

离散时滞Lur'e系统时滞依赖性稳定性判据

冯文希^{1,2†}, 罗飞¹, 裴海龙¹, 张先勇³, 段文勇⁴

(1. 华南理工大学 自动化科学与工程学院 自主系统与网络控制教育部重点实验室, 广东 广州 510640;

2. 广州市标准化研究院 广东 广州 510050;

3. 广东技术师范大学 自动化学院 广东 广州 510665; 4. 盐城工学院 电气工程学院, 江苏 盐城 224051)

摘要: 本文研究了离散时滞Lur'e系统的绝对稳定性和鲁棒绝对稳定性问题, 包含时变时滞和扇形有界约束的非线性。首先, 构造了新颖的李雅普诺夫-克拉索夫斯基泛函(Lyapunov-Krasovskii functional, LKF), 其中, 为了增补时变时滞区间和其他系统状态变量之间的耦合信息, LKF中扩充了一些重要的向量。其次, 结合改进的基于自由权重矩阵求和不等式技巧, 推导了一些比已有结论保守性更低的绝对和鲁棒绝对稳定性判据。稳定性判据保守性的减小主要归功于改进的LKF和求和不等式技巧。最后, 通过几个文献中常用的数值算例的求解仿真来说明本文判据的有效性和先进性。

关键词: 离散Lur'e系统; 李雅普诺夫理论; 线性矩阵不等式; 稳定性; 时滞系统

引用格式: 冯文希, 罗飞, 裴海龙, 等. 离散时滞Lur'e系统时滞依赖性稳定性判据. 控制理论与应用, 2021, 38(10): 1531 – 1541

DOI: 10.7641/CTA.2021.00447

Improved delay-dependent stability criteria for discrete-time Lur'e system with time-varying delays

FENG Wen-xi^{1,2†}, LUO Fei¹, PEI Hai-long¹, ZHANG Xian-yong³, DUAN Wen-yong⁴

(1. School of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong, 510640, China;

2. Guangzhou Institute of Standardization, Guangzhou Guangdong, 510050, China;

3. School of Automation, Guangdong Polytechnic Normal University, Guangzhou Guangdong, 510665, China;

4. School of Electrical Engineering, Yancheng Institute of Technology, Yancheng Jiangsu, 224051, China)

Abstract: In this paper, the absolute stability and robustly absolute stability for discrete-time Lur'e systems with time-varying delays and sector constraint nonlinearities are investigated. To begin with, an augmented Lyapunov-Krasovskii functional (LKF) is designed, where some augmented vectors are chosen to complement some coupling information between the delay intervals and other system state variables. Next, some improved delay-dependent absolute stability and robustly absolute stability criteria are proposed via the modified LKF and a modified general free-matrix-based summation inequality technique application. The proposed stability criteria can be easily solved by using the MATLAB linear matrix inequality (LMI) toolbox. The stability criteria are less conservative than some results previously proposed. The reduction of the conservatism mainly depends on the improvement of the LKF and the full use of the modified summation inequality technique. Finally, some common numerical examples used frequently in some previous literature are presented to show the effectiveness of the proposed approach.

Key words: discrete-time Lur'e systems; Lyapunov theory; LMI; stability; time-delayed system

Citation: FENG Wenxi, LUO Fei, PEI Hailong, et al. Improved delay-dependent stability criteria for discrete-time Lur'e system with time-varying delays. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(10): 1531 – 1541

1 引言

在工程实践中, 时滞总是不可避免的存在, 且是造成系统性能下降甚至不稳定的主要原因, 因此, 时滞

系统的稳定性分析一直是控制理论领域的热门话题^[1-5]。众所周知, 时滞依赖的稳定性判据比时滞无关的稳定性判据保守性更低, 特别是当时滞很小的时候。

收稿日期: 2020-07-14; 录用日期: 2021-02-17.

†通信作者. E-mail: 1040557750@qq.com; Tel.: +86 13922435246.

本文责任编辑: 方海涛.

国家自然科学基金项目(61603325), 广东省自然科学基金项目(2018A0303130111), 广东省科技计划项目(2017B010117007, 201902020003)资助。Supported by the National Natural Science Foundation of China (61603325), the National Natural Science Foundation of Guangdong Province (20151BAB207043) and the Guangzhou Science and Technology Planning Project (2017B010117007, 2018A0303130111).

因此,为了进一步减小稳定性判据的保守性,很多学者一直不断的改进研究方法.降低稳定性判据的保守性不仅依赖于所构造的LKF的有效性,而且依赖松弛的不等式技巧的发展,大量文献针对连续时滞系统做了相关的工作,并提出了比较好的研究策略.比如:隐式LKF^[6]、时滞依赖的LKF^[7]、向量LKF^[8]、其他扩展的LKF^[9-11]等;以及时滞分解理论^[12]、松弛二次函数负定引理等不等式技巧.而针对离散时滞系统,也有相应的推广,即:离散时滞系统稳定性判据的保守性大小也依赖于所构造的LKF的先进性和求和不等式技巧的发展.近几年来,很多学者把注意力集中在离散时变时滞系统的稳定性分析^[13-17].在以上工作中,利用李雅普诺夫稳定性理论,推导出很多基于线性矩阵不等式的稳定性判据.为了使得求和的上界值更接近于真实值,文献推导了一些新颖的自由权重矩阵理论和求和不等式技巧,比如零等式^[13]、离散勒让德多项式的不等式^[17]等.

另外,各种各样的非线性不可避免的存在于工程实践中,比如:经典的非线性、死区、饱和等.很多非线性系统可以建模成Lur'e系统,例如:蔡氏电路(Chua's circuit)、洛伦兹系统(Lorenz system)等.这样的系统可以看作是一个线性动态系统和一个具有扇形有界约束的非线性反馈项组成的闭环系统.近年来,针对含有时变时滞和扇形有界约束的Lur'e系统的稳定性分析问题,很多文献提出了重要的基于线性矩阵不等式的稳定性判据.针对连续的Lur'e系统情形,文献[18-20]的作者通过构造扩展的LKF和利用改进的积分不等式技巧,提出了比已有文献保守性更小的绝对稳定和鲁棒绝对稳定的判据.针对离散的Lur'e系统情形,文献[21-23]利用改进的求和不等式技巧获得了重要的稳定性判据.通过本文作者的查询发现,目前保守性最低的稳定性判据为文献[23]给出的相关结论.在此文献中,在构造LKF的时候,把时变时滞区间分成了一些子区间,从而利用时滞分解的理论获得了新的稳定性判据.最近,针对离散时滞神经网络系统的稳定性分析问题,文献[13]给出了一个改进的基于一般自由权重矩阵求和不等式,并推导出比已有结论保守性更低的稳定性判据.受此启发,求和不等式是一个放大的问题,如果上界值越小,不等式放大带来的保守性越小.且不等式中利用了自由权重矩阵增加了LMI求解自由度,则此类自由权重矩阵的自由度还可以进一步扩充,从而得到自由度更大的情形,可能进一步降低稳定性结论的保守性.更重要的是,在构造LKF的时候,一方面要考虑尽可能多的包含系统状态之间的关系,另一方面要充分利用所改进的不等式技巧,这也是稳定性分析中的难点和重点.以上分析将作为本文的出发点.

本文主要贡献可以总结为下列两点:

1) 根据文献[13]中的一般自由权重矩阵求和不等式技巧,通过进一步增加不等式中自由权重矩阵的自由度而获得了更为一般的求和不等式.这样,增加了稳定性判据中的LMI约束条件的求解自由度,进一步减小该稳定性判据的保守性.最后计算结果验证了此方法的有效性;

2) 基于改进的更为一般的求和不等式引理2,本文改进了相应LKF.和文献[21-25]比较,本文构造LKF的时候在 $V_1(k)$ 和 $V_3(k)$ 中增加了二重求和项,从而LKF中包含更多关于系统不同状态变量之间的耦合信息.这样可以在不同的时变时滞子区间 $[h_1, h(k)]$ 和 $[h(k), h_2]$ 之间充分利用改进的更为一般的求和不等式引理2.因此,本文关于离散时滞Lur'e系统稳定性判据的定理和推论保守性比文献[21,23-25]的更小.

