

## 系统直和博弈模型下的合作演化

李亚昆, 冯俊娥<sup>†</sup>

(山东大学 数学学院, 山东 济南 250100)

**摘要:** 演化博弈论是生物进化论与博弈论结合产生的理论, 已成为研究合作演化行为的有力工具. 本文研究了基于系统直和博弈模型下的合作演化行为. 首先, 利用复制者方程分析了双人双策略及三策略对称博弈的演化动力学过程. 然后, 以石头剪刀布模型和雪堆模型为基础, 采用矩阵直和构建系统直和博弈模型, 并将所构造的直和矩阵转化为含参数的系统总支付矩阵. 随后, 说明了这种方法可推广到  $n$  个博弈的情形. 最后, 利用 MATLAB 对系统直和博弈模型进行仿真模拟, 从系统整体的角度分析合作演化. 仿真结果表明, 混合之后的系统直和博弈较单一博弈而言, 合作策略的占比明显增加, 且整个系统稳定性更好. 这种合作演化机制呈现了全局互惠.

**关键词:** 演化博弈论; 合作演化; 复制者方程; 系统直和博弈模型; 全局互惠

**引用格式:** 李亚昆, 冯俊娥. 系统直和博弈模型下的合作演化. 控制理论与应用, 2020, 37(8): 1717–1726

DOI: 10.7641/CTA.2020.90924

## Cooperative evolution under the direct sum game model

LI Ya-kun, FENG Jun-e<sup>†</sup>

(School of Mathematics, Shandong University, Jinan Shandong 250100, China)

**Abstract:** Evolutionary game theory is a theory produced by the combination of biological evolution theory and game theory, which has become a powerful tool for the study of cooperative evolution behavior. This paper studies the cooperative evolution behavior based on the direct sum game model. Firstly, based on replicator equation, the evolutionary dynamic process of two-person two strategies and three strategies symmetric games is analyzed. Secondly, based on the rock-paper-scissors model and snowdrift model, the direct sum game model is constructed by the direct sum of matrices, and the corresponding matrix is transformed into the total payment matrix with parameters. Then a detailed analysis illustrates this method can be extended to the case of  $n$  games. Finally, the direct sum game model is simulated by MATLAB, and the evolution of cooperation is analyzed from a holistic perspective. The simulation results show that the direct sum game has two characteristics: the proportion of cooperative strategy increases obviously and the stability of the whole system is better. This evolution mechanism of cooperation presents global reciprocity.

**Key words:** evolutionary game theory; evolution of cooperation; replicator equation; direct sum game model; global reciprocity

**Citation:** LI Yakun, FENG Jun'e. Cooperative evolution under the direct sum game model. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(8): 1717–1726

### 1 引言

演化博弈论是将生物进化论与经典博弈论结合产生的理论, 是博弈论中新的发展方向, 其已经成为研究合作演化行为的有力工具. 达尔文在《物种起源》一书中提到: 动物的本能是趋利避害. 在博弈的过程中, 个体会为了最大化自身的利益而选择背叛策略. 从这个层面上讲, 合作行为似乎是不可能存在的, 然而合作现象却处处可见, 例如蝙蝠之间的喂食行为,

企业乃至国家的战略联盟等等. 这显然与达尔文的思想之间存在矛盾, 因此探究合作演化行为对目前世界上很多现实问题都具有深刻的意义.

演化博弈论主要研究种群演化的动态过程, 集中分析演化稳定策略<sup>[1]</sup>和复制者动力学, 这两个核心问题分别描述了演化稳定状态及趋于稳定的收敛过程. 1973年, Smith和Price在“*The Logic of Animal Conflict*”中提出演化稳定策略, 标志着演化博弈理论正

收稿日期: 2019–11–05; 录用日期: 2020–04–23.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: fengjune@sdu.edu.cn; Tel.: +86 15966683065.

本文责任编辑: 王龙.

国家自然科学基金项目(61773371, 61877036), 山东省自然科学基金项目(ZR2019MF002)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61773371, 61877036) and the National Natural Science Foundation of Shandong Province (ZR2019MF002).

式诞生. 复制者动力学是由Taylor和Jonker在1978年提出的, 他们给出了研究种群演化的复制者方程<sup>[2]</sup>. 这两项工作为合作演化的研究提供了理论基础. 随后学者们以演化博弈论为基础对合作演化行为做了大量的研究. 从合作机制上囊括了如下情形: 亲缘选择<sup>[3]</sup>、直接互惠<sup>[4]</sup>、间接互惠<sup>[5]</sup>、空间互惠<sup>[6]</sup>、群组选择<sup>[7]</sup>等等. 除此之外, 文献[8]研究了共演化动力学对合作演化的影响. 文献[9]中建立了多人雪堆模型, 对多人合作的演化动力学进行了研究. 文献[10]研究了复杂系统中引入激励机制对合作演化行为的影响. 研究发现, 正激励可以抑制负激励的负面影响, 从而使合作行为涌现.

近些年来, 一种新兴的矩阵方法—矩阵半张量积, 广泛运用于博弈论研究中, 已成为研究博弈控制论这个交叉领域有力的工具<sup>[11]</sup>. 文献[12]指出利用半张量积可将博弈论中一些重要的公式定理转化为代数形式, 从而得出一些有趣的结果. 在这个代数框架下, 文献[13]研究了对称博弈的空间内部结构. 文献[14]给出了模糊关系不等式具体的求解算法. 文献[15]将该代数框架推广到具有破产机制的演化博弈, 并研究其演化动力学行为. 文献[16]研究了一类具有短视最优规则的网络演化博弈的动力学行为, 并给出了构造博弈代数方程的算法. 文献[17]给出了实现策略一致的最小控制问题的充要条件. 文献[18–19]分别讨论了竞争扩散博弈的纳什均衡和动态演化博弈的策略优化问题. 文献[20–21]则分别给出了判断有序势博弈的算法和Banzhaf值的等价代数形式. 文献[22]对矩阵半张量积在有限博弈中的应用做了较系统的介绍, 它本质上与多值逻辑<sup>[23]</sup>类似. 这些结果表明, 矩阵半张量积在研究演化博弈的动力学以及策略优化问题等方面有着重要的作用.

纵观之前的工作, 大多数都是从局部的角度来研究合作演化问题, 仅仅考虑了一种博弈方式. 然而现实世界纷繁复杂, 各种事物之间紧密联系. 每个个体都会参与多种活动, 并且在不同的活动中获得不同的收益. 个体在参加博弈时, 在每种博弈下获得最大收益时, 整体收益可能并不是最优的. 参加博弈者不仅仅只需要考虑在这一次活动中获得的收益, 而是要从整体来看个体自身所获得的总收益. 这就要求从全局的角度来研究合作演化问题.

本文讨论以石头剪刀布和雪堆模型为基础, 采用矩阵直和的形式构建系统直和博弈模型<sup>[24]</sup>. 此模型通过引入参数, 增加了相同博弈模型支付矩阵的多样化. 随后将其推广到了 $n$ 个博弈方式, 使模型的适应性更广, 更加具有现实意义. 最后根据博弈过程, 将直和矩阵转化为含参数的系统总支付矩阵. 利用MATLAB对系统直和博弈模型进行仿真模拟, 从全局的角度即系统整体对合作演化进行研究.

