

具有噪声方差及多种网络诱导不确定系统鲁棒Kalman估计

杨春山[†], 经本钦, 刘政, 王建琦

(桂林航天工业学院 电子信息与自动化学院, 广西 桂林 541004)

摘要: 对不确定噪声方差乘性噪声, 同时带观测缺失、丢包和一步随机观测滞后三种网络诱导特征的混合不确定网络化系统, 应用带虚拟噪声的扩维方法和去随机参数方法, 将其转化为带不确定虚拟噪声方差的时变系统. 基于极大极小鲁棒估计原理, 对带虚拟噪声方差保守上界的最坏情形系统, 设计了鲁棒时变和稳态Kalman估值器. 对所有容许的不确定性, 保证实际Kalman估计误差方差有最小上界. 应用扩展的Lyapunov方程方法和矩阵分解方法证明了所设计估值器的鲁棒性. 证明了实际和保守估值器的精度关系, 以及时变和稳态估值器间的按实现收敛性. 应用于F-404航空发动机系统的仿真验证了所提出结果的正确性和有效性.

关键词: 不确定噪声方差; 乘性噪声; 多网络诱导特征; 扩展Lyapunov方程方法; 极大极小鲁棒估计方法

引用格式: 杨春山, 经本钦, 刘政, 等. 具有噪声方差及多种网络诱导不确定系统鲁棒Kalman估计. 控制理论与应用, 2021, 38(10): 1607–1618

DOI: 10.7641/CTA.2021.00598

Robust Kalman estimation for system with uncertainties of noise variances and multiple networked inducements

YANG Chun-shan[†], JING Ben-qin, LIU Zheng, WANG Jian-qi

(College of Electronic Information and Automation, Guilin University of Aerospace Technology, Guilin Guangxi 541004, China)

Abstract: By using the augmented method with fictitious noise and derandomization approach, the networked mixed uncertain system with uncertain variances-multiplicative noises, and three networked induced features, including missing measurement, packet dropouts and one-step random measurement delay, is converted into time-varying system with uncertain fictitious noise variances. Then, based on the minimax robust estimation principle, the robust time-varying and steady-state Kalman estimators are designed for worst-case system with conservative upper bound of fictitious noise variances. For all admissible uncertainties, the actual Kalman estimation error variances are guaranteed to have minimal upper bounds. The robustness of designed estimators is proved by extended Lyapunov equation method and matrix decomposition method. The accuracy relations between actual and conservative estimators, and the convergence in a realization between time-varying and steady-state are proved. A numerical example used to F-404 aircraft engine system shows the correctness and effectiveness of the proposed results.

Key words: uncertain noise variances; multiplicative noises; multiple networked induced features; extended Lyapunov equation method; minimax robust estimation method

Citation: YANG Chunshan, JING Benqin, LIU Zheng, et al. Robust Kalman estimation for system with uncertainties of noise variances and multiple networked inducements. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(10): 1607–1618

1 引言

因灵活便利、易维护和低成本, 网络化控制系统和传感器网络受到广泛关注, 得到了快速发展^[1–3]. 但由于传感器的自身老化或故障, 以及通信网络的带宽有限和不可靠性, 也带来一系列的问题, 如各种网络诱导不确定, 观测数据缺失^[4]、数据包丢失^[5–6]和时延^[7]等. 同时数据在传送过程中很容易受到外界非线性很

强的乘性噪声的干扰. 因此, 网络化系统的状态估计问题是非常必要且有意义的, 也出现了大量的研究成果^[8–22]. 对带网络诱导不确定和乘性噪声的网络化系统的状态估计, 常用的方法有Riccati方程方法^[8–9]、线性矩阵不等式方法(LMI)^[10–11]、最优鲁棒估计方法^[12–14]和极大极小鲁棒估计方法^[15–22]. 文献[8]利用观测转换和扩维方法, 对带范数有界参数不确定、随

收稿日期: 2020–09–07; 录用日期: 2021–02–16.

[†]通信作者. E-mail: ycszy1999@guat.edu.cn; Tel.: +86 18945031997.

本文责任编辑: 周彤.

国家自然科学基金项目(61966010, 61863008)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61966010, 61863008).

机时延和丢包的网络化系统,通过Riccati方程方法,设计了鲁棒Kalman滤波器,对所有可容许的不确定,保证误差方差有上界. Riccati方程的求解多为迭代法,收敛性得不到保证,且不能解决带噪声方差不确定系统鲁棒估计问题. 文献[10–11]对带范数有界不确定和单一网络诱导不确定(观测缺失^[10]和丢包^[11])的系统,使用LMI方法设计了鲁棒滤波器,对所有的不确定性,每个状态分量估计误差方差不超过预置的上界.

假设噪声统计精确已知的情形,使用扩维方法、新息方法和线性最小方差(LMV)方法,文献[12–14]设计了最小方差意义下的最优鲁棒滤波器. 该滤波器在随机不确定干扰下可保证最优性. 文献[12]使用扩维方法,对自相关过程噪声、一步随机观测滞后和观测缺失的系统,设计了最优滤波器. 文献[13]对带乘性噪声和丢包系统,提出使用丢失观测的预报值补偿的策略,使用新息方法和线性无偏最小方差估计准则,设计了最优线性滤波器. 文献[14]对信道衰减的网络化系统,应用新息方法设计了最优线性滤波器.

极大极小鲁棒估计方法是对最坏情形保守系统设计最小方差滤波器,可极小化滤波误差方差. 常用的极大极小鲁棒估计方法有 H_∞ 鲁棒滤波方法^[15–17]和基于Lyapunov方程方法的极大极小鲁棒滤波方法^[18–22]. H_∞ 鲁棒滤波可将不确定干扰到估计误差的最坏情形能量增益极小化或小于预置指标,分别使用Riccati方程方法^[15]、博弈论^[16]和LMI方法^[17]求解 H_∞ 滤波器. 基于Lyapunov方程方法的极大极小鲁棒估计原理,是假设噪声方差未知不确定,但有已知保守上界,对带保守上界的最坏情形系统设计最小方差滤波器,通过Lyapunov方程方法证明鲁棒性. 文献[18–20]对带不确定方差、乘性噪声和单一的网络诱导不确定系统,研究了保最小上界鲁棒Kalman估计问题,对所容许的不确定,保证实际误差方差有最小上界,其中丢包^[18]、观测缺失^[19]、随机观测滞后^[20]3种网络诱导不确定分别被考虑. 在此基础上,文献[21–22]对不确定方差、乘性噪声和两种网络诱导不确定系统,解决了保最小上界鲁棒Kalman估计问题,如随机观测滞后和丢包^[21]、随机观测滞后和观测缺失^[22]分别被考虑. 目前,综合评价系统中同时具有不确定方差、乘性噪声和3种网络诱导不确定(观测缺失、丢包和随机观测滞后)的鲁棒估计问题尚未见报道.