本文主要针对离散时变时滞Lur'e系统的绝对稳定和鲁棒且对稳定性问题展开研究.其中包括时变时滞和扇形有界约束非线性.为了充分的利用和发挥改进的基于一般自由权重矩阵求和不等式的作用,对所需LKF进行了重要的扩充.通过李雅普诺夫稳定性理论,推导了一些新的基于线性矩阵不等式的绝对稳定和鲁棒绝对稳定性判据.所推导的稳定性判据保守性比已有文献的更小.最后,通过对两个常用在文献中的数值算例的求解和仿真,验证了本文方法和结论的有效性.

2 问题阐述

考虑下面标称的和不确定离散时变时滞Lur'e系统:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bx(k-h(k)) + D\omega(k), \\ z(k) = Mx(k) + Nx(k-h(k)), \\ \omega(k) = -\varphi(k, z(k)), \\ x(k) = \phi(k), k = -h_2, -h_2 + 1, \dots, 0 \end{cases} \quad (1)$$

和

$$\Sigma_2 : \begin{cases} x(k+1) = (A + \Delta A(k))x(k) + (B + \Delta B(k))x(k-h(k)) + (D + \Delta D(k))\omega(k), \\ z(k) = Mx(k) + Nx(k-h(k)), \\ \omega(k) = -\varphi(k, z(k)), \\ x(k) = \phi(k), k = -h_2, -h_2 + 1, \dots, 0, \end{cases} \quad (2)$$

其中: $x(k) \in \mathbb{R}^n$ (\mathbb{R}^n 表示 n -维欧氏空间), $\omega(k) \in \mathbb{R}^m$ 和 $z(k) \in \mathbb{R}^m$ 分别是系统状态向量、输入向量和输出向量; $(A, B \in \mathbb{R}^{n \times n})$ ($\mathbb{R}^{n \times m}$ 表示 $n \times m$ 实矩阵空间),

$(D, M, N \in \mathbb{R}^{m \times n}); (\Delta A(k), \Delta B(k) \in \mathbb{R}^{n \times n})$ 和 $\Delta D(k) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 分别是表示不确定参数的实矩阵函数; 函数 $\phi(k)$ 表示初始条件.

假设 1 时变时滞 $h(k)$ 满足以下有界约束条件:

$$0 \leq h_1 \leq h(k) \leq h_2, \quad (3)$$

其中非负标量 h_1 和 h_2 分别表示时变时滞的上下界值.

假设 2 不确定参数是允许的并且满足下面的等式:

$$[\Delta A(k) \ \Delta B(k) \ \Delta D(k)] = LF(k)[E_a \ E_b \ E_d], \quad (4)$$

其中 $(L, E_a, E_b \in \mathbb{R}^{n \times n})$ 和 $E_d \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 是已知常矩阵, 且 $F(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是 Lebesgue 可测的未知矩阵满足下列不等式

$$F^T(k)F(k) \leq I, \quad \forall t \geq 0, \quad (5)$$

这里 I 表示相应维数的单位矩阵.

假设 3 非线性函数 $\varphi(k, z(k)) \in \mathbb{R}^m$ 满足下列条件:

- 1) $\varphi(k, z(k))$ 是关于 k 离散的;
- 2) $\varphi(k, z(k))$ 关于 $z(k)$ 是全局 Lipschitz 连续的且 $\varphi(k, 0) = 0$;
- 3) $(\varphi(k, z(k)) - K_1 z(k))^T \times$
 $(\varphi(k, z(k)) - K_2 z(k)) \leq 0;$ (6)

或者

$$(\varphi(k, z(k)))^T (\varphi(k, z(k)) - Kz(k)) \leq 0, \quad (7)$$

其中 K_1 和 $K_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 是约束矩阵, 且 $K = K_2 - K_1$ 是对称正定的矩阵. 也就是, 如果非线性 $\varphi(k, z(k))$ 满足式(2), 那么认为 $\varphi(k, z(k))$ 属于扇形界 $[K_1, K_2]$ 的; 如果 $\varphi(k, z(k))$ 满足式(2), 那么认为 $\varphi(k, z(k))$ 属于扇形界 $[0, K]$ 的.

在推导主要结论之前, 给出下列一些重要的定义和引理:

定义 1 如果 Lur'e 系统的平凡解 $x(k) = 0$ 对非线性 $\varphi(k, z(k))$ 满足假设 3 是全局一致渐近稳定的, 那么称 Lur'e 系统在扇形界 $[K_1, K_2]$ (或 $[0, K]$) 是绝对稳定的或者鲁棒绝对稳定的.

引理 1^[13] 令 $x : [a, b-1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个向量函数, 其中 a, b 是整数. 对一个正定矩阵 $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 下列的不等式是成立的:

$$-\sum_{i=a}^{b-1} x^T(i)Rx(i) \leq -\frac{1}{b-a}\zeta^T \bar{R}\zeta, \quad (8)$$

$$-\sum_{i=a}^{b-1} \Delta x^T(i)R\Delta x(i) \leq -\frac{1}{b-a}\xi^T \bar{R}\xi, \quad (9)$$

其中:

$$\zeta = \text{col}\left\{\sum_{i=a}^{b-1} x(i), -\sum_{i=a}^{b-1} x(i) + 2\chi_1, \sum_{i=a}^{b-1} x(i) - 6\chi_1 + 12\chi_2\right\},$$

$$\xi = \text{col}\{x(b) - x(a), x(b) + x(a) - 2\Omega_1, x(b) - x(a) + 6\Omega_1 - 6\Omega_2\},$$

$$\chi_1 = \sum_{i_2=a}^{b-1} \sum_{i_1=i_2}^{b-1} \frac{x(i_1)}{b-a+1},$$

$$\chi_2 = \sum_{i_3=a}^{b-1} \sum_{i_2=i_3}^{b-1} \sum_{i_1=i_2}^{b-1} \frac{x(i_1)}{(b-a+1)(b-a+2)},$$

$$\Omega_1 = \sum_{i=a}^b \frac{x(i)}{b-a+1},$$

$$\Omega_2 = \sum_{i_2=a}^b \sum_{i_1=i_2}^b \frac{x(i_1)}{(b-a+1)(b-a+2)},$$

$$\bar{R} = \{R, 3R, 5R\}, \Delta x(i) = x(i+1) - x(i).$$

引理 2 令 $x : [a, b-1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个向量函数, 其中 a, b 是整数. 对一个正定矩阵 $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和任意适当维数的矩阵 M_1, M_2 和两个向量 β, ω , 下列的不等式是成立的:

$$-\sum_{i=a}^{b-1} x^T(i)Rx(i) \leq \text{Sym}\{\beta^T M_1 \zeta\} + (b-a)\beta^T M_1 \bar{R}^{-1} M_1^T \beta, \quad (10)$$

$$-\sum_{i=a}^{b-1} \Delta x^T(i)R\Delta x(i) \leq \text{Sym}\{\omega^T M_1 \xi\} + (b-a)\omega^T M_2 \bar{R}^{-1} M_2^T \omega. \quad (11)$$

证 这里只证明不等式(10), 不等式(11)类似. 只要令

$$A = -\sum_{i=a}^{b-1} x^T(i)Rx(i), \quad B = \zeta, \\ C = (b-a)\bar{R}^{-1}, \quad N = M_1^T \beta,$$

根据引理1和文献[26]中的引理4.1则可得不等式(10)成立. 证毕.