本文的难点在于将直和矩阵转化为含参数的系统总支付矩阵. 在系统直和博弈模型的推广中, 随着博弈方式及策略数量的增加, 系统总支付矩阵的参数及维数均增加. 本文中系统总支付矩阵的维数代表种群中个体类型的数目, 维数增加即种群中个体类型增加, 从而增大了仿真模拟的难度, 使模型的求解分析更为复杂. 因此准确的确定系统总支付矩阵是本文的关键.

## 2 预备知识

1978年, Taylor和Jonker提出了复制者动力学的概念, 将动态演化过程与演化博弈论有效结合起来, 进一步丰富了演化博弈论的内涵. 复制者动力学是对种群策略演化过程的宏观分析, 是博弈论动力学的连续确定方程. 复制者方程如下所示:

$$\dot{X}_i = X_i(e_i A X^T - X A X^T), \quad (1)$$

其中:  $X_i$ 为策略类型 $i$ 的比例;  $A$ 为支付矩阵;  $e_i$ 为第 $i$ 位是1、其余均为0的行向量;  $e_i A X^T$ 为采用策略类型 $i$ 的总收益;  $X A X^T$ 为种群的平均收益.

### 2.1 基于双人双策略对称博弈的种群演化动力学

文献[25]基于群体结构和多人交互作用等影响因素对种群的合作演化进行了深入的研究. 本节首先以双人双策略对称博弈为例, 运用复制者方程研究种群的演化动力学过程. 每个个体都有两种策略: 合作策略C和背叛策略D. 其中: 若双方都选择C时, 二者收益相同均为 $R$ ; 若有一方选择C而另一方选择D, 则选择C的收益为 $S$ , 而选择D收益为 $T$ ; 若双方都选择D时, 二者收益相同均为 $P$ . 双人双策略对称博弈的支付单矩阵如表1所示.

表1 双人双策略对称博弈的支付单矩阵

Table 1 Payment order matrix of two-person two strategies symmetric game

	C	D
C	R	S
D	T	P

假设种群中选择C策略个体的比例为 $x$ , 选择D策略个体的比例为 $y$ . 此时 $X = [x \ y]$ , 因此利用复制者方程得到下式:

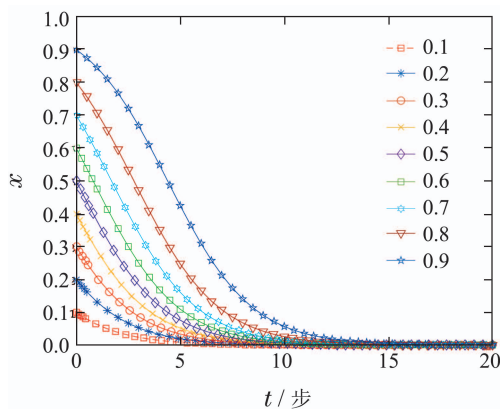
$$\begin{cases} \dot{x} = x[(1 \ 0) \begin{pmatrix} R & S \\ T & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (x \ y) \begin{pmatrix} R & S \\ T & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}], \\ \dot{y} = y[(0 \ 1) \begin{pmatrix} R & S \\ T & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (x \ y) \begin{pmatrix} R & S \\ T & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}]. \end{cases} \quad (2)$$

结合实际, 可知 $x + y = 1$ . 由此减少变量, 得到关

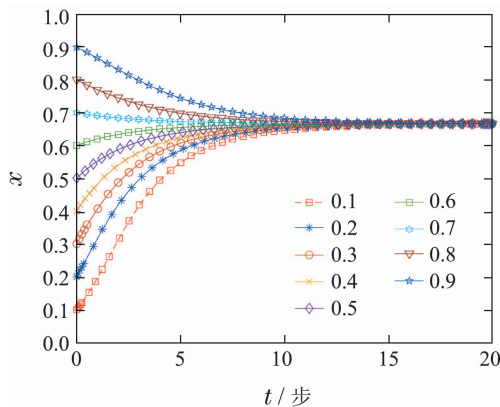
于  $x$  的动力学微分方程, 从而为研究不同参数下  $x$  的动态演化过程提供了动力学依据.

$$\dot{x} = x(1-x)[(R+P-S-T)x + S-P]. \quad (3)$$

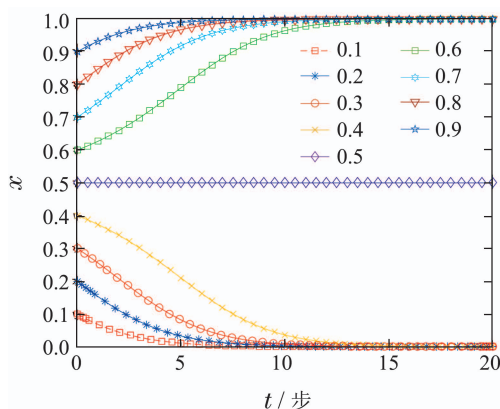
不同的参数代表了不同的博弈模型. 参数不同, 动力学特征不同, 动态演化过程也不同. 接下来为了进一步分析在不同参数取值下策略选择均衡点的演化过程, 利用 MATLAB 进行仿真模拟, 得到图 1 的 4 条演化轨线, 并进行相应的分析.



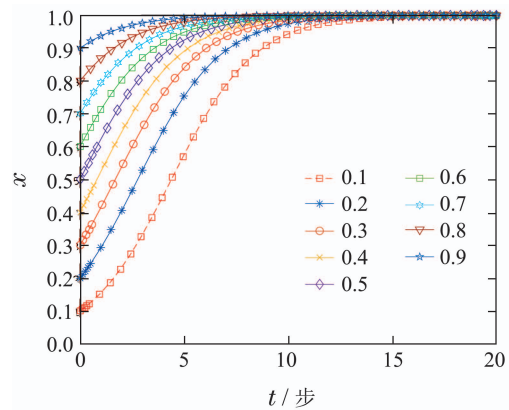
(a)  $R = 1, S = 0, T = 1.5, P = 0.5$



(b)  $R = 1.5, S = 1, T = 2, P = 0$



(c)  $R = 1.5, S = 0, T = 1, P = 0.5$



(d)  $R = 1.5, S = 0.5, T = 1, P = 0$

图 1 不同参数下  $X$  的动态演化图

Fig. 1 The dynamic evolution of  $X$  under different parameters

1) 给定参数  $R=1, S=0, T=1.5, P=0.5$ , 满足  $T > R > P > S$ , 代表博弈模型为囚徒困境等. 图 1(a) 展现了在不同初值下, 演化轨线随着时间的推移向平衡点  $x = 0$  趋近的过程, 因此参数满足上述关系的演化稳定策略为  $x^* = 0$ , 表示种群在演化的过程中, 不论初值的大小, D 策略总是作为优势策略逐渐增加, C 策略逐渐减少, 直至为 0. 并且  $x$  的初值越大, 减少的速度越快.