本文对不确定噪声方差、乘性噪声、观测缺失、丢包和一步随机观测滞后的混合不确定网络化系统,应用带虚拟噪声的扩维方法将其转化为等价的带随机参数的扩维系统,然后应用去随机参数方法转化为常参数、噪声统计时变且相关的系统. 基于极大极小鲁棒估计原理,设计鲁棒时变和稳态Kalman估值器. 应用扩展的Lyapunov方程方法(包括两个广义Lyapunov

方程)和矩阵分解方法证明了鲁棒性. 完成了收敛性和精度关系证明.

本文中 \mathbb{R}^n 表示 n 维Euclidean空间, $\mathbb{R}^{n \times n}$ 表示 $n \times n$ 矩阵, $\text{Prab}(A)$ 表示事件 A 发生的概率,上标“ s ”和“ T ”表示稳态和矩阵的转置, $E[A]$ 表示随机变量的数学期望, $\text{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹, $\text{diag}\{\cdot\}$ 表示对角阵, I_n 表示 n 阶单位矩阵, O 表示适当维数的零矩阵, \otimes 和 δ_{ij} 表示Kronecker乘积和Kronecker函数.

2 问题描述

考虑带不确定噪声方差、乘性噪声、观测缺失、丢包和一步随机观测滞后的混合不确定网络化系统

$$x(t+1) = (\Phi + \sum_{i=1}^p \gamma_i(t)\Phi_i^\gamma)x(t) + \Gamma w(t), \quad (1)$$

$$z(t) = H\xi(t)x(t) + v(t), \quad (2)$$

$$y(t) = \lambda(t)z(t) + (1 - \lambda(t))\xi(t)z(t-1) + (1 - \lambda(t))(1 - \xi(t))y(t-1), \quad (3)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态向量, $z(t) \in \mathbb{R}^m$ 为传感器的观测输出; 传感器输出经传输网络传送到估值器的观测为 $y(t) \in \mathbb{R}^m$; $w(t)$ 和 $v(t)$ 分别为系统的输入噪声和观测噪声; $\gamma_i(t)$ 为状态相依乘性噪声, $\Phi, \Phi_i^\gamma, \Gamma$ 和 H 为已知适当维数的常阵.

传感器老化或故障、连接传感器和估值器的传输网络带宽有限和不可靠性等原因,将导致观测缺失、数据包丢失和观测随机延迟或滞后,本文使用 $\xi(t)$ 和 $\lambda(t)$ 两个Bernoulli随机变量共同描述这些不确定. $\xi(t)$ 和 $\lambda(t)$ 不相关于 $w(t)$, $v(t)$ 和 $\gamma_i(t)$,它们取值1或0的概率为

$$\begin{aligned} \text{Prab}\{\xi(t) = 1\} &= \pi_\xi, \quad \text{Prab}\{\xi(t) = 0\} = 1 - \pi_\xi, \\ \text{Prab}\{\lambda(t) = 1\} &= \pi_\lambda, \quad \text{Prab}\{\lambda(t) = 0\} = 1 - \pi_\lambda. \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $0 \leq \pi_\lambda, \pi_\xi \leq 1$. 由式(2)和式(3),有以下4种情形:

1) 如果 $\xi(t) = 1, \lambda(t) = 1$,表示传感器和传输网络均正常工作,估值器及时收到正确的数据.

2) 如果 $\xi(t) = 1, \lambda(t) = 0$,表示传感器输出正常,传输网络异常,估值器不会及时收到正确的数据,则使用前一时刻的传感器观测输出进行估计,则 $y(t) = z(t-1)$,即一步观测滞后.

3) 如果 $\xi(t) = 0, \lambda(t) = 1$,表示传感器输出的数据包仅包含观测噪声,而传输网络正常,但估值器无法识别和判断这样错误的的数据,仍然使用收到的观测进行估计,则 $y(t) = v(t)$,发生观测缺失.

4) 如果 $\xi(t) = 0, \lambda(t) = 0$,表示传感器和传输网络均异常,则使用前一时刻估值器收到的观测 $y(t-1)$ 进行估计, $y(t) = y(t-1)$,即发生了丢包.

注1 观测缺失和丢包容易混淆,观测缺失一般发生

在传感器节点, 传感器获得并封装的数据不包含状态信息, 仅包含观测噪声 $v(t)$. 该数据包经传输网络传送到估值器, 估值器不能通过差错检验分辨数据包的错误, 仍使用仅包含观测噪声的数据包进行估计. 而丢包是传感器节点获得正确的数据并封装, 但经传输网络传送过程中, 因网络的不可靠性等原因, 该数据包没有被传送到估值器, 发生的数据包丢失.

假设 1 $w(t), v(t)$ 和 $\gamma_i(t)$ 是均值为0, 未知不确定实际方差分别为 \bar{Q}, \bar{R} 和 \bar{R}_{γ_i} 的互不相关白噪声, 即

$$E \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} w(j) \\ v(j) \\ \gamma_i(j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(k) \\ v(k) \\ \gamma_m(k) \end{bmatrix}^T \end{bmatrix} = \delta_{jk} \begin{bmatrix} \bar{Q} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{R} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{R}_{\gamma_i} \delta_{im} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

假设 2 系统初值 $x(0)$ 与 $w(t), v(t)$ 和 $\gamma_i(t)$ 不相关, 且 $E[x(0)] = \mu_0, E[(x(0) - \mu_0)(x(0) - \mu_0)^T] = \bar{P}_0$, 其中 \bar{P}_0 是未知不确定实际方差.

假设 3 $\bar{Q}, \bar{R}, \bar{R}_{\gamma_i}$ 和 \bar{P}_0 分别有保守上界 Q, R, R_{γ_i} 和 P_0 , 即有

$$\bar{Q} \leq Q, \bar{R} \leq R, \bar{R}_{\gamma_i} \leq R_{\gamma_i}, \bar{P}_0 \leq P_0. \quad (6)$$

注 2 对实际系统和保守系统定义如下: 带实际方差 $\bar{Q}, \bar{R}, \bar{R}_{\gamma_i}$ 和 \bar{P}_0 的系统(1)–(3)称为实际系统, 它的状态和观测分别称为实际状态和实际观测. 带方差的已知保守上界 Q, R, R_{γ_i} 和 P_0 的系统(1)–(3)称为最坏情形(保守)系统, 它的状态和观测分别称为保守状态和保守观测. 实际观测是通过传感器获得的, 是已知可利用的; 而保守观测是未知不可利用的. 极大极小鲁棒估计原理是对最坏情形系统(带最大噪声方差和初始状态方差保守系统)设计最小方差估值器, 即极大极小鲁棒估值器.

本文对不确定噪声方差、乘性噪声、观测缺失、丢包和一步随机观测滞后网络化系统(1)–(3), 基于极大极小鲁棒估计原理, 设计鲁棒时变Kalman估值器 $\hat{x}(t|t+N)$ 和鲁棒稳态Kalman估值器 $\hat{x}^s(t|t+N)$, 其中 $N = -1$ 时为预报器, $N = 0$ 时为滤波器, $N > 1$ 时为平滑器.