注 1 引理1中的式(8)中的 ζ 包含了三重求和项 χ_2 , 因此要直接应用 ζ 式不可避免的要引入 χ_2 . 本文目的是在不引入三重求和项的基础上, 进一步改进 Lyapunov 泛函, 结合引理1和2进一步降低稳定性判据的保守性. 事实上, 式(8)可以重新整理为以下不等式:

$$-\sum_{i=a}^{b-1} x^T(i)Rx(i) \leq -\frac{1}{b-a}\zeta^T \bar{R}\zeta = \\ -\frac{1}{b-a}\left(\sum_{i=a}^{b-a} x^T(i)\right)R\left(\sum_{i=a}^{b-a} x(i)\right) - \\ \frac{3}{b-a}\left(-\sum_{i=a}^{b-a} x(i) + 2\chi_1\right)^T R\left(-\sum_{i=a}^{b-a} x(i) + 2\chi_1\right) - \\ \frac{5}{b-a}\left(\sum_{i=a}^{b-a} x(i) - 6\chi_1 + 12\chi_2\right)^T R \times$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=a}^{b-a} x(i) - 6\chi_1 + 12\chi_2\right) \leq \\ & -\frac{1}{b-a} \left(\sum_{i=a}^{b-a} x^T(i)\right) R \left(\sum_{i=a}^{b-a} x(i)\right) - \\ & \frac{3}{b-a} \left(-\sum_{i=a}^{b-a} x(i) + 2\chi_1\right)^T R \left(-\sum_{i=a}^{b-a} x(i) + 2\chi_1\right) = \\ & -\frac{1}{b-a} \tilde{\zeta}^T \tilde{R} \tilde{\zeta}. \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta} &= \text{col}\left\{\sum_{i=a}^{b-1} x(i), -\sum_{i=a}^{b-1} x(i) + 2\chi_2\right\}, \\ \tilde{R} &= \text{diag}\{R, 3R\}. \end{aligned}$$

引理3^[27] 给定矩阵 Γ, Θ 和 $\Upsilon = \Upsilon^T$, 则对 $F(k)$ 满足 $F^T(k)F(k) \leq I$ 有

$$\Upsilon + \Gamma F(k)\Theta + \Theta^T F^T(k)\Gamma^T < 0$$

成立当且仅当对任意的标量 $\varepsilon > 0$, 下列不等式成立:

$$\Upsilon + \varepsilon^{-1}\Gamma\Gamma^T + \varepsilon\Theta^T\Theta < 0.$$

3 主要结论

为了更准确地描述时滞对Lur'e系统(1)稳定性的影响, 本文旨在推导新的保守性更小的稳定性判据. 为了简化向量和矩阵的表示, 给出以下符号:

$$h_{12} = h_2 - h_1, \quad h_k = h(k), \quad h_{k1} = h(k) - h_1,$$

$$h_{k2} = h_2 - h(k), \quad s_1(h) = h + 1,$$

$$s_2(h) = \frac{(h+1)(h+2)}{2},$$

$$\eta_1(k) = \text{col}\left\{x(k), \sum_{i=k-h_1}^{k-1} x(i), \sum_{i=k-h_2}^{k-h_1-1} x(i),\right.$$

$$\left.\sum_{i=k-h_1}^{k-1} \sum_{j=i}^{k-1} x(j)\right\},$$

$$\eta_2(k) = \text{col}\{x(k), \Delta x(k)\},$$

$$\xi(k) = \text{col}\{x(k), x(k-h_1), x(k-h_k), x(k-h_2),$$

$$\mu_1(k), \mu_2(k), \mu_3(k), v_1(k), v_2(k), v_3(k)\},$$

$$u_1(k) = \sum_{i=k-h_k}^{k-h_1} \frac{x(i)}{s_1(h_{k1})}, \quad u_2(k) = \sum_{i=k-h_2}^{k-h_k} \frac{x(i)}{s_1(h_{k2})},$$

$$u_3(k) = \sum_{i=k-h_1}^k \frac{x(i)}{s_1(h_1)}, \quad v_1(k) = \sum_{i=k-h_1}^k \sum_{j=i}^k \frac{x(j)}{s_2(h_1)},$$

$$v_2(k) = \sum_{i=k-h_k}^{k-h_1} \sum_{j=i}^{k-h_1} \frac{x(j)}{s_2(h_{k1})},$$

$$v_3(k) = \sum_{i=k-h_2}^{k-h_k} \sum_{j=i}^{k-h_k} \frac{x(j)}{s_2(h_{k2})}.$$

3.1 绝对稳定性判据

定理1 如果存在正定矩阵 $P \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$ ($R_i \in$

$\mathbb{R}^{2n \times 2n}$), ($Q_i, Z_i, G_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$), ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3$) 和任意适当维数的自由矩阵 $X, T \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$, $Y, H \in \mathbb{R}^{4n \times 3n}$ 使得下列不等式成立, 则称标称Lur'e系统 Σ_1 在 $h(k)$ 满足式(3)和非线性 $\varphi(k, z(k))$ 满足式(7) 下是绝对稳定的.

$$R_1 + \begin{bmatrix} 0 & G_1 \\ G_1 & G_1 \end{bmatrix} > 0, \tag{12}$$

$$\Xi_1 = \begin{bmatrix} \Pi(h_1) + \Phi & h_{12}\beta_2^T T & h_{12}\beta_2^T H & \Gamma\Omega \\ * & -h_{12}\bar{R}_3 & 0 & 0 \\ * & * & -h_{12}\bar{Z}_2 & 0 \\ * & * & * & -\Omega \end{bmatrix} < 0, \tag{13}$$

$$\Xi_2 = \begin{bmatrix} \Pi(h_2) + \Phi & h_{12}\beta_1^T M & h_{12}\beta_1^T N & \Gamma\Omega \\ * & -h_{12}\bar{R}_2 & 0 & 0 \\ * & * & -h_{12}\bar{Z}_2 & 0 \\ * & * & * & -\Omega \end{bmatrix} < 0, \tag{14}$$

其中: $P > 0$ ($P < 0$) 表示 P 是正定的(负定的)矩阵; $*$ 表示块矩阵对称的部分, $\text{Sym}\{A\} = A + A^T$, $e_i = \text{col}\{0_{n \times n}, \dots, \underbrace{I_{n \times n}}_i, \underbrace{0_{n \times n}, \dots, 0_{n \times n}}_{11-i}, 0_{m \times m}\}$, $i = 1, 2, \dots, 11$, 比如 $\xi^T(k)e_2 = x^T(k-h_1)$, $\xi^T(k)e_{11} = \omega^T(k)$, $\text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$ 表示 n -阶对角矩阵, a_1, \dots, a_n 为对角元,

$$\Pi(h_k) = \Pi_1(h_k) + \Pi_2 + \text{Sym}\{\Pi_3(h_k)\},$$

$$\Pi_1(h_k) = \text{Sym}\{\Phi(h_k)P\Theta^T\},$$

$$\Pi_2 = e_1(Q_1 + G_1)e_1^T + e_2(Q_2 - Q_1 + G_2 -$$

$$G_1)e_2^T + e_3(G_3 - G_2)e_3^T - e_4(G_3 +$$

$$Q_2)e_4^T - \frac{1}{h_1}\zeta_0\bar{R}_1\zeta_0^T - \frac{1}{h_1}\gamma_0\bar{Z}_1\gamma_0^T,$$

$$\Pi_3(h_k) = \beta_1^T X \zeta_1^T + \beta_2^T T \zeta_2^T + \beta_1^T Y \gamma_1^T + \beta_2^T H \gamma_2^T,$$

$$\Theta = [e_s \quad (e_1 - e_2) \quad (e_2 - e_4) \quad s_1(h_1)(e_1 - e_7)],$$

$$\Gamma = [e_1 \quad \Theta],$$

$$\Omega = \text{diag}\{0, P\} + \text{diag}\{h_1 R_1 + h_{12} R_2, 0, 0, 0\} +$$

$$\text{diag}\{0, h_1 Z_1 + h_{12} Z_2, 0, 0, 0\},$$

$$\Phi(h_k) = [e_1 \quad s_1(h_1)e_7 - e_1 \quad s_1(h_{k1})e_5 + s_1(h_{k2})e_6 -$$

$$e_2 - e_3 \quad s_2(h_1)e_8 - s_1(h_1)e_1],$$

$$\Phi = -2e_{11}e_{11}^T - \text{Sym}\{e_{11}KMe_1^T + e_{11}KNe_3^T\},$$

$$\beta_1^T = [e_2 \quad e_3 \quad e_5 \quad e_9], \quad \beta_2^T = [e_3 \quad e_4 \quad e_6 \quad e_{10}],$$