2) 给定参数  $R=1.5, S=1, T=2, P=0$ , 满足  $T > R > S > P$ , 代表博弈模型为雪堆模型、鹰鸽模型等. 图 1(b) 展现了在不同初值下, 演化轨线随着时间的推移从两头向平衡点  $x^* = \frac{P-S}{R+P-S-T} = \frac{2}{3}$  趋近的过程, 因此参数满足上述关系的演化稳定策略为  $x^* = \frac{P-S}{R+P-S-T}$ , 表示种群在演化的过程中, 若初值  $x < x^*$ , 则  $x$  不断增加, 直至达到平衡点. 反之  $x$  不断减少, 直至达到平衡点. 并且初值与平衡点差距越大, 变化速度越快, 最终的稳态是两种策略以一定的比例共存.

3) 给定参数  $R=1.5, S=0, T=1, P=0.5$ , 满足  $R > T > P > S$ , 代表博弈模型为猎鹿博弈、性别大战等. 图 1(c) 展现了在不同初值下, 演化轨线随着时间的推移向两头  $x = 0, x = 1$  趋近的过程, 因此参数满足数量关系的演化稳定策略为  $x^* = 0, x^* = 1$ , 表示种群在演化的过程中, 不同的初值会呈现出不同的演化轨迹, 在种群中占比更高的策略随着时间的推移会变成优势策略, 直至为 1.

4) 给定参数  $R=1.5, S=0.5, T=1, P=0$ , 满足  $R > T > S > P$ . 图 1(d) 展现了在不同初值下, 演化轨线随着时间的推移向平衡点  $x = 1$  趋近的过程, 因此参数满足上述关系的演化稳定策略为  $x^* = 1$ , 表示种群在演化的过程中, 不论初值的大小, C 策略总是作为优势策略逐渐增加, D 策略逐渐减少, 直至为 0. 并

且 $x$ 的初值越小, 增加的速度越快.

### 2.2 基于双人三策略对称博弈的种群演化动力学

在研究种群演化动力学时, 人们发现双人双策略的博弈有时候并不能解释一些自然现象, 例如斑点蜥蜴循环捕食和大肠杆菌3种亚种循环竞争制约的现象. 在现实生活中, 两个个体进行策略选择时, 不仅仅包含合作与背叛两种策略, 还有的个体会选择消极合作等中立态度. 因此拓展现有的博弈模型具有现实意义. Hauert等人<sup>[26-27]</sup>提出了拓展的囚徒困境模型, 即在囚徒困境中引入第3种策略E. 研究发现引入策略之后, 此时的优势策略不再是背叛策略, 而是3种策略循环占优, 类似于常见的“石头剪刀布”博弈. “石头剪刀布”博弈中呈现出来的循环占优现象是维持生物多样性的重要机制.

下面以“石头剪刀布”博弈为例, 研究双人三策略对称博弈的演化动力学. 研究方法与第2.1节相同. 假设选择C策略的比例为 $p$ , 选择D策略的比例为 $q$ , 选择E策略的比例为 $r$ . 基于复制者方程可得下式:

$$\begin{cases} \dot{p} = p[(1 \ 0 \ 0)B \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} - (p \ q \ r)B \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}], \\ \dot{q} = q[(0 \ 1 \ 0)B \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} - (p \ q \ r)B \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}], \\ \dot{r} = r[(0 \ 0 \ 1)B \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} - (p \ q \ r)B \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}], \end{cases} \quad (4)$$

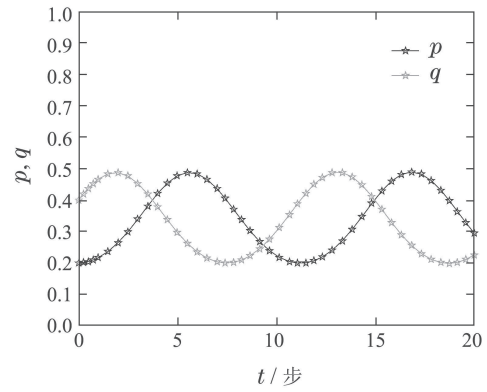
其中 $B$ 为石头剪刀布博弈的单一支付矩阵:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

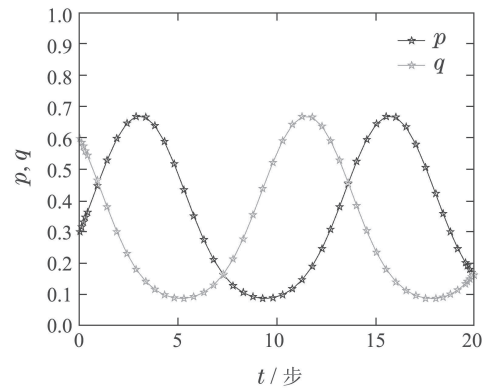
由于 $p + q + r = 1$ , 由此减少变量, 得到关于 $p, q$ 的动力学微分方程, 从而为研究不同参数下 $p, q$ 的动态演化过程提供了动力学依据. 减少参数化简为

$$\begin{cases} \dot{p} = p(2q + p - 1), \\ \dot{q} = q(-2p - q + 1). \end{cases} \quad (6)$$

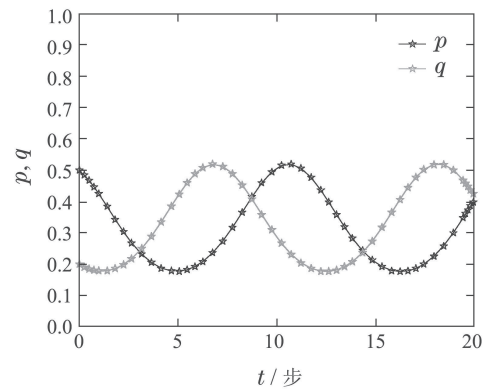
初值不同, 动态演化过程也不同. 接下来为了分析在不同初值下策略选择均衡点的演化过程, 本文利用MATLAB进行仿真模拟, 得到图2的4条演化曲线, 发现在不同的初值下, 没有哪一种策略总是占据主导地位, 3种策略是循环占优、互相制约的. 这种现象是维持生物多样性的基础, 从而使得整个系统更加稳定. 不仅如此, 通过对比发现, 在演化开始前, 3种策略的选择概率越是接近, 在演化过程中的波动越小. 由此可知, 在其他博弈模型可以引入更多的策略, 从而更好地解释合作行为的演化过程.



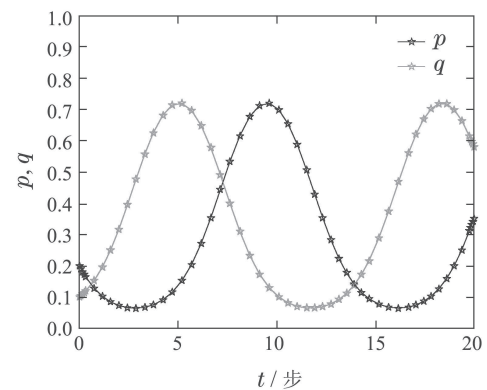
(a)  $p = 0.2, q = 0.4$



(b)  $p = 0.3, q = 0.6$



(c)  $p = 0.5, q = 0.2$



(d)  $p = 0.2, q = 0.1$

图2 石头剪刀布博弈中 $X$ 的动态演化图  
Fig. 2 The dynamic evolution of  $X$  in rock-paper-scissors game



### 3 模型的建立与推广

博弈模型多种多样, 反映了现实中不同类型个体相互作用的多样性. 在现实生活中, 每个个体都会参加多个活动, 即参加多种博弈. 这就要求从全局的角度来研究系统整体的收益, 更好地为每次策略选择提供依据, 因此研究系统直和博弈模型有重要的意义. 接下来以石头剪刀布博弈模型和雪堆博弈模型为例, 首先构建单参数的支付矩阵, 然后采用矩阵直和的形式建立系统直和博弈模型.