3 模型转换

定义虚拟噪声

$$w_n(t) = \sum_{i=1}^p \gamma_i(t) \Phi_i^T x(t) + \Gamma w(t),$$

并引入扩维的系统状态 $x_a(t)$ 和噪声 $w_a(t)$

$$\begin{cases} x_a^T(t) = [x^T(t) \ z^T(t-1) \ y^T(t-1)], \\ w_a^T(t) = [w_n^T(t) \ v^T(t-1)], \end{cases} \quad (7)$$

则原系统(1)–(3)等价于扩维系统

$$x_a(t+1) = \Phi_a(t)x_a(t) + \Gamma_a(t)w_a(t), \quad (8)$$

$$y(t) = H_a(t)x_a(t) + \lambda(t)v(t), \quad (9)$$

$$\Phi_a(t) = \Phi_1 + (\lambda(t) - 1)\Phi_2 + \xi(t)\Phi_3 + \lambda(t)\xi(t)\Phi_4,$$

$$\begin{aligned} H_a(t) &= (\lambda(t) - 1)H_1 + \xi(t)H_2 + \lambda(t)\xi(t)H_3, \\ \Gamma_a(t) &= \Gamma_1 + \lambda(t)\Gamma_2, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Phi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_m \end{bmatrix},$$

$$\Phi_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ H & 0 & 0 \\ 0 & I_m & -I_m \end{bmatrix}, \Phi_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ H & -I_m & -I_m \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} H_1 &= [0 \ 0 \ -I_m], H_2 = [0 \ I_m \ -I_m], \\ H_3 &= [H \ -I_m \ I_m]. \end{aligned} \quad (11)$$

对 $\xi(t)$ 和 $\lambda(t)$ 有统计特性

$$\begin{cases} E[\lambda(t)] = \pi_\lambda, E[\xi(t)] = \pi_\xi, \\ E[\lambda^2(t)] = \pi_\lambda, E[\xi^2(t)] = \pi_\xi, \\ E[\lambda(t)\xi(t)] = \pi_\lambda\pi_\xi, E[\lambda^2(t)\xi^2(t)] = \pi_\lambda\pi_\xi, \end{cases} \quad (12)$$

定义

$$\begin{aligned} \lambda_0(t) &= \lambda(t) - \pi_\lambda, \xi_0(t) = \xi(t) - \pi_\xi, \\ \beta_0(t) &= \lambda(t)\xi(t) - \pi_\lambda\pi_\xi. \end{aligned} \quad (13)$$

易证得它们互不相关且均值为零, 方差分别为

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_0 = E[\lambda_0^2(t)] = \pi_\lambda(1 - \pi_\lambda), \\ \bar{\xi}_0 = E[\xi_0^2(t)] = \pi_\xi(1 - \pi_\xi), \\ \bar{\beta}_0 = E[\beta_0^2(t)] = \pi_\lambda\pi_\xi(1 - \pi_\lambda\pi_\xi). \end{cases} \quad (14)$$

对 $\Phi_a(t)$ 和 $H_a(t)$ 有统计特性

$$\begin{cases} \bar{\Phi}_a = E[\Phi_a(t)] = \\ \Phi_1 + (\pi_\lambda - 1)\Phi_2 + \pi_\xi\Phi_3 + \pi_\xi\pi_\lambda\Phi_4, \\ \bar{H}_a = E[H_a(t)] = \\ (\pi_\lambda - 1)H_1 + \pi_\xi H_2 + \pi_\xi\pi_\lambda H_3, \end{cases} \quad (15)$$

定义 $\tilde{\Phi}_a(t) = \Phi_a(t) - \bar{\Phi}_a, \tilde{H}_a(t) = H_a(t) - \bar{H}_a$, 根据式(10)和式(15), 有

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_a(t) &= \lambda_0(t)\Phi_2 + \xi_0(t)\Phi_3 + \beta_0(t)\Phi_4, \\ \tilde{H}_a(t) &= \lambda_0(t)H_1 + \xi_0(t)H_2 + \beta_0(t)H_3. \end{aligned} \quad (16)$$

则扩维系统(8)和(9)可转化为带常参数和时变虚拟噪声统计的系统

$$x_a(t+1) = \bar{\Phi}_a x_a(t) + w_f(t), \quad (17)$$

$$y(t) = \bar{H}_a x_a(t) + v_f(t), \quad (18)$$

其中定义虚拟噪声

$$w_f(t) = \tilde{\Phi}_a(t)x_a(t) + \Gamma_a(t)w_a(t), \quad (19)$$

$$v_f(t) = \tilde{H}_a(t)x_a(t) + \lambda(t)v(t). \quad (20)$$

为获得 $w_f(t)$ 和 $v_f(t)$ 的噪声统计特性, 首先给出几个相关引理, 引理证明见附录.

引理 1^[6] 若 $R_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ 和 $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 是半正定的, 则有

$$i) \text{diag}\{R_1, \dots, R_L\} \geq 0,$$

$$ii) \begin{bmatrix} D & \dots & D \\ \vdots & & \vdots \\ D & \dots & D \end{bmatrix} \geq 0.$$

引理 2 在假设1-3下, 对所有可容许的不确定方差(6), $x(t)$ 的保守和实际非中心二阶矩 $X(t)$ 和 $\bar{X}(t)$ 分别满足以下广义Lyapunov方程:

$$X(t+1) = \Phi X(t)\Phi^T + \sum_{i=1}^p R_{\gamma_i} \Phi_i^\gamma X(t)\Phi_i^{\gamma T} + \Gamma Q \Gamma^T, \quad (21)$$

$$\bar{X}(t+1) = \Phi \bar{X}(t)\Phi^T + \sum_{i=1}^p \bar{R}_{\gamma_i} \Phi_i^\gamma \bar{X}(t)\Phi_i^{\gamma T} + \Gamma \bar{Q} \Gamma^T. \quad (22)$$

带保守和实际的初值分别为

$$X(0) = P_0 + \mu_0 \mu_0^T, \quad \bar{X}(0) = \bar{P}_0 + \mu_0 \mu_0^T, \quad (23)$$

$X(t)$, $\bar{X}(t)$ 和 $\Delta X(t) = X(t) - \bar{X}(t)$ 均是半正定的, 即

$$X(t) \geq 0, \quad \bar{X}(t) \geq 0, \quad \Delta X(t) \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (24)$$

引理 3 在假设1-3下, 对所有可容许的不确定方差(6), $w_a(t)$ 是均值为零的白噪声, 有保守和实际的方差

$$\begin{cases} Q_a(t) = \text{diag}\{Q_n(t), R\}, \\ \bar{Q}_a(t) = \text{diag}\{\bar{Q}_n(t), \bar{R}\}, \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} Q_n(t) = \sum_{i=1}^p R_{\gamma_i} \Phi_i^\gamma X(t)\Phi_i^{\gamma T} + \Gamma Q \Gamma^T, \\ \bar{Q}_n(t) = \sum_{i=1}^p \bar{R}_{\gamma_i} \Phi_i^\gamma \bar{X}(t)\Phi_i^{\gamma T} + \Gamma \bar{Q} \Gamma^T, \end{cases} \quad (26)$$

