{n-1}(t''_1) \leq \\ &\frac{\epsilon}{2} - \mu_n\epsilon(t''_1 - t'_1) + \epsilon^{p_{n-1}}\alpha_{n-1}(\cdot)(t''_1 - t'_1) = \\ &\frac{\epsilon}{2} - \epsilon(t''_1 - t'_1)(\mu_n - \epsilon^{p_{n-1}-1}\alpha_{n-1}(\cdot)). \end{aligned}$$

根据式(21)中 β_n 可得 $\mu_n - \epsilon^{p_{n-1}-1}\alpha_{n-1}(\cdot) > 0$, 从而 $\epsilon = x_n(t''_1) - u_{n-1}(t''_1) < \frac{\epsilon}{2}$ 矛盾. 因此, 式(27)中正的情形不成立. 利用类似的方法可以证明, 式(27)中负的情形也不成立. 故存在一个时刻 $t_1 > 0$, 对于任意的 $t \geq t_1$, 有 $|x_n(t) - u_{n-1}(t)| < \epsilon$, 即

$$X_n(t) \in Q_n = \{X_n(t) : |x_n(t) - u_{n-1}(t)| < \epsilon\}.$$

步骤 i 假设存在时刻 $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{i-1}$, 使得 $\forall t \geq t_{i-1}$, 有

$$|x_j(t) - u_{j-1}(t)| < \epsilon, \quad j = n - i + 2, \dots, n. \quad (32)$$

现要证明上式在 $j = n - i + 1$ 时仍成立. 按照步骤1中的证明过程, 首先证明 $\exists t_i \geq t_{i-1}$, 使得

$$|x_{n-i+1}(t_i) - u_{n-i}(t_i)| \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (33)$$

利用反证法, 假设上式不成立, 则 $\forall t \geq t_{i-1}$ 有

$$|x_{n-i+1}(t) - u_{n-i}(t)| > \frac{\epsilon}{2}. \quad (34)$$

为了证明的完整性, 这里考虑式(33)中负的情况, 即

$$x_{n-i+1}(t) - u_{n-i}(t) < -\frac{\epsilon}{2}, \quad \forall t \geq t_{i-1}. \quad (35)$$

由 $u_{n-i+1} = -\frac{\beta_{n-i+1}}{\beta_{n-i}}\sigma(x_{n-i+1} - u_{n-i})$ 知 $u_{n-i+1} > \frac{\beta_{n-i+1}\epsilon}{2\beta_{n-i}}$. 同时, 对于任意的 $X_j \in Q_j$, 不等式 $|x_j| \leq \epsilon(1 + \frac{\beta_{j-1}}{\beta_{j-2}})$, $j = n - i + 2, \dots, n$ 成立. 因此, 由引理3可知

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n-i+1} &= d_{n-i+1}(\cdot)(x_{n-i+2}^{p_{n-i+1}} - u_{n-i+1}^{p_{n-i+1}}) + \\ &d_{n-i+1}(\cdot)u_{n-i+1}^{p_{n-i+1}} + \phi_{n-i+1}(\cdot) > \\ &d_{n-i+1}(\cdot)(x_{n-i+2}^{p_{n-i+1}} - u_{n-i+1}^{p_{n-i+1}}) + \\ &d_{n-i+1}(\frac{\beta_{n-i+1}\epsilon}{2\beta_{n-i}})^{p_{n-i+1}} - \epsilon^{p_{n-i+1}}. \end{aligned} \quad (36)$$

根据引理1, 给出如下估计:

$$\begin{aligned} |x_{n-i+2}^{p_{n-i+1}} - u_{n-i+1}^{p_{n-i+1}}| &\leq \\ c_{n-i+1}|x_{n-i+2} - u_{n-i+1}| \times \\ &(|x_{n-i+2} - u_{n-i+1}|^{p_{n-i+1}-1} + |u_{n-i+1}|^{p_{n-i+1}-1}) \leq \\ &c_{n-i+1}\epsilon^{p_{n-i+1}}(1 + (\frac{\beta_{n-i+1}}{\beta_{n-i}})^{p_{n-i+1}-1}), \end{aligned} \quad (37)$$

其中 $c_{n-i+1} = b_{n-i+1}(2^{b_{n-i+1}-2} + 1)$.