#### 3.1 构建单参数的支付矩阵

双策略博弈的单支付矩阵包含 4 个参数, 三策略博弈则包含 9 个参数, 策略增加, 参数也随之增加. 若基于目前的支付矩阵来构建系统直和博弈模型, 就会产生太多参数, 大大提高了分析的难度. 因此需要构建单参数支付矩阵便于分析.

Nowak 和 May 在文献 [28] 中提出将收益矩阵进行归一化的方法. 归一化是指将不同变化范围的值映射到相同的固定范围中, 选定的范围是 [0, 1] 或 [-1, 1]. 本文选定范围为 [-1, 1]. 构建单参数的支付矩阵指通过归一化的方法将原来含有多个参数的支付矩阵转换为仅含一个参数. 这个参数代表背叛诱惑因子, 取值范围为 [0, 1]. 单参数支付矩阵的构建原则是不改变策略收益之间的数量关系, 能够较好的表征模型的演化行为, 从而不影响实验结果.

##### 1) 石头剪刀布博弈模型<sup>[29]</sup>.

石头剪刀布博弈的单参数支付矩阵可以表示为

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

在上式中, 参数  $\alpha \in [0, 1]$ , 表示在赢得博弈时获得的收益. 参数不同, 支付矩阵不同, 实现了在相同博弈模型下支付矩阵的多样性, 使其更有研究意义. 通过调整参数值, 进一步深入研究演化过程的变化.

##### 2) 雪堆博弈.

对于雪堆博弈, 甲、乙两个人开车相向而行, 途中被一个雪堆挡住了回家的去路. 假设道路通畅后的收益为  $b$ , 铲雪需要付出的劳动量为  $c$ . 因此雪堆博弈的收益矩阵可以表示为

$$\begin{pmatrix} b - c/2 & b - c \\ b & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

将上面的收益矩阵进行归一化变换后, 表示为

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \theta \\ 1 + \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

在上式中, 参数  $\theta \in [0, 1]$ . 单参数支付矩阵满足雪堆博弈模型中对应的大小关系:  $T > R > S > P$ . 其中  $\theta = c/(2b - c)$ , 是雪堆模型收益矩阵中唯一的参

数, 代表了个体的付出和收益的比率.

#### 3.2 建立系统直和博弈模型

现在考虑一个系统, 假设每个个体参与两种博弈, 分别是石头剪刀布博弈和雪堆博弈. 当系统中的个体与其他个体之间进行博弈时, 第 1 步选择博弈类型. 第 2 步选择策略来进行第 1 步中选择的博弈类型.

在一个两两互相作用的博弈中, 通过引入参数来表示第 1 步中选择博弈方式的概率. 假设每个个体选择进行石头剪刀布博弈的概率为  $r_1$ , 选择进行雪堆博弈的概率为  $r_2$ , 并且  $r_1 + r_2 = 1$ . 引入参数之后构建系统直和博弈模型.

接下来通过矩阵直和的方法构建系统直和博弈模型的直和矩阵. 直和矩阵如下所示:

$$H = H_1 \oplus H_2 = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & -\alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 - \theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

其中: 直和矩阵实际上为分块矩阵, 对角线分别为石头剪刀布博弈和雪堆博弈的支付矩阵  $H_1, H_2$ , 另一条对角线为子矩阵  $0$ . 由于选择不同的博弈方式的个体是不能进行相互作用的, 因此在直和矩阵中用子矩阵  $0$  来表示.

石头剪刀布博弈有 3 种可供选择的策略, 分别是 C 策略、D 策略、E 策略; 雪堆博弈有两种策略, 分别是 c 策略、d 策略. 依据上述建立的系统直和博弈模型可知, 系统直和博弈模型中的个体共分为 6 种类型, 分别记为  $C_c, C_d, D_c, D_d, E_c, E_d$ . 其中:  $C_d$  是指这种类型的个体在石头剪刀布博弈中采用 C 策略, 在雪堆博弈中采用 d 策略. 其他 5 种类型的符号含义类似. 因此这 6 种策略的总支付矩阵如下所示:

$$A = (A_1 \ A_2 \ A_3), \quad (11)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} r_2 & r_2(1 - \theta) \\ r_2(1 + \theta) & 0 \\ -r_1\alpha + r_2 & -r_1\alpha + r_2(1 - \theta) \\ -r_1\alpha + r_2(1 + \theta) & -r_1\alpha \\ r_1\alpha + r_2 & r_1\alpha + r_2(1 - \theta) \\ r_1\alpha + r_2(1 + \theta) & r_1\alpha \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} r_1\alpha + r_2 & r_1\alpha + r_2(1 - \theta) \\ r_1\alpha + r_2(1 + \theta) & r_1\alpha \\ r_2 & r_2(1 - \theta) \\ r_2(1 + \theta) & 0 \\ -r_1\alpha + r_2 & -r_1\alpha + r_2(1 - \theta) \\ -r_1\alpha + r_2(1 + \theta) & -r_1\alpha \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -r_1\alpha + r_2 & -r_1\alpha + r_2(1 - \theta) \\ -r_1\alpha + r_2(1 + \theta) & -r_1\alpha \\ r_1\alpha + r_2 & r_1\alpha + r_2(1 - \theta) \\ r_1\alpha + r_2(1 + \theta) & r_1\alpha \\ r_2 & r_2(1 - \theta) \\ r_2(1 + \theta) & 0 \end{pmatrix}.$$

6种类型的排列顺序直接影响总支付矩阵中每一个位置所代表的实际含义. 在本文中, 采用的排列顺序是先取定第1种博弈模型的第一种策略, 然后分别遍历第2种博弈模型的所有策略. 遍历完成后, 再取定第1种博弈模型的第2种策略, 依次进行. 因此6种类型的排列顺序依次为Cc, Cd, Dc, Dd, Ec, Ed. 其中 $A_1$ 矩阵中第1行第2列的含义是系统中Cc类型和Cd类型的个体发生博弈时, Cc类型的个体获得的总收益. 其余的含义类似.

### 3.3 系统直和博弈模型的推广

本节基于上述模型的建立过程, 为了使模型的适用范围更广, 现将系统直和博弈模型推广到 $n$ 个博弈方式, 每种博弈方式包含的策略也是任意的.