$w_a(t)$ 与 $v(t)$ 是线性相关的, 保守和实际的相关矩阵为

$$S_a = \begin{bmatrix} O \\ R \end{bmatrix}, \quad \bar{S}_a = \begin{bmatrix} O \\ \bar{R} \end{bmatrix},$$

且 $\Delta Q_a(t) = Q_a(t) - \bar{Q}_a(t)$ 是半正定的, 即

$$\Delta Q_a(t) \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (27)$$

引理 4 在假设1-3下, 对所有可容许的不确定方差(6), 扩维状态 $x_a(t)$ 的保守和实际非中心二阶矩 $X_a(t)$ 和 $\bar{X}_a(t)$ 分别满足以下广义Lyapunov方程:

$$X_a(t+1) = \bar{\Phi}_a X_a(t)\bar{\Phi}_a^T + \bar{\lambda}_0 \Phi_2 X_a(t)\Phi_2^T + \bar{\xi}_0 \Phi_3 X_a(t)\Phi_3^T + \bar{\beta}_0 \Phi_4 X_a(t)\Phi_4^T + (1 - \pi_\lambda) \Gamma_1 Q_a(t) \Gamma_1^T +$$

$$\pi_\lambda C Q_a(t) C^T, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \bar{X}_a(t+1) = & \bar{\Phi}_a \bar{X}_a(t)\bar{\Phi}_a^T + \bar{\lambda}_0 \Phi_2 \bar{X}_a(t)\Phi_2^T + \\ & \bar{\xi}_0 \Phi_3 \bar{X}_a(t)\Phi_3^T + \bar{\beta}_0 \Phi_4 \bar{X}_a(t)\Phi_4^T + \\ & (1 - \pi_\lambda) \Gamma_1 \bar{Q}_a(t) \Gamma_1^T + \\ & \pi_\lambda C \bar{Q}_a(t) C^T, \end{aligned} \quad (29)$$

其中 $C = \Gamma_1 + \Gamma_2$. 带保守和实际的初值分别为

$$X_a(0) = \begin{bmatrix} X(0) & O \\ O & O \end{bmatrix}, \quad \bar{X}_a(0) = \begin{bmatrix} \bar{X}(0) & O \\ O & O \end{bmatrix}, \quad (30)$$

且 $\Delta X_a(t) = X_a(t) - \bar{X}_a(t)$ 是半正定的, 即

$$\Delta X_a(t) \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (31)$$

基于引理2-4, 对扩维系统(17)和(18), 虚拟噪声 $w_f(t)$ 和 $v_f(t)$ 的保守和实际的噪声方差分别为

$$Q_f(t) = \bar{\lambda}_0 \Phi_2 X_a(t)\Phi_2^T + \bar{\xi}_0 \Phi_3 X_a(t)\Phi_3^T + \bar{\beta}_0 \Phi_4 X_a(t)\Phi_4^T + \pi_\lambda C Q_a(t) C^T + (1 - \pi_\lambda) \Gamma_1 Q_a(t) \Gamma_1^T, \quad (32)$$

$$\bar{Q}_f(t) = \bar{\lambda}_0 \Phi_2 \bar{X}_a(t)\Phi_2^T + \bar{\xi}_0 \Phi_3 \bar{X}_a(t)\Phi_3^T + \bar{\beta}_0 \Phi_4 \bar{X}_a(t)\Phi_4^T + \pi_\lambda C \bar{Q}_a(t) C^T + (1 - \pi_\lambda) \Gamma_1 \bar{Q}_a(t) \Gamma_1^T, \quad (33)$$

$$R_f(t) = \bar{\lambda}_0 H_1 X_a(t) H_1^T + \bar{\xi}_0 H_2 X_a(t) H_2^T + \bar{\beta}_0 H_3 X_a(t) H_3^T + \pi_\lambda R, \quad (34)$$

$$\bar{R}_f(t) = \bar{\lambda}_0 H_1 \bar{X}_a(t) H_1^T + \bar{\xi}_0 H_2 \bar{X}_a(t) H_2^T + \bar{\beta}_0 H_3 \bar{X}_a(t) H_3^T + \pi_\lambda \bar{R}, \quad (35)$$

且 $w_f(t)$ 和 $v_f(t)$ 是线性相关的, 保守和实际的相关阵分别为

$$\begin{cases} S_f(t) = \bar{\lambda}_0 \Phi_2 X_a(t) H_1^T + \bar{\xi}_0 \Phi_3 X_a(t) H_2^T + \bar{\beta}_0 \Phi_4 X_a(t) H_3^T + \pi_\lambda C S_a, \\ \bar{S}_f(t) = \bar{\lambda}_0 \Phi_2 \bar{X}_a(t) H_1^T + \bar{\xi}_0 \Phi_3 \bar{X}_a(t) H_2^T + \bar{\beta}_0 \Phi_4 \bar{X}_a(t) H_3^T + \pi_\lambda C \bar{S}_a. \end{cases} \quad (36)$$

问题转化为对常参数、线性相关噪声的不确定虚拟噪声方差时变扩维系统(17)和(18), 设计极大极小鲁棒Kalman估值器. 再利用 $x(t)$ 和 $x_a(t)$ 的关系, 可得原始系统的鲁棒Kalman估值器.

4 鲁棒时变Kalman估值器

4.1 鲁棒时变Kalman预报器

对带虚拟噪声方差保守上界 $Q_f(t)$, $R_f(t)$ 和相关阵 $S_f(t)$ 的最坏情形扩维系统(17)和(18), 在假设1-3条件下, 应用极大极小鲁棒估计原理, 保守时变Kalman预报器^[18]

$$\hat{x}_a(t+1|t) = \Psi_{pa}(t) \hat{x}_a(t|t-1) + K_{pa}(t) y(t), \quad (37)$$

$$K_{pa}(t) = [\bar{\Phi}_a P_a(t|t-1) \bar{H}_a^T + S_f(t)] \times$$

$$[\bar{H}_a P_a(t|t-1)\bar{H}_a^T + R_f(t)]^{-1}, \quad (38)$$

$$\Psi_{pa}(t) = \bar{\Phi}_a - K_{pa}(t)\bar{H}_a. \quad (39)$$

带初值 $\hat{x}_a(0|-1) = [\mu_0 \ 0 \ 0]^T$. $P_a(t|t-1)$ 满足保守的时变Riccati方程

$$\begin{aligned} P_a(t+1|t) = & \bar{\Phi}_a P_a(t|t-1)\bar{\Phi}_a^T - \\ & [\bar{\Phi}_a P_a(t|t-1)\bar{H}_a^T + S_f(t)] \times \\ & [\bar{H}_a P_a(t|t-1)\bar{H}_a^T + R_f(t)]^{-1} \times \\ & [\bar{\Phi}_a P_a(t|t-1)\bar{H}_a^T + S_f(t)]^T + Q_f(t). \end{aligned} \quad (40)$$