将式(37)代入式(36)中, 可知 $\forall t \geq t_{i-1}$,

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n-i+1}(t) &> \left(\frac{d_{n-i+1}\beta_{n-i+1}^{p_{n-i+1}}}{(2\beta_{n-i})^{p_{n-i+1}}} - \frac{c_{n-i+1}\beta_{n-i+1}^{p_{n-i+1}-1}}{(\beta_{n-i})^{p_{n-i+1}-1}} - \right. \\ &\quad \left. c_{n-i+1} - 1 \right) \epsilon^{p_{n-i+1}} \triangleq \\ &\quad \mu_{n-i+1} \epsilon^{p_{n-i+1}}. \end{aligned} \quad (38)$$

根据式(21)中 β_i 's 的取值可知 $\mu_{n-i+1} > 0$. 因此, 由式(38)可得 $\forall t \geq t_{i-1}$,

$$x_{n-i+1}(t) > x_{n-i+1}(t_{i-1}) + \mu_{n-i+1} \epsilon^{p_{n-i+1}} (t - t_{i-1}). \quad (39)$$

又由于 $|u_{n-i}(t)| < \frac{\beta_{n-i}}{\beta_{n-i-1}} \epsilon$, 结合式(35)(39)可知

$$\begin{aligned} x_{n-i+1}(t_{i-1}) + \mu_{n-i+1} \epsilon^{p_{n-i+1}} (t - t_{i-1}) - \frac{\beta_{n-i}}{\beta_{n-i-1}} \epsilon &< \\ x_{n-i+1}(t) - u_{n-i}(t) &< \\ - \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

其中 $\forall t \geq t_{i-1}$. 类似于式(26), 当时间 t 趋近于无穷大时, 上述不等式变成 $\infty < -\frac{\epsilon}{2}$, 矛盾. 因此, 式(35)不成立. 对于正的情形, 可参照第1步的证明过程. 故必然存在时刻 t_i 使得式(33)成立.

接下来, 同样利用反证法证明 $\forall t \geq t_i$, 有

$$|x_{n-i+1}(t) - u_{n-i}(t)| < \epsilon. \quad (40)$$

若上式不成立, 则存在 $t'_i \in [t_i, +\infty)$ 和 $t''_i \in [t_i, +\infty)$, 使得

$$\begin{cases} |x_{n-i+1}(t'_i) - u_{n-i}(t'_i)| = \frac{\epsilon}{2}, \\ |x_{n-i+1}(t''_i) - u_{n-i}(t''_i)| = \epsilon, \\ \frac{\epsilon}{2} \leq |x_{n-i+1}(t) - u_{n-i}(t)| \leq \epsilon, \quad \forall t \in [t'_i, t''_i]. \end{cases} \quad (41)$$

考虑到式(41)中负的情形. 由式(38)可知 $\forall t \in [t'_i, t''_i]$, $\dot{x}_{n-i+1}(t) > \mu_{n-i+1} \epsilon^{p_{n-i+1}}$. 两边同时积分可得

$$x_{n-i+1}(t''_i) - x_{n-i+1}(t'_i) > \mu_{n-i+1} \epsilon^{p_{n-i+1}} (t''_i - t'_i). \quad (42)$$

此外, 由式(32)(41)以及 u_j 's 的定义可知, 对于任意的 $t \in [t'_i, t''_i]$, 有

$$|x_j(t)| \leq \left(1 + \frac{\beta_{j-1}}{\beta_{j-2}}\right) \epsilon, \quad j = n - i + 1, \dots, n. \quad (43)$$

因此, 根据引理3得

$$|u_{n-i}(t''_i) - u_{n-i}(t'_i)| \leq \epsilon^{p_{n-i}} \alpha_{n-i}(\cdot) (t''_i - t'_i). \quad (44)$$

结合式(41)-(42)以及式(44), 可知

$$-\epsilon =$$

$$x_{n-i+1}(t''_i) - u_{n-i}(t''_i) =$$

$$\begin{aligned} &x_{n-i+1}(t''_i) - x_{n-i+1}(t'_i) + x_{n-i+1}(t'_i) - u_{n-i}(t'_i) + \\ &u_{n-i}(t'_i) - u_{n-i}(t''_i) > \\ &-\frac{\epsilon}{2} + \epsilon^{p_{n-i+1}} (t''_i - t'_i) (\mu_{n-i+1} - \alpha_{n-i}(\cdot)). \end{aligned}$$

由式(21)中 β_i 's 的取值可得 $\mu_{n-i+1} - \alpha_{n-i}(\cdot) > 0$, 从而 $-\epsilon > -\frac{\epsilon}{2}$ 矛盾. 故式(41)中负的情形不成立, 同理可证明正的情形不成立.