**定理** 假设 $n$ 个博弈方式的单参数支付矩阵分别为 $H_1, H_2, \dots, H_n$ , 每种博弈方式包含的策略数目分别为 $m_1, m_2, \dots, m_n$ , 个体在选择博弈类型时的概率分别为 $r_1, r_2, \dots, r_n$ . 直和矩阵的维数为 $m$ , 系统直和博弈模型的总支付矩阵的维数为 $M$ . 系统直和博弈模型的总支付矩阵记为 $A_{M \times M}$ :

$$A_{M \times M} = P_1 + P_2 + \dots + P_n, \quad (12)$$

其中:  $H_i = h_{xy}^i, x, y = 1, 2, \dots, m_i, i = 1, 2, \dots, n$ ;  $P_i$ 是分块矩阵, 分块矩阵的块数为 $(\frac{M}{n})^2$ , 每块均为 $\prod_{j=i} m_j$

$G_i = g_{xy}^i, x, y = 1, 2, \dots, m_i, i = 1, 2, \dots, n$ ,  
 $g_{xy}^i = r_i h_{xy}^i, x, y = 1, 2, \dots, m_i, i = 1, 2, \dots, n$ 是方阵, 维数用 $\dim(g_{xy}^i)$ 来表示:

$$\dim(g_{xy}^i) = \begin{cases} \prod_{j=i+1}^n m_j, & i < n, \\ 1, & i = n. \end{cases} \quad (13)$$

分析过程如下所示:

首先利用单参数支付矩阵构建系统直和博弈模型的直和矩阵, 如下所示:

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_n = \begin{pmatrix} H_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H_n \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$H_i = \begin{pmatrix} h_{11}^i & h_{12}^i & \dots & h_{1m_i}^i \\ h_{21}^i & h_{22}^i & \dots & h_{2m_i}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m_i 1}^i & h_{m_i 2}^i & \dots & h_{m_i m_i}^i \end{pmatrix}. \quad (15)$$

接下来令直和矩阵的维数为 $m$ , 系统直和博弈模型的总支付矩阵的维数为 $M$ ,  $m$ 和 $M$ 满足下式:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 + \dots + m_n = m, \\ m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n = M. \end{cases} \quad (16)$$

随后利用直和矩阵求出系统直和博弈模型的总支付矩阵 $A_{M \times M}$ :

$$A_{M \times M} = P_1 + P_2 + \dots + P_n, \quad (17)$$

其中 $P_i$ 是分块矩阵, 分块矩阵的块数为 $(\frac{M}{n})^2$ ,  $\prod_{j=i} m_j$

每块均为 $G_i$ . 设 $G_i$ 中的元素为 $g_{xy}^i$ , 即 $G_i = g_{xy}^i, x, y = 1, 2, \dots, m_i$ . 其中 $g_{xy}^i$ 是方阵, 维数用 $\dim(g_{xy}^i)$ 来表示.

$$P_i = \begin{pmatrix} G_i & G_i & \dots & G_i \\ G_i & G_i & \dots & G_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_i & G_i & \dots & G_i \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$G_i = \begin{pmatrix} g_{11}^i & g_{12}^i & \dots & g_{1m_i}^i \\ g_{21}^i & g_{22}^i & \dots & g_{2m_i}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m_i 1}^i & g_{m_i 2}^i & \dots & g_{m_i m_i}^i \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$g_{xy}^i = \begin{pmatrix} r_i h_{xy}^i & r_i h_{xy}^i & \dots & r_i h_{xy}^i \\ r_i h_{xy}^i & r_i h_{xy}^i & \dots & r_i h_{xy}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_i h_{xy}^i & r_i h_{xy}^i & \dots & r_i h_{xy}^i \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$\dim(g_{xy}^i) = \begin{cases} \prod_{j=i+1}^n m_j, & i < n, \\ 1, & i = n. \end{cases} \quad (21)$$

最后将总支付矩阵 $A_{M \times M}$ 代入复制者方程中, 得到系统中不同类型个体的演化方程.

**注1** 在系统直和博弈模型的推广中, 总支付矩阵的维数 $M$ 即为种群中个体类型的数量.  $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n = M$ 代表种群中个体类型的数量为每种博弈方式的策略数量之积. 因此在第3.2节中, 石头剪刀布博弈有3种策略, 雪堆博弈有两种策略, 所以种群中有6种类型的个体.

**注2** 种群中个体类型的划分标准为在博弈方式中选择的策略. 在第3.2节中, Cd是指这种类型的个体在石头剪刀布博弈中采用C策略, 在雪堆博弈中采用d策略. 先选雪堆博弈, 后选石头剪刀布博弈对结果没有影响, 因此不需要考虑选择博弈类型的顺序.

### 4 模型的求解与分析

本节基于复制者方程给出系统直和博弈模型的总支付矩阵的演化方程, 如下所示:

$$\dot{X}_i = X_i(e_i A X^T - X A X^T), \quad (22)$$

式中:  $X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]$ ,  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  分别表示 6 种类型 Cc, Cd, Dc, Dd, Ec, Ed 在系统中所占的比例, 并且满足  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1$ ;  $A$  为上节得到的系统直和博弈模型的总支付矩阵.

首先假定  $X = [0.2 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.1 \ 0.1]$ , 分别表示系统中 Cc, Cd, Dc, Dd, Ec, Ed 等 6 种类型个体的初始比例为 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.1, 0.1. 其次对其他参数  $\alpha, \theta, r_1, r_2$  设定不同的值, 观察在不同的参数下不同类型个体的演化过程, 从而得出有意义的结论. 图 3 是运行时间步为 1000 的典型模拟结果.

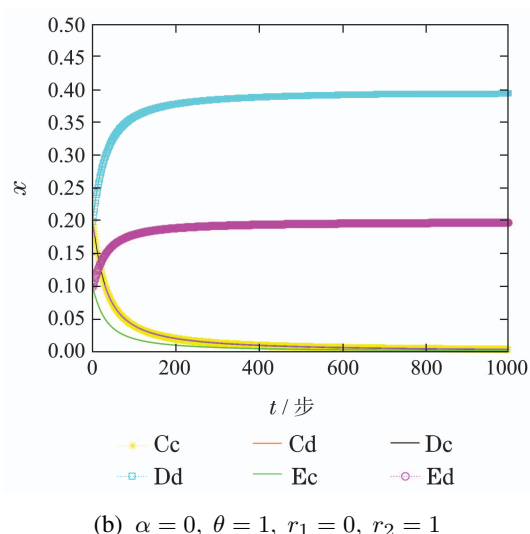
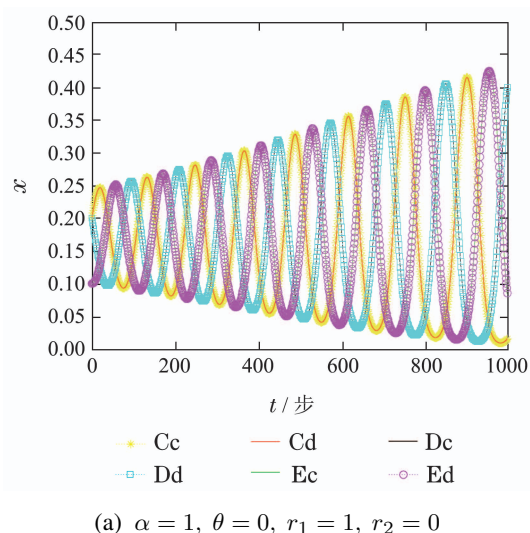