$$\zeta_0 = [s_1(h_1)e_7 - e_1 \quad e_1 - e_2 \quad s_2(h_1)e_8 -$$

$$s_1(h_1)e_7 - e_1 \quad e_1 + e_2 - 2e_7],$$

$$\begin{aligned} \zeta_1(h_k) &= [s_1(h_{k1})e_5 - e_2 \quad e_2 - e_3 \quad s_2(h_{k1})e_9 - \\ &\quad s_1(h_{k1})e_5 - e_2 \quad e_2 + e_3 - 2e_5], \\ \zeta_2(h_k) &= [s_1(h_{k2})e_6 - e_3 \quad e_3 - e_4 s_2(h_{k2})e_{10} - \\ &\quad s_1(h_{k2})e_6 - e_3 \quad e_3 + e_4 - 2e_6], \\ \gamma_0 &= [e_1 - e_2 \quad e_1 + e_2 - 2e_7 \\ &\quad e_1 - e_2 + 6e_7 - 6e_8], \\ \gamma_1 &= [e_2 - e_3 \quad e_2 + e_3 - 2e_5 \\ &\quad e_2 - e_3 + 6e_5 - 6e_9], \\ \gamma_2 &= [e_3 - e_4 \quad e_3 + e_4 - 2e_6 \\ &\quad e_3 - e_4 + 6e_6 - 6e_{10}], \\ \mathcal{R}_i &= R_i + \begin{bmatrix} 0 & G_i \\ G_i & G_i \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathcal{R}}_i = \text{diag}\{\mathcal{R}_i, 3\mathcal{R}_i\}, \\ \bar{Z}_i &= \text{diag}\{Z_i, 3Z_i, 5Z_i\}, \quad i = 1, 2, \\ \mathcal{R}_3 &= R_2 + \begin{bmatrix} 0 & G_3 \\ G_3 & G_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathcal{R}}_3 = \text{diag}\{\mathcal{R}_3, 3\mathcal{R}_3\}, \\ e_s &= e_1(A - I)^T + e_3B^T + e_{11}D^T. \end{aligned}$$

证 基于引理1-2的求和不等式技巧, 本文构造下面改进的LKF:

$$V(k) = \sum_{i=1}^5 V_i(k), \tag{15}$$

其中 $\Delta x(i) = x(i + 1) - x(i)$ 且

$$\begin{aligned} V_1(k) &= \eta_1^T(i)P\eta_1(i), \\ V_2(k) &= \sum_{i=k-h_1}^{k-1} x^T(i)Q_1x(i) + \\ &\quad \sum_{i=k-h_2}^{k-h_1-1} x^T(i)Q_2x(i), \\ V_3(k) &= \sum_{i=-h_1}^{-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} \eta_2^T(j)R_1\eta_2(j) + \\ &\quad \sum_{i=-h_2}^{-h_1-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} \eta_2^T(j)R_2\eta_2(j), \\ V_4(k) &= \sum_{i=-h_1}^{-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} \Delta x^T(i)Z_1\Delta x(i) + \\ &\quad \sum_{i=-h_2}^{-h_1-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} \Delta x^T(i)Z_2\Delta x(i). \end{aligned}$$

沿着系统(1)的轨迹, $V(k)$ 的差分分别可以写成下面的形式:

$$\begin{aligned} \Delta V_1(k) &= \\ \eta_1^T(k+1)P\eta_1(k+1) - \eta_1^T(k)P\eta_1(k) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\eta_1(k+1) - \eta_1(k))^T P(\eta_1(k+1) - \eta_1(k)) + \\ &\text{Sym}\{\eta_1^T(k)P(\eta_1(k+1) - \eta_1(k))\} = \\ &\xi^T(k)\{[e_s \quad (e_1 - e_2) \quad (e_2 - e_4) \\ &\quad s_1(h_1)(e_1 - e_7)]P[e_s \quad (e_1 - e_2) \quad (e_2 - e_4) \\ &\quad s_1(h_1)(e_1 - e_7)]^T + \text{Sym}\{[e_1 \quad s_1(h_1)e_7 - e_1 \\ &\quad s_1(h_{k1})e_5 + s_1(h_{k2})e_6 - e_2 - e_3 \\ &\quad s_2(h_1)e_8 - s_1(h)e_1]P[e_s \quad (e_1 - e_2) \\ &\quad (e_2 - e_4) \quad s_1(h_1)(e_1 - e_7)]^T\}\}\xi(k) = \\ &\xi^T(k)(\Theta P\Theta^T + \text{Sym}\{\Phi(h_k)P\Theta^T\})\xi(k), \tag{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta V_2(k) &= \\ x^T(k)Q_1x(k) + x^T(k-h_1)(Q_2 - \\ Q_1)x(k-h_1) - x^T(k-h_2)Q_2x(k-h_2) &= \\ \xi^T(k)(e_1Q_1e_1^T + e_2(Q_2 - Q_1)e_2^T - \\ e_4Q_2e_4^T)\xi(k), \tag{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta V_3(k) &= \\ \eta_2^T(k)(h_1R_1 + h_{12}R_2)\eta_2(k) - \\ \sum_{i=k-h_1}^{k-1} \eta_2^T(i)R_1\eta_2(i) - \\ \sum_{i=k-h_2}^{k-h_1-1} \eta_2^T(i)R_2\eta_2(i) &= \\ \xi^T(k)[e_1 \quad e_s](h_1R_1 + h_{12}R_2)[e_1 \quad e_s]^T\xi(k) - \\ \sum_{i=k-h_1}^{k-1} \eta_2^T(i)R_1\eta_2(i) - \sum_{i=k-h_2}^{k-h_1-1} \eta_2^T(i)R_2\eta_2(i), \tag{18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta V_4(k) &= \\ \Delta x^T(k)(h_1Z_1 + h_{12}Z_2)\Delta x(k) - \\ \sum_{i=k-h_1}^{k-1} \Delta x^T(i)Z_1\Delta x(i) - \\ \sum_{i=k-h_2}^{k-h_1-1} \Delta x^T(i)Z_2\Delta x(i) &= \\ \xi^T(k)e_s(h_1Z_1 + h_{12}Z_2)e_s^T\xi(k) - \\ \sum_{i=k-h_1}^{k-1} \Delta x^T(i)Z_1\Delta x(i) - \\ \sum_{i=k-h_2}^{k-h_1-1} \Delta x^T(i)Z_2\Delta x(i). \tag{19} \end{aligned}$$

这里 $\Theta, \Phi(h_k), e_s$ 为定理1所定义.

对任意的对称矩阵 G_1, G_2 和 G_3 , 下面的零等式自然成立:

$$\begin{aligned} 0 &= x^T(k)G_1x(k) - x^T(k-h_1)G_1x(k-h_1) - \\ &\quad \sum_{i=k-h_1}^{k-1} [\Delta x^T(i)G_1\Delta x(i) + \end{aligned}$$

$$2\Delta x^T(i)G_1x(i)], \tag{20}$$

$$0 = x^T(k-h_1)G_2x(k-h_1) - x^T(k-h_k)G_2x(k-h_k) - \sum_{i=k-h_k}^{k-h_1-1} [\Delta x^T(i)G_2\Delta x(i) + 2\Delta x^T(i)G_2x(i)], \tag{21}$$

$$0 = x^T(k-h_k)G_3x(k-h_k) - x^T(k-h_2)G_3x(k-h_2) - \sum_{i=k-h_2}^{k-h_k-1} [\Delta x^T(i)G_3\Delta x(i) + 2\Delta x^T(i)G_3x(i)]. \tag{22}$$

把上面的3个零等式(20)-(22)加入 $\Delta V_3(k)$ 中可以改写 $\Delta V_3(k)$ 为下列形式:

$$\begin{aligned} \Delta V_3(k) = & \eta_2^T(k)(h_1R_1 + h_{12}R_2)\eta_2(k) + e_1G_1e_1^T + e_2(G_2 - G_1)e_2^T + e_3(G_3 - G_2)e_3^T - \\ & e_4G_3e_4^T - \sum_{i=k-h_1}^{k-1} \eta_2^T(i)\mathcal{R}_1\eta_2(i) - \sum_{i=k-h_k}^{k-h_1-1} \eta_2^T(i)\mathcal{R}_2\eta_2(i) - \sum_{i=k-h_2}^{k-h_k-1} \eta_2^T(i)\mathcal{R}_3\eta_2(i) - \\ & \xi^T(k)[e_1 \ e_s](h_1R_1 + h_{12}R_2)[e_1 \ e_s]^T\xi(k) - \xi^T(k)(e_1G_1e_1^T + e_2(G_2 - G_1)e_2^T + e_3(G_3 - G_2)e_3^T - e_4G_3e_4^T)\xi(k) - \\ & \sum_{i=k-h_1}^{k-1} \eta_2^T(i)R_1\eta_2(i) - \sum_{i=k-h_2}^{k-h_1-1} \eta_2^T(i)R_2\eta_2(i). \tag{23} \end{aligned}$$