综上可知, 存在一个时刻 $t_i \geq t_{i-1}$, 使得 $\forall t \geq t_i$, $|x_j(t) - u_{j-1}(t)| \leq \epsilon$ 成立, $j = n - i + 1, \dots, n$.

步骤 n 根据上述证明过程, 由数学归纳法可知, 存在时刻 $t_{n-1} \geq \dots \geq t_1 \geq 0$, 使得 $\forall t \geq t_{n-1}$,

$$|x_j(t) - u_{j-1}(t)| < \epsilon, \quad j = 2, \dots, n, \quad (45)$$

从而可得 $|x_j(t)| < (1 + \frac{\beta_{j-1}}{\beta_{j-2}}) \epsilon$, 其中 $\beta_0 = 1$. 故 x_1 的导数可以表示成

$$\dot{x}_1 = d_1(x)(x_2^{p_1} - u_1^{p_1}) + d_1(x)u_1^{p_1} + \phi_1.$$

由引理3可知 $|\phi_1(\cdot)| \leq \epsilon^{p_1}$, $\forall t \geq t_{n-1}$. 此外, 由引理1-2 可得

$$\begin{aligned} &|x_2^{p_1} - u_1^{p_1}| \leq \\ &c_1 |x_2 - u_1| (|x_2 - u_1|^{p_1-1} + |u_1|^{p_1-1}) \leq \\ &c_1 \epsilon^{p_1} (1 + \beta_1^{p_1-1}), \end{aligned}$$

其中 $c_1 = b_1(2^{b_1-2} + 1)$.

结合式(21)中 β_i 's 的取值可知, 如果有 $\forall t \geq t_{n-1}$, $x_1(t) > \frac{\epsilon}{2}$ 成立, 则

$$\dot{x}_1(t) < -\left(d_1\left(\frac{\beta_1}{2}\right)^{p_1} - 1 - \bar{d}_1 c_1 (1 + \beta_1^{p_1-1})\right) \epsilon^{p_1} < 0,$$

即系统状态 $x_1 > \frac{\epsilon}{2}$ 对于 $\forall t \geq t_{n-1}$ 并不成立. 如果 $\forall t \geq t_{n-1}$, $x_1(t) < -\frac{\epsilon}{2}$, 有

$$\dot{x}_1(t) > \left(d_1\left(\frac{\beta_1}{2}\right)^{p_1} - 1 - \bar{d}_1 c_1 (1 + \beta_1^{p_1-1})\right) \epsilon^{p_1} > 0,$$

则对于任意的 $t \geq t_{n-1}$, 系统状态 x_1 不可能恒小于 $-\frac{\epsilon}{2}$.

综合上述两种情况可知, 存在一个时刻 $t_n \geq t_{n-1}$ 使得当 $\forall t \geq t_n$ 时, $|x_1(t)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. 因此, 在时刻 t_n 之后, 系统状态 $X_n(t)$ 将会进入并一直停留在区域 Q 中,

$$Q = \{X_n : |x_1(t)| < \epsilon, |x_2(t) - u_1(t)| < \epsilon, \dots, |x_n(t) - u_{n-1}(t)| < \epsilon\}.$$

从 Q 的定义可知, 区域 Q 的大小由饱和度 ϵ 决定. 此外, 由第2节可知闭环系统(5)-(15)在区域 Ω_n 上局部渐近稳定. 故通过恰当选取参数 ϵ 满足集合 $Q \subset \Omega_n$, 可得在 t_n 时间之后, 系统状态停留在集合 Q 中, 并且饱和和控制器(20)将退变成非饱和控制器(15). 同时, 在控

制器(15)作用下,系统状态渐近收敛到原点.因此,闭环系统(5)–(20)是全局渐近稳定的. 证毕.

5 数值仿真

本节将利用一个数值仿真例子来验证定理1中所设计控制算法的有效性.