定义预报误差 $\tilde{x}_a(t+1|t) = x_a(t+1) - \hat{x}_a(t+1|t)$, 将式(17)和式(37)带入, 并定义扩维噪声和矩阵

$$\eta^T(t) = [w_f^T(t) \ v_f^T(t)], \quad \Gamma_\eta(t) = [I_{n+2m} - K_{pa}(t)],$$

则预报误差 $\tilde{x}_a(t+1|t)$ 可重写为

$$\tilde{x}_a(t+1|t) = \Psi_{pa}(t)\tilde{x}_a(t|t-1) + \Gamma_\eta(t)\eta(t). \quad (41)$$

依据式(32)–(36), $\eta(t)$ 的保守和实际的噪声方差分别为

$$\begin{cases} M(t) = \begin{bmatrix} Q_f(t) & S_f(t) \\ S_f^T(t) & R_f(t) \end{bmatrix}, \\ \bar{M}(t) = \begin{bmatrix} \bar{Q}_f(t) & \bar{S}_f(t) \\ \bar{S}_f^T(t) & \bar{R}_f(t) \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (42)$$

因此, 预报误差方差 $P_a(t+1|t)$ 也分别满足

$$P_a(t+1|t) = \Psi_{pa}(t)P_a(t|t-1)\Psi_{pa}^T(t) + \Gamma_\eta(t)M(t)\Gamma_\eta^T(t), \quad (43)$$

$$\bar{P}_a(t+1|t) = \Psi_{pa}(t)\bar{P}_a(t|t-1)\Psi_{pa}^T(t) + \Gamma_\eta(t)\bar{M}(t)\Gamma_\eta^T(t), \quad (44)$$

带初值

$$P_a(0|-1) = \text{diag}\{P_0, O, O\},$$

$$\bar{P}_a(0|-1) = \text{diag}\{\bar{P}_0, O, O\}.$$

为证明估值器的鲁棒性, 需要下面的引理, 证明见附录.

引理 5 在假设1–3下, 对所有可容许的不确定方差(6), 对保守和实际的噪声方差 $M(t)$ 和 $\bar{M}(t)$, 有 $\Delta M(t) = M(t) - \bar{M}(t) \geq 0$, 即

$$\bar{M}(t) \leq M(t). \quad (45)$$

定理 1 对于带虚拟噪声方差保守上界 $Q_f(t)$, $R_f(t)$ 和相关阵 $S_f(t)$ 的最坏情形扩维系统(17)和(18), 在假设1–3下, 实际时变Kalman预报器(37)是鲁棒的, 即对所有可容许的不确定性(6), 有

$$\bar{P}_a(t+1|t) \leq P_a(t+1|t), \quad (46)$$

且 $P_a(t+1|t)$ 是 $\bar{P}_a(t+1|t)$ 的最小上界.

证 定义

$$\Delta P_a(t+1|t) = P_a(t+1|t) - \bar{P}_a(t+1|t),$$

式(43)减去式(44), 有

$$\begin{aligned} \Delta P_a(t+1|t) = & \Psi_{pa}(t)\Delta P_a(t|t-1)\Psi_{pa}^T(t) + \\ & \Gamma_\eta(t)\Delta M(t)\Gamma_\eta^T(t). \end{aligned} \quad (47)$$

由假设3和引理5, 有 $\Delta P_a(0|-1) \geq 0$ 和 $\Delta M(t) \geq 0$. 迭代式(47), 可得 $\Delta P_a(t+1|t) \geq 0$, 即不等式(46)成立.

为证明 $P_a(t+1|t)$ 是 $\bar{P}_a(t+1|t)$ 的最小上界, 在满足条件(6)下, 取

$$\bar{Q} = Q, \quad \bar{R} = R, \quad \bar{R}_{\gamma_i} = R_{\gamma_i}, \quad \bar{P}_0 = P_0,$$

有 $\Delta Q = 0, \Delta R = 0, \Delta R_{\gamma_i} = 0, \Delta X(t) = 0, \Delta Q_f(t) = 0, \Delta R_f(t) = 0, \Delta S_f(t) = 0, \Delta M(t) = 0$ 和 $\Delta P_a(0|-1) = 0$. 迭代式(47)可得

$$\Delta P_a(t+1|t) = 0,$$

即 $P_a(t+1|t) = \bar{P}_a(t+1|t)$. 如果 $P_a^*(t+1|t)$ 是 $\bar{P}_a(t+1|t)$ 的另一个上界, 则有 $P_a(t+1|t) = \bar{P}_a(t+1|t) \leq P_a^*(t+1|t)$, 因此, $P_a(t+1|t)$ 是 $\bar{P}_a(t+1|t)$ 的最小上界. 证毕.

4.2 鲁棒时变Kalman滤波器和平滑器

基于鲁棒Kalman预报器 $\hat{x}_a(t|t-1)$, 实际的时变Kalman滤波器 ($N=0$) 和平滑器 ($N>0$) 统一为^[18]

$$\begin{aligned} \hat{x}_a(t|t+N) = & \hat{x}_a(t|t-1) + \\ & \sum_{j=0}^N K_a(t|t+j)\varepsilon_a(t+j), \end{aligned} \quad (48)$$

$$\varepsilon_a(t+j) = y(t+j) - \bar{H}_a\hat{x}_a(t+j|t+j-1), \quad (49)$$

$$K_a(t|t+j) = P_a(t|t-1) \times$$

$$\left\{ \prod_{s=0}^{j-1} \Psi_{pa}^T(t+s) \right\} \bar{H}_a^T Q_{a\varepsilon}^{-1}(t), \quad (50)$$

$$Q_{a\varepsilon}(t) = [\bar{H}_a P_a(t|t-1)\bar{H}_a^T + R_f(t)], \quad (51)$$

其中 $\Psi_{pa}(t)$ 和 $P_a(t+1|t)$ 分别由式(39)和式(40)给出. 实际和保守的滤波和平滑误差方差 $\bar{P}_a(t|t+N)$ 和 $P_a(t|t+N)$ 满足

$$\begin{aligned} \bar{P}_a(t|t+N) = & \Psi_N(t)\bar{P}_a(t|t-1)\Psi_N^T(t) + \\ & \sum_{\rho=0}^N [K_\rho^{wN}(t) \ K_\rho^{vN}(t)] \times \\ & \bar{M}(t+\rho)[K_\rho^{wN}(t) \ K_\rho^{vN}(t)]^T, \end{aligned} \quad (52)$$

$$P_a(t|t+N) = \Psi_N(t)P_a(t|t-1)\Psi_N^T(t) + \sum_{\rho=0}^N [K_\rho^{wN}(t) \ K_\rho^{vN}(t)] \times M(t+\rho)[K_\rho^{wN}(t) \ K_\rho^{vN}(t)]^T. \tag{53}$$