根据不等式(12)和引理1中的式(9)和注1, $\Delta V_3(k)$ 和 $\Delta V_4(k)$ 中的 \mathcal{R}_1 -和 Z_1 -依赖的求和形式可以写为系列不等式形式:

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=k-h_1}^{k-1} \eta_2^T(i)\mathcal{R}_1\eta_2(i) \leq - \frac{1}{h_1}(\text{col}\{\sum_{i=k-h_1}^{k-1} \eta_2(i), - \sum_{i=k-h_1}^{k-1} \eta_2(i) + 2\bar{\chi}_1\})^T \times \\ & \mathcal{R}_1(\text{col}\{\sum_{i=k-h_1}^{k-1} \eta_2(i), - \sum_{i=k-h_1}^{k-1} \eta_2(i) + 2\bar{\chi}_1\}) = - \frac{1}{h_1}(\text{col}\{\sum_{i=k-h_1}^{k-1} x(i) - x(k), x(k) - x(k-h_1), \\ & (h_1 + 2)v_1(k) - s_1(h_1)\mu_3(k) - x(k), x(k) + x(k-h_1) - 2\mu_3(k)\})^T \times \\ & \mathcal{R}_1(\text{col}\{\sum_{i=k-h_1}^{k-1} x(i) - x(k), x(k) - x(k-h_1), \end{aligned}$$

$$(h_1 + 2)v_1(k) - s_1(h_1)\mu_3(k) - x(k), x(k) + x(k-h_1) - 2\mu_3(k)\}) =$$

$$- \frac{1}{h_1}\xi^T(k)\zeta_0\bar{\mathcal{R}}_1\zeta_0^T\xi(k), \tag{24}$$

$$- \sum_{i=k-h_1}^{k-1} \Delta x^T(i)Z_1\Delta x(i) \leq$$

$$- \frac{1}{h_1}(\text{col}\{x(k) - x(k-h_1), x(k) + x(k-h_1) -$$

$$2\bar{\Omega}_1, x(k) - x(k-h_1) + 6\bar{\Omega}_1 - 6\bar{\Omega}_2\})^T \times$$

$$\mathcal{R}_1(\text{col}\{x(k) - x(k-h_1), x(k) + x(k-h_1) - 2\bar{\Omega}_1, x(k) - x(k-h_1) + 6\bar{\Omega}_1 - 6\bar{\Omega}_2\}) =$$

$$- \frac{1}{h_1}\xi^T(k)\gamma_0\bar{Z}_1\gamma_0^T\xi(k), \tag{25}$$

这里 $v_1(k)$ 和 $\mu_3(k)$ 为定理1所定义, 并且

$$\bar{\chi}_1 = \sum_{i_2=k-h_1}^{k-1} \sum_{i_1=i_2}^{k-1} \frac{\eta_2(i_1)}{s_1(h_1)},$$

$$\bar{\chi}_2 = \sum_{i_3=k-h_1}^{k-1} \sum_{i_2=i_3}^{k-1} \sum_{i_1=i_2}^{k-1} \frac{\eta_2(i_1)}{2s_2(h_1)},$$

$$\bar{\Omega}_1 = \sum_{i=k-h_1}^k \frac{x(i)}{s_1(h_1)}, \quad \bar{\Omega}_2 = \sum_{i_2=k-h_1}^k \sum_{i_1=i_2}^{k-1} \frac{x(i)}{2s_2(h_1)}.$$

从不等式(13)和(14)中可以得到 $\mathcal{R}_2 > 0$ 且 $\mathcal{R}_3 > 0$. 因此, 利用引理2中的式(10)和式(11)来估计下面 \mathcal{R}_2 -, \mathcal{R}_3 -和 Z_2 -依赖的求和不等式:

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=k-h_2}^{k-h_1-1} \eta_2^T(i)\mathcal{R}_2\eta_2(i) = - \sum_{i=k-h_k}^{k-h_1-1} \eta_2^T(i)\mathcal{R}_2\eta_2(i) - \\ & \sum_{i=k-h_2}^{k-h_k-1} \eta_2^T(i)\mathcal{R}_2\eta_2(i) \leq \xi^T(k) \text{Sym}\{\beta_1^T X \zeta_1^T + \beta_2^T T \zeta_2^T\} \xi(k) + \\ & h_{k1}\xi^T(k)\beta_1^T X \bar{\mathcal{R}}_2^{-1} X^T \beta_1 \xi(k) + h_{k2}\xi^T(k)\beta_2^T T \bar{\mathcal{R}}_3^{-1} T^T \beta_2 \xi(k), \tag{26} \end{aligned}$$

$$- \sum_{i=k-h_2}^{k-h_1-1} \Delta x^T(i)Z_2\Delta x(i) =$$

$$- \sum_{i=k-h_k}^{k-h_1-1} \Delta x^T(i)Z_2\Delta x(i) -$$

$$\sum_{i=k-h_2}^{k-h_k-1} \Delta x^T(i)Z_2\Delta x(i) \leq$$

$$\xi^T(k) \text{Sym}\{\beta_1^T Y \gamma_1^T + \beta_2^T H \gamma_2^T\} \xi(k) +$$

$$h_{k1}\xi^T(k)\beta_1^T Y \bar{Z}_2^{-1} Y^T \beta_1 \xi(k) +$$

$$h_{k2}\xi^T(k)\beta_2^T H \bar{Z}_2^{-1} H^T \beta_2 \xi(k), \tag{27}$$

并且, 利用假设3中的式(7)可以得到下列不等式:

$$-2\omega^T(k)\omega(k) - 2\omega^T(k)K[Mx(k) + Nx(k - h(k))] \geq 0. \quad (28)$$

最后, 通过式(16)–(19)和式(23)–(28), 下列不等式成立:

$$\begin{aligned} \Delta V(k) \leq & \xi^T(k)(\Theta P \Theta^T + \text{Sym}\{\Phi(h_k)P\Theta^T\})\xi(k) + \\ & \xi^T(k)(e_1 Q_1 e_1^T + e_2(Q_2 - Q_1)e_2^T - e_4 Q_2 e_4^T)\xi(k) + \\ & \xi^T(k)([e_1 \ e_s](h_1 R_1 + h_{12} R_2)[e_1 \ e_s]^T + \\ & e_s(h_1 Z_1 + h_{12} Z_2)e_s^T + e_1 G_1 e_1^T + \\ & e_2(G_2 - G_1)e_2^T + e_3(G_3 - G_2)e_3^T - \\ & e_4 G_3 e_4^T - \frac{1}{h_1} \zeta_0 \mathcal{R}_1 \zeta_0^T - \frac{1}{h_1} \gamma_0 \bar{Z}_1 \gamma_0^T)\xi(k) + \\ & \xi^T(k) \text{Sym}\{\beta_1^T X \zeta_1^T + \beta_2^T T \zeta_2^T\}\xi(k) + \\ & \xi^T(k) \text{Sym}\{\beta_1^T Y \gamma_1^T + \beta_2^T H \gamma_2^T\}\xi(k) + \\ & h_{k1} \xi^T(k) \beta_1^T X \bar{\mathcal{R}}_2^{-1} X^T \beta_1 \xi(k) + \\ & h_{k2} \xi^T(k) \beta_2^T T \bar{\mathcal{R}}_3^{-1} T^T \beta_2 \xi(k) + \\ & h_{k1} \xi^T(k) \beta_1^T Y \bar{Z}_2^{-1} Y^T \beta_1 \xi(k) + \\ & h_{k2} \xi^T(k) \beta_2^T H \bar{Z}_2^{-1} H^T \beta_2 \xi(k). \end{aligned}$$

化简可以得到如下形式:

$$\begin{aligned} \Delta V(k) \leq & \xi^T(k)[\Pi(h_k) + \Gamma \Omega \Gamma^T + \Phi + \\ & h_{k1} \beta_1^T (X \bar{\mathcal{R}}_2^{-1} X^T + Y \bar{Z}_2^{-1} Y^T) \beta_1] \xi(k) + \\ & h_{k2} \xi^T(k) \beta_2^T (T \bar{\mathcal{R}}_3^{-1} T^T + H \bar{Z}_2^{-1} H^T) \beta_2 \xi(k). \quad (29) \end{aligned}$$

结合Schur补引理和不等式(13)和(14)可以推出 $\Delta V(k) < 0$. 所以, 根据李雅普诺夫稳定性理论可知标称Lur'e系统 Σ_1 是渐近稳定的. 由定义1可知, 标称Lur'e系统 Σ_1 是绝对稳定的. 证毕.