例1 考虑如下非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (0.5 + \sin^2 x_1)x_2^{p_1} + 0.1x_2^2, \\ \dot{x}_2 = u + 0.2u^2, \end{cases} \quad (46)$$

其中 p_1 是未知的幂指数并且满足 $p_1 \in [1, 2]$.通过计算可知, $0 < 0.5 \leq 0.5 + \sin^2 x_1 \leq 1.5$,从而满足假设2.同理可验证假设1和假设3均成立.因此根据定理1,利用未知幂指数 p_1 的上下界可以设计出如下线性饱和控制器

$$u = -\frac{\beta_2}{\beta_1}\sigma(x_2 + \beta_1\sigma(x_1)). \quad (47)$$

取 $\beta_1 = 2, \beta_2 = 12, p_1 = \frac{5}{3} \in [1, 2]$,饱和函数的饱和度 $\epsilon = 0.2$.初始状态为 $(x_1(0), x_2(0)) = (0.5, -0.5)$.状态响应曲线和控制曲线仿真结果如图1–2所示.

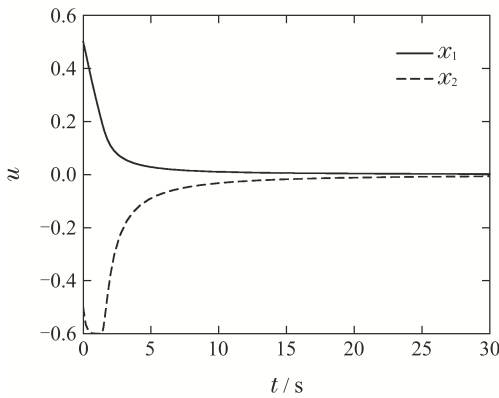


图1 $p_1 = \frac{5}{3}$ 时闭环系统(46)–(47)的状态响应曲线

Fig. 1 State trajectories of the closed-loop systems (46)–(47) with $p_1 = \frac{5}{3}$

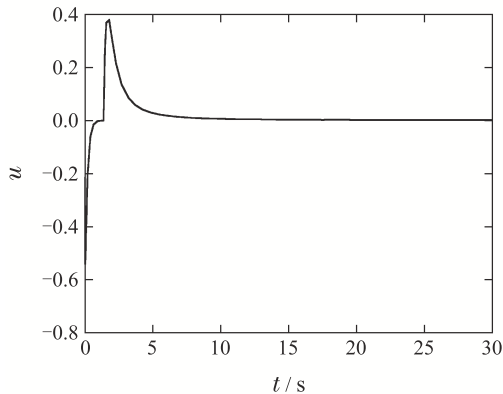


图2 $p_1 = \frac{5}{3}$ 时闭环系统(46)–(47)的控制曲线

Fig. 2 Control trajectory of the closed-loop systems (46)–(47) with $p_1 = \frac{5}{3}$

此外,从控制器设计过程中可知,只要幂指数 p_1 在 $[1, 2]$ 中取值,所设计的控制器 u 均可全局镇定系统(46).为了验证控制器的鲁棒性,选取 $p_1 = \frac{7}{5} \in [1, 2]$ 得到如图3–4所示的仿真结果.在同样的控制器(47)作用下,系统状态渐近收敛至原点,这与理论分析的结果相一致.

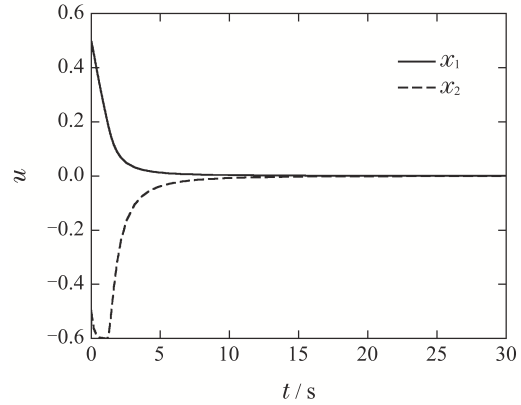


图3 $p_1 = \frac{7}{5}$ 时闭环系统(46)–(47)的状态响应曲线

Fig. 3 State trajectories of the closed-loop systems (46)–(47) with $p_1 = \frac{7}{5}$