当 $N > 0$ 时,

$$\begin{aligned} \Psi_N(t) &= I_{n+2m} - \sum_{j=0}^N K_a(t|t+j)\bar{H}_a\Psi_{pa}(t+j|t), \\ \Psi_{pa}(t+j|t) &= \Psi_{pa}(t+j-1) \cdots \Psi_{pa}(t), \\ K_\rho^{wN}(t) &= - \sum_{j=\rho+1}^N K_a(t|t+j) \times \bar{H}_a\Psi_{pa}(t+j|t+\rho+1), \\ \Psi_{pa}(t|t) &= I_{n+2m}, \rho = 0, \dots, N-1, K_N^{wN}(t) = 0, \\ K_\rho^{vN}(t) &= \sum_{j=\rho+1}^N K_a(t|t+j)\bar{H}_a\Psi_{pa}(t+j|t+\rho+1) \times K_{pa}(t+\rho) - K_a(t|t+j), \\ \rho = 0, \dots, N-1, K_N^{vN} &= -K_a(t|t+N). \end{aligned}$$

当 $N = 0$ 时, $K_0^{w0} = 0, K_0^{v0}(t) = -K_a(t|t), \Psi_0(t) = I_{n+2m} - K_a(t|t)\bar{H}_a$.

定理 2 对于带虚拟噪声方差保守上界 $Q_f(t), R_f(t)$ 和相关阵 $S_f(t)$ 的最坏情形扩维系统(17)和(18), 在假设1-3下, 实际时变Kalman滤波器和平滑器(48)是鲁棒的, 即对所有容许的不确定性(6), 有

$$\bar{P}_a(t|t+N) \leq P_a(t|t+N), \tag{54}$$

且 $P_a(t|t+N)$ 是 $\bar{P}_a(t|t+N)$ 的最小上界.

证 定义

$$\Delta P_a(t|t+N) = P_a(t|t+N) - \bar{P}_a(t|t+N),$$

式(53)减去式(52), 有

$$\begin{aligned} \Delta P_a(t|t+N) &= \Psi_N(t)\Delta P_a(t|t-1)\Psi_N^T(t) + \sum_{\rho=0}^N [K_\rho^{wN}(t) \ K_\rho^{vN}(t)] \times \Delta M(t+\rho)[K_\rho^{wN}(t) \ K_\rho^{vN}(t)]^T. \end{aligned} \tag{55}$$

应用引理5和定理1, 可得 $\Delta P_a(t|t+N) \geq 0$, 即不等式(54)成立. $P_a(t|t+N)$ 是 $\bar{P}_a(t|t+N)$ 的最小上界证明类似定理1, 此处略. **证** 毕.

注 3 称实际Kalman预报器(37)和实际滤波器和平滑器(48)为鲁棒Kalman估值器, 称不等式(46)和(54)为它们的鲁棒性. 鲁棒Kalman估值器(37)和(48)均为固定的估值器, 它们的参数仅与虚拟噪声方差保守上界有关, 与不确定实际方

差无关, 它可保证实际估计误差方差有最小上界, 即满足式(46)和式(54).

推论 1 根据 $x(t)$ 和 $x_a(t)$ 的关系, 原始系统(1)-(3)的鲁棒时变Kalman估值器为

$$\hat{x}(t|t+N) = C_x \hat{x}_a(t|t+N), \quad N = -1 \text{ 或 } N \geq 0, \tag{56}$$

其中 $C_x = [I_n, O, O]$, 实际和保守的估值误差方差为

$$\begin{aligned} \bar{P}(t|t+N) &= C_x \bar{P}_a(t|t+N)C_x^T, \\ P(t|t+N) &= C_x P_a(t|t+N)C_x^T, \\ \bar{P}(t|t+N) &\leq P(t|t+N), \quad N = -1 \text{ 或 } N \geq 0, \end{aligned} \tag{57}$$

且 $P(t|t+N)$ 是实际方差阵 $\bar{P}(t|t+N)$ 的最小上界.

定理 3 带不确定噪声方差、乘性噪声、观测缺失、丢包和一步随机观测滞后的混合不确定网络化系统(1)-(3), 在假设1-3下, 鲁棒时变Kalman估值器有以下矩阵不等式精度关系

$$\bar{P}(t|t+N) \leq P(t|t+N), \quad N = -1 \text{ 或 } N \geq 0, \tag{59}$$

$$\begin{aligned} P(t|t+N) &\leq P(t|t+N-1) \leq \dots \leq \\ P(t|t+1) &\leq P(t|t) \leq P(t|t-1), \quad N \geq 1 \end{aligned} \tag{60}$$

和矩阵迹不等式精度关系

$$\text{tr } \bar{P}(t|t+N) \leq \text{tr } P(t|t+N), \quad N = -1 \text{ 或 } N \geq 0, \tag{61}$$

$$\begin{aligned} \text{tr } P(t|t+N) &\leq \text{tr } P(t|t+N-1) \leq \dots \leq \\ \text{tr } P(t|t+1) &\leq \text{tr } P(t|t) \leq \text{tr } P(t|t-1), \quad N \geq 1. \end{aligned} \tag{62}$$

证 由定理1和2, 以及推论1, 易得不等式(59)成立. 根据文献[18]易得式(60)成立. 对式(59)和式(60)取迹运算, 可分别得式(61)和式(62)成立.

证 毕.

5 收敛性分析

定义矩阵 A 和 B 分别为

$$A = \Phi \otimes \Phi + \sum_{i=1}^p R_{\gamma_i} \Phi_i^\gamma \otimes \Phi_i^{\gamma T}, \tag{63}$$

$$B = \bar{\Phi}_a \otimes \bar{\Phi}_a + \bar{\lambda}_0 \Phi_2 \otimes \Phi_2 + \bar{\xi}_0 \Phi_3 \otimes \Phi_3 + \bar{\beta}_0 \Phi_4 \otimes \Phi_4. \tag{64}$$

如果 A 和 B 的谱半径小于1, 即 $\rho(A) < 1$ 和 $\rho(B) < 1$, 则有

i) 带任意初值 $\bar{X}(0) \geq 0$ 和 $X(0) \geq 0$ 的时变广义 Lyapunov 方程(21)和(22)分别收敛于稳态广义 Lyapunov 方程的唯一半正定解

$$X = \Phi X \Phi^T + \sum_{i=1}^p R_{\gamma_i} \Phi_i^\gamma X \Phi_i^{\gamma T} + \Gamma Q \Gamma^T, \quad (65)$$

$$\bar{X} = \Phi \bar{X} \Phi^T + \sum_{i=1}^p \bar{R}_{\gamma_i} \Phi_i^\gamma \bar{X} \Phi_i^{\gamma T} + \Gamma \bar{Q} \Gamma^T, \quad (66)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{X}(t) = \bar{X}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} X = X. \quad (67)$$

ii) 带任意初值 $\bar{X}_a(0) \geq 0$ 和 $X_a(0) \geq 0$ 的时变广义 Lyapunov 方程(28)和(29)分别收敛于稳态广义 Lyapunov 方程的唯一半正定解