图 3 不同参数下 X 的动态演化

Fig. 3 The dynamic evolution of X under different parameters

图3(a)设定参数 $[\alpha, \theta] = [1, 0]$ ,  $[r_1, r_2] = [1, 0]$ . 实

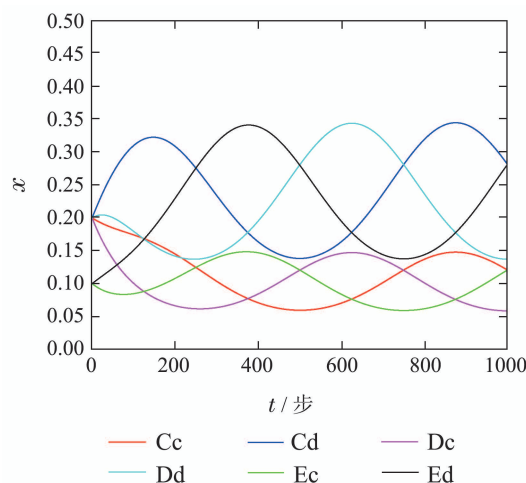
际意义为所有个体均选择了石头剪刀布模型. 由图 3(a)可知: C, D, E 三种策略循环占优, 相互制约, 与上述石头剪刀布博弈的演化动力学研究的结论基本相同.

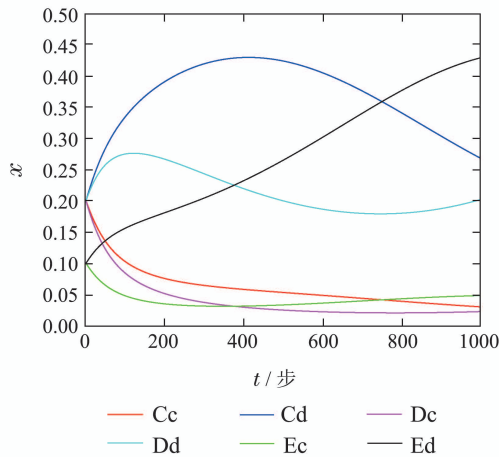
图3(b)设定参数 $[\alpha, \theta] = [0, 1]$ ,  $[r_1, r_2] = [0, 1]$ . 实际意义为所有个体均选择了雪堆模型. 由图3(b)可知: Cd, Dd 和 Ed 三种类型的个体逐渐增加并趋于稳定, Cc, Dc, Ec 则逐渐减少并趋于稳定, 最终 c 策略和 d 策略以一定的比例共存, 且 d 策略的比例更高, 与上述雪堆博弈的演化动力学研究的结论基本相同.

通过图 3 可知, 系统直和博弈模型同样适用于单一博弈模型. 通过控制参数的值来实现系统直和博弈模型单一化.

图4(a)设定参数 $[\alpha, \theta] = [0.3, 0.7]$ ,  $[r_1, r_2] = [0.5, 0.5]$ , 实际意义为选择两种模型的比例均为 0.5, 石头剪刀布模型中赢得比赛的收益为 0.3, 雪堆博弈模型中不下车获得的补偿为 0.7. 图像表明波动幅度不大, 并且在运行 1000 步后与初始值大致相同. 图 4 与图 3 相比即混合之后的系统直和博弈较单一博弈相比, 合作策略的占比明显增加, 且整个系统稳定性更好, 更适于生存. 很好地解释了合作行为广泛存在的现象.

图4(b)设定参数 $[\alpha, \theta] = [0.1, 0.9]$ ,  $[r_1, r_2] = [0.5, 0.5]$ , 实际意义为选择两种模型的比例均为 0.5, 石头剪刀布模型中赢得比赛的收益为 0.1, 雪堆博弈模型中不下车获得的补偿为 0.9. 较图4(a)相比, 该参数下各种类型的个体的比例在运行 1000 步后变化较大, Cc, Dc, Ec 呈下降趋势, 其余类型呈现上升趋势. 这种现象表明在选择模型比例相同的情况下,  $\theta$  占比较大, 因此第 2 种模型占据主导地位. 从整体来看, 合作策略的稳定性有所下降, 更有利于背叛策略的演化. 由此可知  $\alpha$  和  $\theta$  即支付矩阵的变化直接影响系统直和博弈模型中的各个类型个体的演化过程.

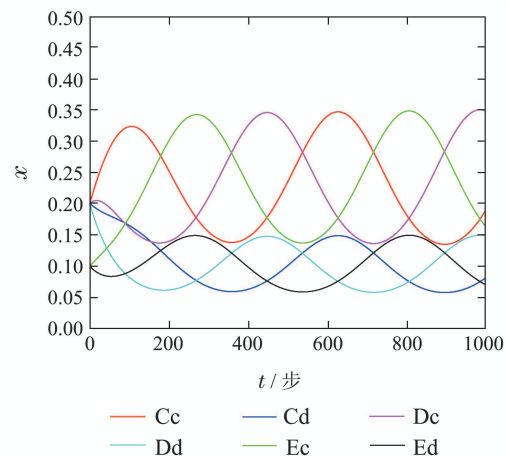




(b)  $\alpha = 0.1, \theta = 0.9, r_1 = 0.5, r_2 = 0.5$

图4 不同参数下X的动态演化

Fig. 4 The dynamic evolution of X under different parameters



(b)  $\alpha = 0.9, \theta = 0.1, r_1 = 0.1, r_2 = 0.9$

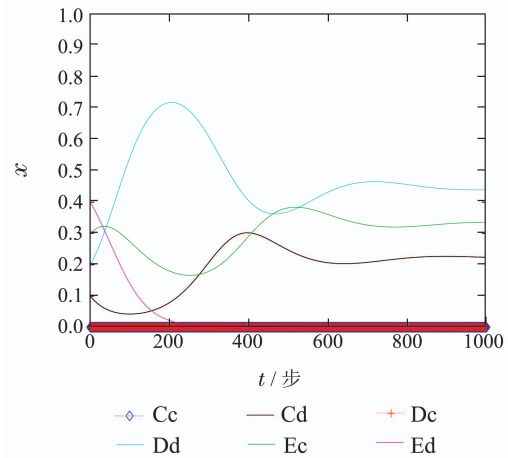
图5 不同参数下X的动态演化图

Fig. 5 The dynamic evolution of X under different parameters

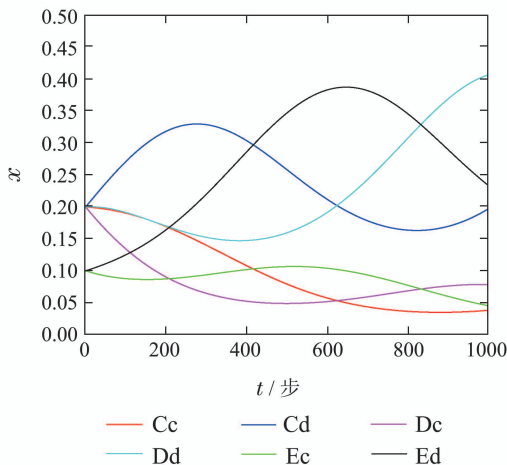
图5(a)设定参数 $[\alpha, \theta] = [0.1, 0.9], [r_1, r_2] = [0.9, 0.1]$ , 实际意义为选择石头剪刀布模型的比例为0.1, 选择雪堆模型的比例为0.9. 石头剪刀布模型中赢得比赛的收益为0.9, 雪堆博弈模型中不下车获得的补偿为0.1. 较图4(b)相比, 该参数下, 各种类型的个体比例在运行1000步后会有较小的变化. 由此可知 $r_1, r_2$ 即选择博弈方式的概率也会直接影响系统直和博弈模型中的各个类型个体的演化过程.