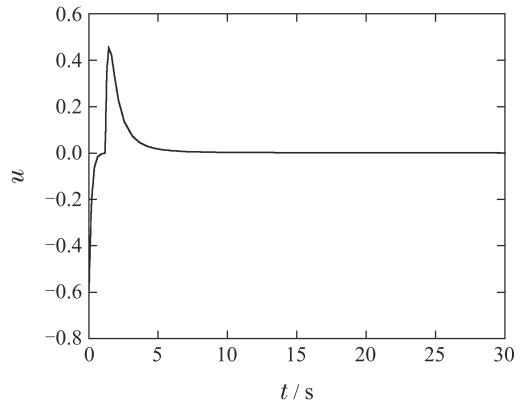


图4 $p_1 = \frac{7}{5}$ 时闭环系统(46)–(47)的控制曲线

Fig. 4 Control trajectory of the closed-loop systems (46)–(47) with $p_1 = \frac{7}{5}$

6 结论

本文基于Lyapunov稳定性理论,给出了一种嵌套饱和控制器的设计方法.只要系统不确定性能限定在指定范围内,该控制器能够全局镇定一类上三角非线性系统.与现有结果对比,本文的创新点体现在:1)考虑由于建模不确定性引发的系统幂指数未知的情况,只利用已知的上下界设计出全局镇定控制器,同时具有一定的鲁棒性;2)除此之外,系统中含有更多的不确定非线性函数,从而能够涵盖一类更广的非线性系统;3)与已有的齐次控制器^[15]相比,设计的线性控制器具有更简单的结构,便于在实际工程中的应用.

参考文献:

- [1] SUN Zongyao, LIU Yungang. Adaptive stabilizing control for a class of high-order nonlinear uncertain systems. *Control Theory & Applications*, 2008, 30(2): 229 – 232.
(孙宗耀, 刘允刚. 一类高阶非线性不确定系统自适应稳定控制. 控制理论与应用, 2008, 30(2): 229 – 232.)
- [2] JIANG P, WOO P Y, UNBEHAUEN R. Iterative learning control for manipulator trajectory tracking without any control singularity. *Robotica*, 2002, 20(2): 149 – 158.
- [3] YU M, YE X, QI D. Repetitive learning control for triangular systems with unknown control directions. *IET Control Theory and Applications*, 2011, 5(17): 2045 – 2051.
- [4] NUSSBAUM R D. Some remarks on a conjecture in parameter adaptive control. *Systems & Control Letters*, 1983, 3(5): 201 – 210.
- [5] LEI H, LIN W. Universal adaptive control of nonlinear systems with unknown growth rate by output feedback. *Automatica*, 2006, 42(10): 1783 – 1789.
- [6] GUAN W. Adaptive output feedback control for a class of uncertain nonlinear systems with unknown time delays. *International Journal of Systems Science*, 2012, 43(4): 682 – 690.
- [7] ZHAI J, ZHA W. Global adaptive output feedback control for a class of nonlinear time-delay systems. *ISA Transactions*, 2014, 53(1): 2 – 9.
- [8] ZHA W, ZHAI J, FEI S. Adaptive output feedback control for a class of uncertain stochastic nonlinear systems with unknown time-delays. *Asian Journal of Control*, 2015, 17(6): 2354 – 2362.
- [9] ZHA W, QIAN C, ZHAI J. Robust control for a class of high-order uncertain nonlinear systems via measurement feedback. *International Journal of Control*, 2019, 92(6): 1393 – 1400.
- [10] SU Z, QIAN C. Interval homogeneity-based control for a class of nonlinear systems with unknown power drifts. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(3): 1445 – 1450.
- [11] CHEN C, QIAN C, LIN X, et al. Smooth output feedback stabilization for a class of nonlinear systems with time-varying powers. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017, 27(7), DOI: 10.1002/rnc.3826.
- [12] TEEL A R. A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(9): 1256 – 1270.
- [13] MAZENC F, PRALY L. Adding integrations, saturated controls, and stabilization for feedforward systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(11): 1559 – 1678.
- [14] TSINIAS J, TZAMTZI M P. An explicit formula of bounded feedback stabilizers for feedforward systems. *Systems & Control Letters*, 2001, 43(4): 247 – 261.
- [15] DING S, QIAN C, LI S, et al. Global stabilization of a class of upper-triangular systems with unbounded or uncontrollable linearizations. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, 21(3): 271 – 294.
- [16] LAN Q, ZHANG C, LI S. Global decentralised stabilization for a class of uncertain large-scale high-order upper-triangular nonlinear systems. *International Journal of Systems Science*, 2017, 48(6): 1123 – 1135.
- [17] ZHANG X, HUANG X, LU H. Uncertainty observer-based robust tracking control for high-order nonlinear systems using forwarding technique. *International Journal of Control*, 2017, 90(12): 2641 – 2654.
- [18] QIAN C, LIN W. Homogeneity with incremental degrees and global stabilization of a class of high-order upper-triangular systems. *International Journal of Control*, 2012, 85(12): 1851 – 1864.
- [19] TIAN W, QIAN C, DU H. A generalised homogeneous solution for global stabilisation of a class of non-smooth upper-triangular systems. *International Journal of Control*, 2014, 87(5): 951 – 963.
- [20] QIAN C, LIN W. Non-Lipschitz continuous stabilizers for nonlinear systems with uncontrollable unstable linearization. *Systems & Control Letters*, 2001, 42(3): 185 – 200.
- [21] KHALIL H K. *Nonlinear Systems*. 3rd edition. New York: Prentice Hall, 2002.