$$\begin{aligned} X_a = & \bar{\Phi}_a X_a \bar{\Phi}_a^T + \bar{\lambda}_0 \Phi_2 X_a \Phi_2^T + \\ & \bar{\xi}_0 \Phi_3 X_a \Phi_3^T + \bar{\beta}_0 \Phi_4 X_a \Phi_4^T + \\ & (1 - \pi_\lambda) \Gamma_1 Q_a \Gamma_1^T + \pi_\lambda C Q_a C^T, \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \bar{X}_a = & \bar{\Phi}_a \bar{X}_a \bar{\Phi}_a^T + \bar{\lambda}_0 \Phi_2 \bar{X}_a \Phi_2^T + \\ & \bar{\xi}_0 \Phi_3 \bar{X}_a \Phi_3^T + \bar{\beta}_0 \Phi_4 \bar{X}_a \Phi_4^T + \\ & (1 - \pi_\lambda) \Gamma_1 \bar{Q}_a \Gamma_1^T + \pi_\lambda C \bar{Q}_a C^T, \end{aligned} \quad (69)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{X}_a(t) = \bar{X}_a, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} X_a = X_a. \quad (70)$$

进一步, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 对时变的噪声统计取极限, 可以得到相应的定常噪声统计 $Q_a, \bar{Q}_a, Q_f, \bar{Q}_f, R_f, \bar{R}_f, S_f, \bar{S}_f, M$ 和 \bar{M} .

注 4 文献[23-26]对不确定随机观测网络化系统, 研究了随机变量概率对估计误差收敛性的影响. 其中, 文献[23]使用 Bernoulli 随机变量描述随机观测数据, 对不稳定但能观能控系统, 给出了随机变量概率的阈值, 当观测数据到达的概率大于阈值, 估计误差方差对任意初值有界. 当观测数据到达的概率小于阈值, 估计误差方差对有些初值发散. 文献[24]提出当随机变量概率接近 1 时, 随机误差方差集合满足好速率函数的中偏差原理. 文献[25]对带不确定参数和随机观测系统设计了鲁棒递推状态估值器, 并分析了渐进统计特性, 给出了伪方差阵收敛于平稳分布的充要条件. 在此基础上, 文献[26]对马尔科夫链描述的随机观测系统, 给出了收敛速率和可简化计算的逼近平稳分布的显示公式. 与文献[23-26]不同, 本文对带噪声方差和多种网络诱导不确定系统, 设计极大极小鲁棒 Kalman 估值器, 对最坏情形系统设计最小方差估值器. 对所有容许的不确定(包括网络诱导不确定), 保证实际估计误差方差有最小上界. $\rho(A) < 1$ 和 $\rho(B) < 1$ 引出 Φ 和 $\bar{\Phi}_a$ 是稳定矩阵, 这保证了稳态 Kalman 预报器存在. 基于稳态预报器, 可得到稳态滤波器和平滑器.

对带保守噪声统计 Q_f, R_f 和相关阵 S_f 的最坏情形定常扩维系统(17)和(18), 假设 $(\bar{\Phi}_a, \bar{H}_a)$ 是完全能检对, $(\bar{\Phi}_a - \bar{S}_f R_f^{-1} \bar{H}_a, G)$ 是完全能稳对, 且 $GG^T =$

$Q_f - S_f R_f^{-1} S_f^T$, 则鲁棒稳态 Kalman 预报器存在. 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 相应于时变 Kalman 预报器(37)-(40), 鲁棒稳态 Kalman 预报器为

$$\hat{x}_a^s(t+1|t) = \Psi_{pa} \hat{x}_a^s(t|t-1) + K_p y(t), \quad (71)$$

$$\Psi_{pa} = \bar{\Phi}_a - K_{pa} \bar{H}_a,$$

$$\begin{aligned} K_{pa} = & (\bar{\Phi}_a P_a(-1) \bar{H}_a^T + S_f) \\ & [\bar{H}_a P_a(-1) \bar{H}_a^T + R_f]^{-1}, \end{aligned}$$

Ψ_{pa} 是一个稳定矩阵, 稳态预报误差方差 $P_a(-1)$ 满足 Riccati 方程

$$\begin{aligned} P_a(-1) = & \bar{\Phi}_a P_a(-1) \bar{\Phi}_a^T - [\bar{\Phi}_a P_a(-1) \bar{H}_a^T + S_f] \times \\ & [\bar{H}_a P_a(-1) \bar{H}_a^T + R_f]^{-1} \times \\ & [\bar{\Phi}_a P_a(-1) \bar{H}_a^T + S_f]^T + Q_f. \end{aligned} \quad (72)$$

根据式(43)和式(44), 保守和实际的稳态预报误差方差 $P_a(-1)$ 和 $\bar{P}_a(-1)$ 分别满足

$$P_a(-1) = \Psi_{pa} P_a(-1) \Psi_{pa}^T + \Gamma_\eta M \Gamma_\eta^T, \quad (73)$$

$$\bar{P}_a(-1) = \Psi_{pa} \bar{P}_a(-1) \Psi_{pa}^T + \Gamma_\eta \bar{M} \Gamma_\eta^T. \quad (74)$$

基于鲁棒稳态 Kalman 预报器, 鲁棒稳态 Kalman 滤波器 ($N = 0$) 和平滑器 ($N > 0$) 统一为

$$\begin{aligned} \hat{x}_a^s(t|t+N) = & \hat{x}_a^s(t|t-1) + \\ & \sum_{j=0}^N K_a(j) \varepsilon_a(t+j), \quad N \geq 0, \end{aligned} \quad (75)$$

$\varepsilon_a^s(t+j) = y(t+j) - \bar{H}_a \hat{x}_a^s(t+j|t+j-1)$, $K_a(j) = P_a(-1) (\Psi_{pa}^T)^j \bar{H}_a^T [\bar{H}_a P_a(-1) \bar{H}_a^T + R_f]^{-1}$, 其中 $\hat{x}_a^s(t|t-1)$ 是由式(71)给出. 实际和保守的滤波和平滑误差方差 $N \geq 0$ 分别满足

$$\begin{aligned} \bar{P}_a(N) = & \Psi_N \bar{P}_a(-1) \Psi_N^T + \\ & \sum_{\rho=0}^N [K_\rho^{wN} K_\rho^{vN}] \bar{M} [K_\rho^{wN} K_\rho^{vN}]^T, \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} P_a(N) = & \Psi_N P_a(-1) \Psi_N^T + \\ & \sum_{\rho=0}^N [K_\rho^{wN} K_\rho^{vN}] M [K_\rho^{wN} K_\rho^{vN}]^T, \end{aligned} \quad (77)$$

当 $N > 0$ 时

$$\Psi_N = I_{n+2m} - \sum_{j=0}^N K_a(j) \bar{H}_a \Psi_{pa}^j,$$

$$K_\rho^{wN} = - \sum_{j=\rho+1}^N K_a(j) \bar{H}_a \Psi_{pa}^{j-\rho-1},$$

$$K_\rho^{vN} = \sum_{j=\rho+1}^N K_a(j) \bar{H}_a \Psi_{pa}^{j-\rho-1} K_{pa} - K_a(\rho),$$

$$\rho = 0, \dots, N-1, K_N^{wN} = 0, K_N^{vN} = -K_a(N).$$

当 $N = 0$ 时, $K_0^{w0} = 0, K_0^{v0} = -K_a(0), \Psi_0 = I_{n+2m} - K_a(0)\bar{H}_a$.