图5(b)设定参数 $[\alpha, \theta] = [0.9, 0.1], [r_1, r_2] = [0.1, 0.9]$ , 实际意义为选择石头剪刀布模型的比例为0.9, 选择雪堆模型的比例为0.1. 石头剪刀布模型中赢得比赛的收益为0.1, 雪堆博弈模型中不下车获得的补偿为0.9. 较图4(b)和图5(a)相比, 该参数下, 各种类型的个体在运行1000步后与初始值大致相同. 由此需要从全局来看,  $\alpha, \theta$ 为单参数支付矩阵中唯一的参数, 实际意义为背叛诱惑因子.  $r_1, r_2$ 表示选择模型的概率. 从全局来看, 选择模型的概率小, 背叛诱惑因子大或者选择模型的概率大, 背叛诱惑因子小. 这两种情形下建立的系统直和博弈模型同样能够有较强的稳定性, 由此可知 $\alpha, \theta, r_1, r_2$ 共同影响演化过程.

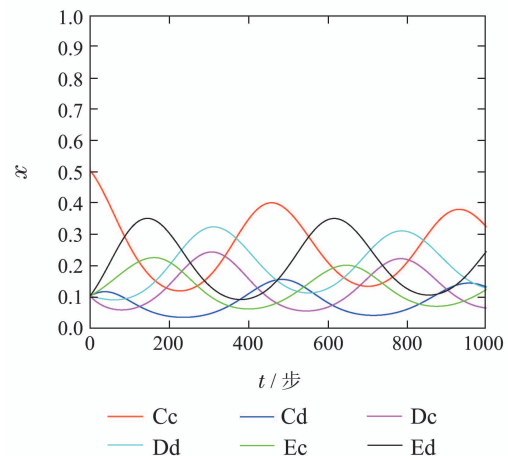
图6参数为 $[\alpha, \theta] = [0.5, 0.5], [r_1, r_2] = [0.5, 0.5]$ , 在参数一定的情况下, 观察不同的初值下各个类型个体的演化过程. 由图可知, 当系统中有些类型初值为0, 其他类型的个体的变化曲线波动较大, 甚至会导致有些类型的个体减少至0, 系统的稳定性就会下降. 因此生物多样性更有利于系统的稳定.



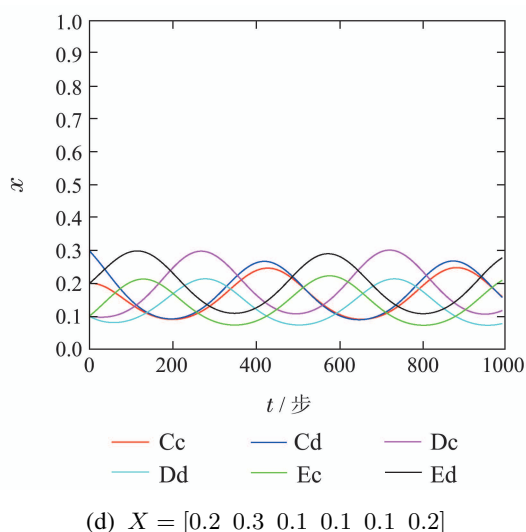
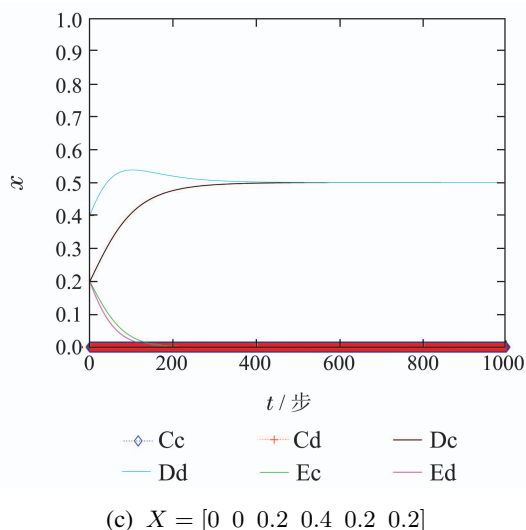
(a)  $X = [0 \ 0.1 \ 0 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4]$



(a)  $\alpha = 0.1, \theta = 0.9, r_1 = 0.9, r_2 = 0.1$



(b)  $X = [0.5 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1]$

图 6 不同初值下  $X$  的动态演化图Fig. 6 The dynamic evolution of  $X$  under different initial values

综上所述, 直和博弈较单一博弈而言, 合作策略的占比明显增加, 且整个系统稳定性更好. 很好地解释了合作行为广泛存在的现象. 这表明在石头剪刀布博弈中选择弱势策略造成的损失, 可以在雪堆博弈中选择不下车作为补偿, 使得整体收益最佳. 对某些个体而言, 在不同博弈中选择不同的策略会实现收益最大化. 因此在研究博弈时, 需从全局的角度去思考策略的选择. 这种合作演化机制称之为全局互惠. 这样很好地解释了为什么有些策略在单一博弈中是劣势策略, 仍然会有个体选择. 因为它们不仅考虑这一次博弈中所获得的收益, 而是从全局的角度去考虑.  $\alpha, \theta, r_1, r_2$  共同影响系统直和博弈模型中的各个类型个体的演化过程. 通过控制参数值, 使整个系统更加稳定, 也可以通过调整参数值来研究单一博弈的演化过程. 不仅如此, 通过研究不同初值下的演化过程可知, 生物多样性更有利于系统的稳定. 由此可见研究系统直

和博弈模型对合作演化的研究具有一定的意义.

## 5 总结

本文基于石头剪刀布模型和雪堆博弈模型, 采用矩阵直和的形式构建了系统直和博弈模型, 并将其推广到  $n$  个博弈方式. 给定初值利用 MATLAB 对系统直和博弈模型进行仿真模拟, 从全局的角度来研究合作演化问题, 得出全局互惠的合作演化机制, 并且得知  $\alpha, \theta, r_1, r_2$  等参数共同影响系统直和博弈模型中的各个类型个体的演化过程. 对于参数具体对演化过程的影响仍有待于我们今后进一步的研究. 正如引言中所述, 矩阵半张量积在博弈中的应用已初见端倪, 那么如何借助矩阵半张量积的方法构造多个个体共同博弈的系统直和博弈模型也是一个有意义的课题.