附录 引理3的证明

证 1) 首先证明第 1 个不等式成立. 由假设 3 可知, 当 $|x_j| \leq \epsilon(1 + \frac{\beta_{j-1}}{\beta_{j-2}})$, $j = i + 1, \dots, n$, 有 $i = 1, \dots, n - 1$,

$$|\phi_i(\cdot)| \leq \rho \epsilon^{q_i} (|1 + \frac{\beta_i}{\beta_{i-1}}|^{q_i} + \dots + |\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}|^{q_i}). \quad (A1)$$

此外, 由式(20)可知 $|u| \leq \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} \epsilon$, 从而

$$|\phi_n(\cdot)| \leq \rho \epsilon^{q_n} |\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}|^{q_n}. \quad (A2)$$

由于 $q_i \geq p_i$, 则存在充分小的 ϵ_1 , 使得当 $0 < \epsilon \leq \epsilon_1 < 1$ 时,

$$d \epsilon^{q_i - p_i} (|1 + \frac{\beta_i}{\beta_{i-1}}|^{q_i} + \dots + |\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}|^{q_i}) \leq 1$$

以及 $d \epsilon^{q_n - 1} |\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}|^{q_n} \leq 1$ 成立, 因此可得 $|\phi_i(\cdot)| \leq \epsilon^{p_i}$, $i = 1, \dots, n$.

2) 利用数学归纳法迭代地证明第 2 个不等式.

步骤 1 对于 $i = 1$, 由解的连续性可知在 $[\underline{t}, \bar{t}]$ 这一时间段内, 存在时间序列 $t_k (k = 1, \dots, N)$, 使得 $|x_1(t_k)| = \epsilon$. 令 $t_0 := \underline{t}, t_{N+1} := \bar{t}$, 可得

$$|u_1(\bar{t}) - u_1(\underline{t})| \leq \sum_{k=0}^N |u_1(t_{k+1}) - u_1(t_k)|. \quad (A3)$$

若 $\forall t \in [t_k, t_{k+1}]$, $|x_1(t)| \geq \epsilon$, 则 $x_1(t_k)$ 和 $x_1(t_{k+1})$ 同号, 即 $x_1(t_k) \geq \epsilon, x_1(t_{k+1}) \geq \epsilon$ 或 $x_1(t_k) \leq -\epsilon, x_1(t_{k+1}) \leq -\epsilon$. 因此由 $u_1(\cdot)$ 的定义知 $|u_1(t_{k+1}) - u_1(t_k)| = 0$.

若 $\forall t \in [t_k, t_{k+1}]$, $|x_1(t)| \leq \epsilon$, 则当 $|x_j| \leq \epsilon(1 + \frac{\beta_{j-1}}{\beta_{j-2}})$, $j = 2, \dots, n$ 时, 有

$$\begin{aligned} |u_1(t_{k+1}) - u_1(t_k)| &= \\ \beta_1 |x_1(t_{k+1}) - x_1(t_k)| &\leq \\ \beta_1 \int_{t_k}^{t_{k+1}} |d_1(\cdot) x_2^{p_1}(s) + \phi_1(\cdot)| ds &\leq \\ \beta_1 \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\bar{d}_1 \epsilon^{p_1} (1 + \beta_1)^{p_1} + \epsilon^{p_1}| ds &\leq \\ \beta_1 \epsilon^{p_1} (\bar{d}_1 (1 + \beta_1)^{p_1} + 1) (t_{k+1} - t_k). &\quad (A4) \end{aligned}$$

综合两种情况可知, 当 $|x_j| \leq \epsilon(1 + \frac{\beta_{j-1}}{\beta_{j-2}})$, $j = 2, \dots, n$ 时,

$$|u_1(\bar{t}) - u_1(\underline{t})| \leq \epsilon^{p_1} \alpha_1(\cdot) (\bar{t} - \underline{t}), \quad (A5)$$

其中 $\alpha_1(\cdot) = \beta_1 (\bar{d}_1 (1 + \beta_1)^{p_1} + 1)$.