接下来, 考虑非线性函数 $\varphi(k, z(k))$ 满足假设3中的式(6), 也就是 $\varphi(k, z(k))$ 属于扇形约束 $[K_1, K_2]$. 根据文献[28]中给出的模型转换方法, $\varphi(k, z(k))$ 属于扇形约束 $[0, K]$ 的稳定性问题等价于下面的变换形式:

$$\tilde{\Sigma}_1 : \begin{cases} x(k+1) = (A - DK_1 M)x(k) + \\ (B - DK_1 N)x(k - h(k)) + D\omega(k), \\ z(k) = Mx(k) + Nx(k - h(k)), \\ \omega(k) = -\varphi(k, z(k)), \end{cases} \quad (30)$$

其中非线性函数 $\varphi(k, z(k))$ 可以变换为属于扇形约

束 $[0, K_2 - K_1]$. 即满足假设3中的式(7). 因此, 上述定理1可以推广到如下结论:

推论 1 如果存在正定矩阵 $P \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$ ($R_i \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$), ($Q_i, Z_i, G_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$), ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3$) 和任意适当维数的自由矩阵 $X, T \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$, $Y, H \in \mathbb{R}^{4n \times 3n}$ 使得不等式(12)和下列不等式成立, 则称标称Lur'e系统 $\tilde{\Sigma}_1$ 在 $h(k)$ 满足式(3)和非线性 $\varphi(k, z(k))$ 满足式(6)下是绝对稳定的.

$$\tilde{\Xi}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\Pi}(h_1) + \tilde{\Phi} & h_{12} \beta_2^T T & h_{12} \beta_2^T H & \tilde{\Gamma} \Omega \\ * & -h_{12} \bar{\mathcal{R}}_3 & 0 & 0 \\ * & * & -h_{12} \bar{Z}_2 & 0 \\ * & * & * & -\Omega \end{bmatrix} < 0, \quad (31)$$

$$\tilde{\Xi}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{\Pi}(h_2) + \tilde{\Phi} & h_{12} \beta_1^T X & h_{12} \beta_1^T Y & \tilde{\Gamma} \Omega \\ * & -h_{12} \bar{\mathcal{R}}_2 & 0 & 0 \\ * & * & -h_{12} \bar{Z}_2 & 0 \\ * & * & * & -\Omega \end{bmatrix} < 0, \quad (32)$$

其中:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}(h_k) &= \tilde{\Pi}_1(h_k) + \Pi_2 + \text{Sym}\{\Pi_3(h_k)\}, \\ \tilde{\Pi}_1(h_k) &= \text{Sym}\{\Phi(h_k)P\Theta^T\}, \\ \tilde{\Theta} &= [\tilde{e}_s \ (e_2 - e_4) \ (e_1 - e_2) \ s_1(h_1)(e_1 - e_7)], \\ \tilde{\Gamma} &= [e_1 \ \tilde{\Theta}], \\ \tilde{e}_s &= e_1(A - DK_1 M - I)^T + e_3(B - DK_1 N)^T + \\ & e_{11} D^T, \\ \tilde{\Phi} &= -2e_1 M^T K_1^T K_2 M e_1^T - 2e_3 N^T K_1^T K_2 N e_3^T - \\ & 2e_{11} e_{11}^T - \text{Sym}\{e_{11}(K_1 + K_2)(M e_1^T + \\ & N e_3^T) + 2e_1 M^T (K_2^T K_1 + K_1^T K_2) N e_3^T\}. \end{aligned}$$

证 仅需把定理1证明过程中的式(28)用下列式子代替即可:

$$\begin{aligned} & -2(\varphi(k, z(k)) - K_1 z(k))^T \times \\ & (\varphi(k, z(k)) - K_2 z(k)) \geq 0, \quad (33) \end{aligned}$$

也就是,

$$\begin{aligned} & 2[\omega(k) + K_1(Mx(k) + Nx(k - h_k))]^T \times \\ & [-\omega(k) - K_2(Mx(k) + Nx(k - h_k))] \geq 0. \quad (34) \end{aligned}$$

证毕.

3.2 鲁棒绝对稳定性判据

接下来, 本文将把以上绝对稳定性判据推广到含有时变不确定参数的系统情形中, 不确定参数满足假设2.

定理 2 如果存在正定矩阵 $P \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$ ($R_i \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$), ($Q_i, Z_i, G_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$), 任意适当维数的自由矩阵 $X, T \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$, $Y, H \in \mathbb{R}^{4n \times 3n}$ 以及标量 $\varepsilon_i > 0, (i = 1, 2; j = 1, 2, 3)$, 使得不等式(12)和下列不等式成立, 则称不确定Lur'e系统 $\tilde{\Sigma}_2$ 在假设1-3中的式(7)约束下是鲁棒绝对稳定的.

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 & J & \varepsilon_1 \tilde{A}^T \\ * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & -\varepsilon_1 I \end{bmatrix} < 0, \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_2 & J & \varepsilon_2 \tilde{A}^T \\ * & -\varepsilon_2 I & 0 \\ * & * & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (36)$$

其中:

$$J = [\bar{L}^T \ \Delta_0^T \ 0 \ 0 \ \bar{L}^T \ \Omega^T]^T, \Lambda = [0 \ E \ 0 \ 0 \ 0]^T, \bar{L} = \text{diag}\{L, L, L, L, L\}, \Delta_0 = [0 \ \Phi(h_k) \ P], E = e_1 E_a^T + e_3 E_b^T + e_{11} E_d^T, \text{且 } \Xi_i, (i = 1, 2) \text{ 见定理1定义.}$$

证 只需把定理1中的式(13)和式(14)中的 A, B 和 D 用 $A + LF(k)E_a, B + LF(k)E_b$ 和 $D + LF(k)E_d$ 来代替即可. 其中令

$$\bar{F}(k) = \text{diag}\{F(k), F(k), F(k), F(k), F(k)\},$$

定理1中的线性矩阵不等式(13)和(14)可以重新写成下列形式:

$$\Xi_i + J\bar{F}(k)\Lambda + \Lambda^T \bar{F}^T(k)J^T < 0, \quad i = 1, 2. \quad (37)$$

根据定理1和定义1所约束, 如果上式(37)成立, 则可以得到Lur'e系统 Σ_2 满足假设1-3下是鲁棒绝对稳定的. 根据引理3可知, 上式(37)成立当且仅当存在标量 $\varepsilon_i > 0, (i = 1, 2)$, 下列不等式成立:

$$\Xi_i + \varepsilon_i^{-1} J J^T + \varepsilon_i \Lambda^T \Lambda < 0, \quad i = 1, 2. \quad (38)$$

根据Schur补引理可得矩阵不等式(38)和线性矩阵不等式(35)-(36)是等价的. 证毕.

推论 2 如果存在正定矩阵 $P \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$ ($R_i \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$), ($Q_i, Z_i, G_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$), 任意适当维数的自由矩阵 $X, T \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$, $Y, H \in \mathbb{R}^{4n \times 3n}$ 以及标量 $\varepsilon_i > 0, (i = 1, 2; j = 1, 2, 3)$, 使得不等式(12)和下列不等式成立, 则称不确定Lur'e系统 $\tilde{\Sigma}_2$ 在假设1-3中的式(6)约束下是鲁棒绝对稳定的.

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_1 & J & \varepsilon_1 \tilde{A}^T \\ * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & -\varepsilon_1 I \end{bmatrix} < 0, \quad (39)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_2 & J & \varepsilon_2 \tilde{A}^T \\ * & -\varepsilon_2 I & 0 \\ * & * & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (40)$$

其中:

$$\tilde{A} = [0 \ \tilde{E} \ 0 \ 0 \ 0]^T m,$$

$$E = e_1(E_a - E_d K_1 M)^T + e_3(E_b - E_d K_1 N)^T + e_{11} E_d^T$$

且 $\tilde{\Xi}_i (i = 1, 2)$ 见推论1定义.