## 参考文献:

- [1] SMITH J M, PRICE G R. The logic of animal conflict. *Nature*, 1973, 246(5427): 15 – 18.
- [2] TAYLOR P D, JONKER L. Evolution stable strategies and game dynamics. *Mathematical Biosciences*, 1978, 40(1/2): 145 – 156.
- [3] HAMILTON W D. The genetical evolution of social behavior. *Journal of Theoretical Biology*, 1964, 7(1): 1 – 16.
- [4] BSHARY R, GRUTTER A S. Image scoring and cooperation in a cleaner fish mutualism. *Nature*, 2006, 441(7096): 975 – 978.
- [5] NOWAK M A, SIGMUND K. Evolution of indirect reciprocity. *Nature*, 2005, 437(7063): 1291 – 1298.
- [6] LANGER P, NOWAK M A, HAUERT C. Spatial invasion of cooperation. *Journal of Theoretical Biology*, 2007, 250(4): 634 – 641.
- [7] WILSON D S. A theory of group selection. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1975, 72(1): 143 – 146.
- [8] WANG Long, WU Te, ZHANG Yanling. Feedback mechanism in co-evolutionary game. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(7): 823 – 836.  
(王龙, 吴特, 张艳玲. 共演化博弈中的反馈机制. 控制理论与应用, 2014, 31(7): 823 – 836.)
- [9] ZHENG Yuelong, ZHANG Weiguo. Time cost, multiplayer snowdrift game and cooperative evolution. *System Science and Mathematics*, 2016, 36(11): 1933 – 1944.  
(郑月龙, 张卫国. 时间成本、多人雪堆博弈与合作演化研究. 系统科学与数学, 2016, 36(11): 1933 – 1944.)
- [10] GAO Shiping, WU Bin, DU Jinming, et al. Evolutionary dynamics of cooperative behavior under incentive mechanism. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(5): 627 – 636.  
(高世萍, 武斌, 杜金铭, 等. 激励机制下合作行为的演化动力学. 控制理论与应用, 2018, 35(5): 627 – 636.)
- [11] CHENG Daizhan, FU Shihua. Brief introduction of game cybernetics. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(5): 588 – 592.  
(程代展, 付世华. 博弈控制论简述. 控制理论与应用, 2018, 35(5): 588 – 592.)
- [12] CHENG Daizhan, LIU Ting, WANG Yuanhua. Matrix method in game theory. *System Science and Mathematics*, 2014, 34(11): 1291 – 1305.  
(程代展, 刘挺, 王元华. 博弈论中的矩阵方法. 系统科学与数学, 2014, 34(11): 1291 – 1305.)
- [13] CHENG D, LIU T. Linear representation of symmetric games. *IET Control Theory & Applications*, 2017, 11(18): 3278 – 3287.
- [14] FAN Hongbiao, FENG Jun'e, MENG Min. Solutions to fuzzy relation inequality  $A \circ X \circ B \leq C$ . *Control Theory & Applications*,



- 2016, 33(5): 694 – 700.  
(范洪彪, 冯俊娥, 孟敏. 模糊关系不等式  $A \circ X \circ B \leq C$  的解. 控制理论与应用, 2016, 33(5): 694 – 700.)
- [15] FU S, WANG Y, ZHAO G. A matrix approach to the analysis and control of networked evolutionary games with bankruptcy mechanism. *Asian Journal of Control*, 2017, 19(2): 717 – 727.
- [16] GUO P, WANG Y, LI H. Algebraic formulation and strategy optimization for a class of evolutionary networked games via semi-tensor product method. *Automatica*, 2013, 49(11): 3384 – 3389.
- [17] LI Y, LI H, XU X, et al. Semi-tensor product approach to minimal-agent consensus control of networked evolutionary games. *IET Control Theory & Applications*, 2018, 12(16): 2269 – 2275.
- [18] LI H, DING X, YANG Q, et al. Algebraic formulation and Nash equilibrium of competitive diffusion games. *Dynamic Games Applications*, 2018, 8(2): 423 – 433.
- [19] ZHAO G, WANG Y, LI H. A matrix approach to modeling and optimization for dynamic games with random entrance. *Applied Mathematics and Computation*, 2016, 290: 9 – 20.
- [20] YU Yongyuan, FENG Jun'e, PAN Jinfeng. Ordered potential game and its application in agent wireless network. *Control and Decision*, 2017, 32(3): 393 – 402.  
(于永渊, 冯俊娥, 潘金凤. 有序势博弈及其在智能体无线网络中的应用. 控制与决策, 2017, 32(3): 393 – 402.)
- [21] CHENG Daizhan, LIU Zequn. Application of semi-tensor product of matrices to finite games. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(11): 1812 – 1819.  
(程代展, 刘泽群. 有限博弈的矩阵半张量积方法. 控制理论与应用, 2019, 36(11): 1812 – 1819.)
- [22] SONG Pingping, LI Haitao, YANG Qiqi, et al. Pinning output tracking control of multi-valued logical networks. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(9): 1200 – 1206.  
(宋平平, 李海涛, 杨琪琪, 等. 多值逻辑网络的输出跟踪牵制控制. 控制理论与应用, 2016, 33(9): 1200 – 1206.)
- [23] XIA Meixia, LI Haitao, DING Xueying, et al. Matrix approach to calculation of Banzhaf value with applications. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(2): 446 – 452.  
(夏美霞, 李海涛, 丁雪莹, 等. 基于矩阵方法的Banzhaf值的计算及应用. 控制理论与应用, 2020, 37(2): 446 – 452.)
- [24] CHENG Yingjie, XIONG Yao, LI Yu. The characteristics and application of matrix direct sum. *Journal of Hubei Normal University (Natural Science Edition)*, 2018, 38(2): 48 – 52.  
(程滢洁, 熊瑶, 李昱. 矩阵直和的特征与应用. 湖北师范大学学报(自然科学版), 2018, 38(2): 48 – 52.)
- [25] LI A, BROOM M, DU J, et al. Evolutionary dynamics of general group interactions in structured populations. *Physical Review E*, 2016, 93(2): 022407.
- [26] HAUERT C, De M S, HOFBAUER J, et al. Volunteering as red queen mechanism for cooperation in public goods games. *Science*, 2002, 296(5570): 1129 – 1132.
- [27] HAUERT C, HOLMES M, DOEBELI M. Evolutionary games and population dynamics: maintenance of cooperation in public goods games. *Proceedings of the Royal Society B Biological Sciences*, 2006, 273(1600): 2565 – 2571.
- [28] NOWAK M A, MAY R M. Evolutionary games and spatial chaos. *Nature*, 1992, 359(6398): 826 – 829.
- [29] SINERVO B, LIVEL C M. The rock-paper-scissors game and the evolution of alternative male strategies. *Nature*, 1996, 380(6571): 240 – 243.

#### 作者简介:

**李亚昆** 硕士研究生, 目前研究方向为博弈论、布尔网络, E-mail: liyakunmath@mail.sdu.edu.cn;

**冯俊娥** 教授, 博士生导师, 目前研究方向为奇异系统、布尔网络、鲁棒控制, E-mail: fengjune@sdu.edu.cn.