步骤 i 假设在 $|x_j| \leq \epsilon(1 + \frac{\beta_{j-1}}{\beta_{j-2}})$, $j = i, \dots, n$ 的条件下, $|u_{i-1}(\bar{t}) - u_{i-1}(\underline{t})| \leq \epsilon^{p_{i-1}} \alpha_{i-1}(\cdot) (\bar{t} - \underline{t})$, $\forall \bar{t} \geq \underline{t}$ 成立. 接下来证明该结论对第 i 步也成立.

类似于步骤1可知,对于任意的时间段 $[\underline{t}, \bar{t}]$,存在时刻 t_k , $k = 1, \dots, N$,使得 $|x_i(t_k) - u_{i-1}(t_k)| = \epsilon$. 则

$$|u_i(\bar{t}) - u_i(\underline{t})| \leq \sum_{k=0}^N |u_i(t_{k+1}) - u_i(t_k)|, \quad (\text{A6})$$

其中: $t_0 := \underline{t}$, $t_{N+1} := \bar{t}$. 同样地,只需要考虑 $\forall t \in [t_k, t_{k+1}]$, $|x_i(t) - u_{i-1}(t)| \leq \epsilon$ 这种情况. 类似于式(A4),可得

$$\begin{aligned} |u_i(t_{k+1}) - u_i(t_k)| &= \\ \frac{\beta_i}{\beta_{i-1}} |x_i(t_{k+1}) - u_{i-1}(t_{k+1}) - x_i(t_k) + u_{i-1}(t_k)| &\leq \\ \frac{\beta_i}{\beta_{i-1}} |x_i(t_{k+1}) - x_i(t_k)| + \frac{\beta_i}{\beta_{i-1}} |u_{i-1}(t_{k+1}) - u_{i-1}(t_k)|. & \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

当 $|x_j| \leq \epsilon(1 + \frac{\beta_{j-1}}{\beta_{j-2}})$, $j = i+1, \dots, n$ 时,有

$$\begin{aligned} |x_i(t_{k+1}) - x_i(t_k)| &\leq \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} |d_i(\cdot)x_{i+1}^{p_i}(s) + \phi_i(\cdot)| ds &\leq \\ \epsilon^{p_i} (\bar{d}_i(1 + \frac{\beta_i}{\beta_{i-1}})^{p_i} + 1)(t_{k+1} - t_k). & \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

根据条件 $|x_i(t) - u_{i-1}(t)| \leq \epsilon$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$ 和 u_{i-1} 的定

义可知 $|x_i| \leq (1 + \frac{\beta_{i-1}}{\beta_{i-2}})\epsilon$,从而可得

$$|u_{i-1}(t_{k+1}) - u_{i-1}(t_k)| \leq \epsilon^{p_i} \alpha_{i-1}(\cdot)(t_{k+1} - t_k). \quad (\text{A9})$$

结合式(A6)-(A9),可得

$$|u_i(\bar{t}) - u_i(\underline{t})| \leq \epsilon^{p_i} \alpha_i(\cdot) \sum_{k=0}^N (t_{k+1} - t_k) \leq \epsilon^{p_i} \alpha_i(\cdot)(\bar{t} - \underline{t}), \quad (\text{A10})$$

其中

$$\alpha_i(\cdot) = \frac{\beta_i}{\beta_{i-1}} (\bar{d}_i(1 + \frac{\beta_i}{\beta_{i-1}})^{b_i} + 1 + \alpha_{i-1}(\cdot)).$$

因此,根据数学归纳法可证明第2个不等式成立. 证毕.

作者简介:

查雯婷 讲师,目前研究方向为非线性系统控制和电力系统预测控制, E-mail: wentingzha@126.com;

翟军勇 教授,目前研究方向为非线性系统的非光滑控制和切换系统的镇定与跟踪, E-mail: jyzhai@seu.edu.cn;

梁营玉 副教授,目前研究方向为柔性交直流输电技术和并网逆变器控制策略, E-mail: liangyingyu2013@163.com.