注 2 为了在不同的时变时滞子区间 $[h_1, h(k)]$ 和 $[h(k), h_2]$ 之间充分利用引理1, 本文构造LKF的时候增加了二重求和项 $V_1(k)$ 和 $V_3(k)$. 这样, 所构造的LKF比文献[21-25]中选择的LKF包含更多关于系统不同状态变量之间的耦合信息. 因此, 本文关于离散时滞Lur'e系统稳定性判据的定理和推论保守性比文献[21-25]的更小.

注 3 定理和推论1-2中的矩阵不等式初始形式并不是线性矩阵不等式形式, 因为他们都依赖于时变时滞参数 $h(k)$. 事实上, 结论中的矩阵不等式都可以写成以下形式:

$$\Sigma_1 + h_{k1} \Sigma_2 + h_{k2} \Sigma_3 < 0, \quad (41)$$

这里 $\Sigma_i (i = 1, 2, 3)$ 都是时滞无关的矩阵函数. 根据文献[29]给出的凸组合技巧可以推出以上初始形式的矩阵不等式成立当且仅当对 $h_1 \leq h(k) \leq h_2$ 下列不等式成立:

$$\Sigma_1 + [h_{k1} \Sigma_2 + h_{k2} \Sigma_3]_{h_k \in \{h_1, h_2\}} < 0, \quad (42)$$

也就是,

$$\Sigma_1 + h_{12} \Sigma_3 < 0, \quad (43)$$

$$\Sigma_1 + h_{12} \Sigma_2 < 0. \quad (44)$$

以上分析可以知道本文结论中的矩阵不等式可以化成线性矩阵不等式形式求解.

4 数值算例

本章主要通过文献[21-23, 25]中常用的数值算例来验证本文稳定性判据的有效性. 利用MATLAB中的LMI工具箱来求解结论中的线性矩阵不等式, 可以计算出系统最大允许时滞上界(maximum allowable delay upper bounds, MADUBs).

例 1 [21-23] 考虑不确定Lur'系统 $\tilde{\Sigma}_1$, 具体参数描述如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.05 & 0.9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ -0.2 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -0.02 \\ -0.03 \end{bmatrix}, M = [0.3 \ 0.1],$$

$$N = [0.1 \ 0.2], L = E_a = E_b = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$E_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, K_1 = 0.2, K_2 = 0.5.$$

给定不同的时滞下界值 h_1 , 相应的MADUBs h_2 可以通过MATLAB中的LMI工具箱求解结论中的线性矩阵不等式得到. 表1中给出了计算所得结果, 并和文献[21–23]中的结果进行了比较分析. 从此表中可以看出, 本文稳定性判据计算出的MADUBs值比文献中的更大, 这也说明本文的结论比文献中的保守性更小, 效果更好. 图1表示在本文得到的时滞上界情形下的状态相应曲线. 其中, $\varphi(k, z(k)) = (0.35 + 0.15 \sin k)z(k)$, 初始条件为 $x(0) = [1 \ -1]^T$, 时变时滞为 $h(k) = \frac{49}{2} + \frac{49}{2} \sin \frac{k\pi}{4}$. 从图1可以看出本文的时滞上界没有超出实际值, 系统仍然是趋于稳定的.

表 1 不同 h_1 下的MADUBs h_2 值(例1)
Table 1 MADUBs h_2 for different h_1 (Example 1)

方法	h_1									
	4	6	8	10	12	15	17	18	20	20
不含参数不确定性	文献[21]	17	18	19	20	21	23	25	25	27
	文献[22]	17	18	19	20	21	23	25	25	27
	文献[23]	19	20	21	22	23	24	26	26	28
	推论1	22	23	24	25	25	26	27	27	29
含参数不确定性	文献[21]	12	13	14	15	16	18	20	21	22
	文献[22]	12	13	14	15	16	18	20	21	22
	文献[23]	13	13	14	15	16	18	20	21	22
	推论2	16	17	17	18	18	19	21	22	22

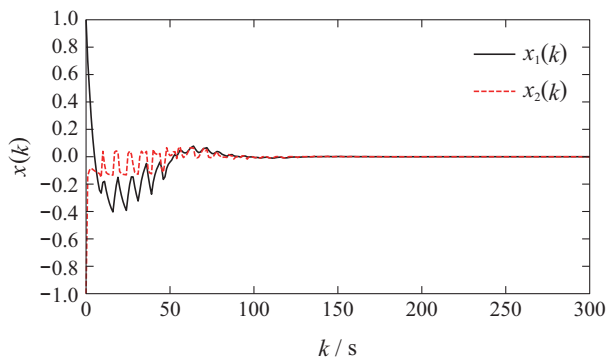


图 1 在例1给定条件下, 系统 $\tilde{\Sigma}_1$ 的状态相应曲线

Fig. 1 The state response of system $\tilde{\Sigma}_1$ under the conditions given in Example 1

例 2 [21–23] 考虑标称的Lur'e系统 Σ_1 , 具体参数描述如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ -0.1 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -0.02 \\ -0.03 \end{bmatrix}, M = [0.6 \ 0.8],$$

$$N = [0 \ 0], K = 0.5.$$

和例1相似, 给定不同的时滞下界值 h_1 , 相应的MADUBs h_2 可以通过MATLAB中的LMI工具箱求解结论中的线性矩阵不等式得到. 表2–3中给出了在 $K = 0.5$ 和 $K = 10$ 情形下的计算所得结果, 并和文献[21, 23]中的结果进行了比较分析. 从此表中可以看出, 本文稳定性判据计算出的MADUBs值比文献中的更大, 这也说明本文的结论比文献中的保守性更小, 效果更好. 随着 K 的增大, 时滞上界也是递减的. 图2表示在本文得到的时滞上下界($h_1 = 20, h_2 = 44$)情形下且 $K = 0.5$ 的状态响应曲. 其中, $\varphi(k, z(k)) = 0.5 \sin^2(z(k))$, 初始条件为 $x(0) = [1 \ 2]^T$, 时变时滞为 $h(k) = 32 - 12 \sin(\frac{k\pi}{4})$. 图3在图2的基础上, 取 $K = 10$ 时的状态响应曲线. 即, $\varphi(k, z(k)) = 10 \sin^2(z(k))$. 从图2–3可以看出本文的时滞上界没有超出实际值, 系统仍然是趋于稳定的.

表 2 不同 h_1 下的MADUBs h_2 值(例2)
Table 2 MADUBs h_2 for different h_1 (Example 2)

方法	K	h_1									
		4	6	8	10	12	15	17	18	20	20
不含参数不确定性	0.5	文献[21]	17	19	21	23	25	28	30	31	33
		文献[23]	27	29	30	32	34	37	39	40	42
		定理1	29	31	32	33	35	38	40	41	44
		定理2	23	25	25	26	28	30	32	32	34
含参数不确定性	0.5	文献[23]	13	14	16	18	20	23	25	26	28
		定理2	15	16	18	20	22	24	26	27	30
		定理1	12	13	14	18	19	22	24	25	29
		定理2	12	13	14	18	19	22	24	25	29

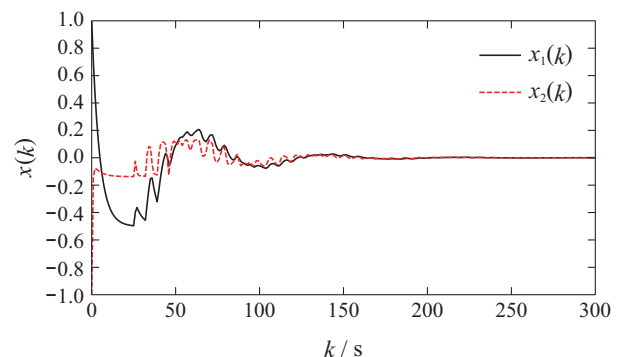


图 2 例2中 $K = 0.5$, 系统 $\tilde{\Sigma}_1$ 的状态相应曲线

Fig. 2 The state response of system $\tilde{\Sigma}_1$ with $K = 0.5$ in Example 2

另外, 在例2系统的基础上考虑不确定参数, 即考虑不确定Lur'e系统 Σ_2 , 具体不确定参数描述如下:

$$L = E_a = E_b = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, E_d = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

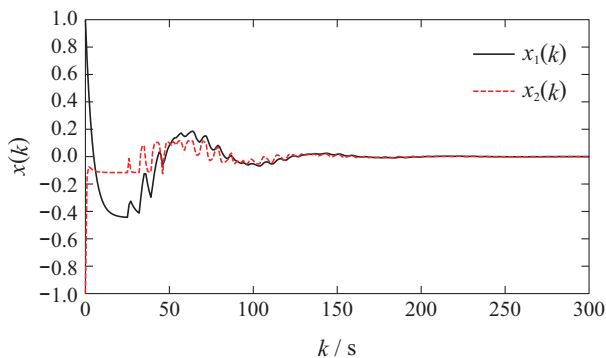


图3 例2中 $K = 10$, 系统 $\tilde{\Sigma}_1$ 的状态相应曲线

Fig. 3 The state response of system $\tilde{\Sigma}_1$ with $K = 10$ in Example 2

在这种情形下, 相应的MADUBs h_2 可以通过MATLAB中的LMI工具箱求解定理2中的线性矩阵不等式得到. 而文献[21]没有考虑不确定参数矩阵 $\Delta D(k)$, 所以其结论不适用此种情形. 从表1和2中都可以看出, 含有不确定参数的情形所得到的MADUBs h_2 总是比不含有不确定参数情形的要小, 因此, 鲁棒绝对稳定性判据要比绝对稳定性判据保守性更大.

5 总结

本文主要基于李雅普诺夫稳定性理论, 研究了含有时变时滞和扇形界约束的非线性离散时滞Lur'e系统的绝对稳定和鲁棒绝对稳定性问题. 受已发表文献的启发, 构造了扩充的LKF和改进了求和不等式技巧, 并基于此给出了一些绝对稳定性和鲁棒绝对稳定性判据. 本文的结论和已有文献进行了比较分析, 得到保守性更小的结论. 最后, 通过文献中常用的数值算例进行计算并仿真, 验证了所得结论的有效性.

显而易见, 本文新的稳定性判定条件可以被推广到很多其他时滞控制系统中, 比如: 时滞神经网络系统、时滞中立型系统、时滞线性系统等等. 然而, 由于理论分析的复杂性, 此理论运用于实际工程中还有很长的距离. 这些将作为团队未来的科研方向.

参考文献:

- [1] PENG X, HE Y, LONG F, et al. Global exponential stability analysis of neural networks with a time-varying delay via some state-dependent zero equations. *Neurocomputing*, 2020, doi.org/10.1016/j.neucom.2020.02.064.
- [2] DUAN W, LI Y, CHEN J. An enhanced stability criterion for linear time-delayed systems via new Lyapunov-Krasovskii functionals.

Advances in Difference Equations, 2020, DOI: 10.1186/s13662-019-2439-z.

- [3] DUAN W, LI Y, CHEN J. Further stability analysis for time-delayed neural networks based on an augmented Lyapunov functional. *IEEE Access*, 2019, 7: 104655 – 104666.
- [4] ALEXANDROVA I. On the robustness and estimation of the attraction region for a class of nonlinear time delay systems. *Applied Mathematics Letters*, 2020, 106: 106374.
- [5] ZHANG C, LONG F, HE Y, et al. A relaxed quadratic function negative-determination lemma and its application to time-delay systems. *Automatica*, 2020, 113: 108764.
- [6] ZIMENKO K, EFIMOV D, POLYAKOV A, et al. Independent of delay stabilization using implicit Lyapunov function method. *Automatica*, 2019, 101: 103 – 110.
- [7] HUANG T, SUN Y. Finite-time stability of switched linear time-delay systems based on time-dependent Lyapunov functions. *IEEE Access*, 2020, 8: 41551 – 41556.
- [8] REN W, XIONG J. Vector-Lyapunov-function-based input-to-state stability of stochastic impulsive switched time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(2): 654 – 669.
- [9] DUAN W, LI Y, SUN Y, et al. Enhanced master-slave synchronization criteria for chaotic Lur'e systems based on time-delayed feedback control. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2020, 177: 276 – 294.
- [10] DUAN W, FU X, LIU Z, et al. Improved robust stability criteria for time-delay Lur'e system. *Asian Journal of Control*, 2017, 19(1): 1 – 12.
- [11] DUAN W, FU X, YANG X. Further results on the robust stability for neutral-type Lur'e system with mixed delays and sector-bounded nonlinearities. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2016, 14(2): 560 – 568.
- [12] RAKHSHAN S, EFFATI S. Fractional optimal control problems with time-varying delay: A new delay fractional Euler-Lagrange equations. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, 357(10): 5954 – 5988.
- [13] CHEN J, PARK J, XU S. Stability analysis of discrete-time neural networks with an interval-like time-varying delay. *Neurocomputing*, 2019, 329: 248 – 254.
- [14] LIAO D, ZHONG S, CHEN J, et al. New stability criteria of discrete systems with time-varying delays. *IEEE Access*, 2019, 7: 1677 – 1684.
- [15] LIAO D, ZHONG S, CHEN J, et al. A new result on stability analysis for discrete system with interval time-varying delays. *Advances in Difference Equations*, 2019, DOI: 10.1186/s13662-019-2006-7.
- [16] QIU S, LIU X, WANG F, et al. Stability and passivity analysis of discrete-time linear systems with time-varying delay. *Systems & Control Letters*, 2019, 134: 104543.
- [17] GONG D, WANG X, WU S, et al. Discrete legendre polynomials-based inequality for stability of time-varying delayed systems. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, 356(16): 9907 – 9927.
- [18] PARK J, LEE S, PARK P. An improved stability criteria for neutral-type Lur'e systems with time-varying delays. *Journal of the Franklin Institute*, 2018, 355(12): 5291 – 5309.
- [19] DUAN W, DU B, LI Y, et al. Improved sufficient LMI conditions for the robust stability of time-delayed neutral-type Lure systems. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2018, 16(5): 2343 – 2353.
- [20] DUAN W, FU X, LIU Z. Improved robust stability criteria for time-delay Lur'e system. *Asian Journal of Control*, 2017, 19(1): 139 – 150.
- [21] RAMAKRISHNAN K, RAY G. Delay-dependent stability criteria for uncertain discrete-time Lur'e systems with sector-bounded nonlinearity. *Mathematical Modelling and Scientific Computation*, 2012, 283: 210 – 219.

- [22] RAMAKRISHNAN K, RAY G. Delay-dependent stability criteria for uncertain discrete-time Lur'e systems with sector-bounded nonlinearity. *Mediterranean Journal of Measurement and Control*, 2014, 10(3): 267 – 272.
- [23] DUAN W, CAI C. Delay-range-dependent stability criteria for delayed discrete-time Lur'e system with sector-bounded nonlinearities. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 78(1): 135 – 145.
- [24] PARK J, LEE S, PARK P. A less conservative stability criterion for discrete-time Lur'e systems with sector and slope restrictions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(10): 4391 – 4395.
- [25] ZHANG P, XU Y, SHEN T. An improved stability criterion for discrete-time Lur'e systems with time-varying delay. *Proceedings of 2018 Chinese Automation Congress*. Xi'an, China: IEEE, 2018: 305 – 310.
- [26] BRIAT C. Convergence and equivalence results for the Jensen's inequality-Application to time-delay and sampled-data systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(7): 1660 – 1665.
- [27] HUANG H, FENG G. Improved approach to delay-dependent stability analysis of discrete-time systems with time-varying delay. *IET Control Theory and Applications*, 2010, 4(10): 2152 – 2159.
- [28] KHALIL H. *Nonlinear Systems*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1996.
- [29] PARK P, JEONG W. Stability and robust stability for systems with a time-varying delay. *Automatica*, 2007, 43(10): 1855 – 1858.

作者简介:

冯文希 高级工程师, 博士研究生, 目前研究方向为人工智能控制理论与应用, E-mail: 1040557750@qq.com;

罗 飞 教授, 博士生导师, 目前研究方向为智能控制理论与应用、智能远程监控技术及应用等, E-mail: aufeiluo@scut.edu.cn;

裴海龙 教授, 博士生导师, 目前研究方向为自适应、自组织控制、智能机器人系统等, E-mail: auhlpei@scut.edu.cn;

张先勇 教授, 硕士生导师, 目前研究方向为智能电网稳定控制与优化、电力电子与可再生能源, E-mail: zhangfriendjun@163.com;

段文勇 副教授, 硕士生导师, 目前研究方向为系统鲁棒稳定性分析与控制综合, E-mail: dwy1985@126.com.