稳态鲁棒估值器满足矩阵不等式和矩阵迹精度关系

$$\bar{P}_a(N) \leq P_a(N), N = -1 \text{ 或 } N \geq 0, \quad (78)$$

$$\text{tr } \bar{P}_a(N) \leq \text{tr } P_a(N), N = -1 \text{ 或 } N \geq 0, \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \text{tr } P_a(N) &\leq \text{tr } P_a(N-1) \leq \dots \leq \\ \text{tr } P_a(1) &\leq \text{tr } P_a(0) \leq \text{tr } P_a(-1), N \geq 1, \end{aligned} \quad (80)$$

且 $P_a(N)$ 是实际方差 $\bar{P}_a(N)$ 的最小上界.

定理 4 对时变和定常扩维系统(17)和(18), 在假设1-3和 $\rho(A) < 1$ 和 $\rho(B) < 1$ 条件下, 假设观测 $y(t)$ 有界, 时变扩维系统(17)和(18)是完全能检和完全能稳的, 则带保守时变噪声统计 $Q_f(t), R_f(t)$ 和 $S_f(t)$ 的时变系统的鲁棒时变Kalman估值器按实现收敛于带保守定常噪声统计 Q_f, R_f 和 S_f 的定常系统的鲁棒稳态Kalman估值器 $\hat{x}_a^s(t|t+N)$, 即

$$\begin{aligned} [\hat{x}_a(t|t+N) - \hat{x}_a^s(t|t+N)] &\rightarrow 0, \\ t \rightarrow \infty, \text{ i.a.r.}, N = -1 \text{ 或 } N \geq 0, \end{aligned} \quad (81)$$

符号“i.a.r.”表示按一个实现收敛, 相应的误差方差 $P_a(t|t+N)$ 和 $\bar{P}_a(t|t+N)$ 有收敛关系

$$\begin{aligned} P_a(t|t+N) &\rightarrow P_a(N), \bar{P}_a(t|t+N) \rightarrow \bar{P}_a(N), \\ t \rightarrow \infty, N = -1 \text{ 或 } N \geq 0. \end{aligned} \quad (82)$$

证 $\rho(A) < 1$ 和 $\rho(B) < 1$ 引出 Φ 和 $\bar{\Phi}_a$ 是稳定矩阵, 这保证了稳态Kalman估值器存在. 应用自校正Riccati的收敛性, 动态误差分析方法^[27]和动态方差误差分析方法, 类似于文献[18]中的证明, 可得式(81)和式(82)给出的收敛性关系. 证毕.

推论 2 在定理4条件下, 原始系统(1)-(3)的鲁棒稳态Kalman估值器为

$$\hat{x}^s(t|t+N) = C_x \hat{x}_a^s(t|t+N), N = -1 \text{ 或 } N \geq 0. \quad (83)$$

相应的实际和保守稳态估值误差方差分别为

$$\bar{P}(N) = C_x \bar{P}_a(N) C_x^T, P(N) = C_x P_a(N) C_x^T. \quad (84)$$

对所有容许的不确定性(6), 原始系统(1)-(3)的实际稳态Kalman估值器有矩阵不等式和矩阵迹精度关系

$$\bar{P}(N) \leq P(N), N = -1 \text{ 或 } N \geq 0, \quad (85)$$

$$P(N) \leq P(N-1) \leq \dots \leq P(1) \leq P(0) \leq \text{tr } P(-1), N > 1, \quad (86)$$

$$\text{tr } \bar{P}(N) \leq \text{tr } P(N), N = -1 \text{ 或 } N \geq 0, \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \text{tr } P(N) &\leq \text{tr } P(N-1) \leq \dots \leq \text{tr } P(1) \leq \\ \text{tr } P(0) &\leq \text{tr } P(-1), N > 1, \end{aligned} \quad (88)$$

且 $P_a(N)$ 是实际方差 $\bar{P}_a(N)$ 的最小上界. 还有收敛关系

$$\begin{aligned} [\hat{x}(t|t+N) - \hat{x}^s(t|t+N)] &\rightarrow 0, \\ t \rightarrow \infty, \text{ i.a.r.}, N = -1 \text{ 或 } N \geq 0, \\ P(t|t+N) &\rightarrow P(N), \bar{P}(t|t+N) \rightarrow \bar{P}(N), \\ t \rightarrow \infty, N = -1 \text{ 或 } N \geq 0. \end{aligned} \quad (89)$$

注 5 定义鲁棒稳态Kalman估值器 $\hat{x}(t|t+N)$ 的实际误差方差的迹 $\text{tr } \bar{P}(N)$ 为实际精度, 保守误差方差的迹 $\text{tr } P(N)$ 为鲁棒精度^[6]. 在不等式(85)中, 取 $N = -1$, 记 $P(-1)$ 和 $\bar{P}(-1)$ 的第 (j, j) 个对角元素分别为 σ_j^2 和 $\bar{\sigma}_j^2$, 它们是鲁棒精度 $\text{tr } P(-1)$ 和实际精度 $\text{tr } \bar{P}(-1)$ 的第 j 个分量. 定义 σ_j 和 $\bar{\sigma}_j$ 分别为鲁棒Kalman预报器的第 j 个分量的鲁棒和实际标准差. 则引出精度关系 $\bar{\sigma}_j \leq \sigma_j, j = 1, \dots, n$. 应用切比雪夫不等式^[28], 有第 j 个分量的实际预报误差以大于0.8889的概率落在 $\pm 3\bar{\sigma}_j$ 区间内, 也落在 $\pm 3\sigma_j$ 区间内. 特别地, 当预报误差服从正态分布时, 预报误差在 $\pm 3\bar{\sigma}_j$ 内的概率超过0.99.

6 仿真算例

考虑F-404航空发动机系统^[29], 采样周期 $T_0 = 0.1$ s, 则离散线性系统矩阵

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.8673 & 0 & 0.2022 \\ 0.0145 & 0.9763 & -0.0316 \\ 0.0259 & 0 & 0.8032 \end{bmatrix},$$

在F-404航空发动机模型中, $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 表示水平位置, $x_3(t)$ 表示飞行高度. 在实际应用中, 发动机系统模型会受到强风、重力梯度和传感器噪声等影响. 机载监控系统可通过传感器获得发动机状态信息, 但军事环境下, 传感器和传输网络易受到干扰和攻击, 因此发动机监控系统中易出现观测数据缺失、丢包和随机时延等不确定性. 在仿真中, 系统(1)-(3)中其他参数为

$$\begin{aligned} \Gamma &= \begin{bmatrix} 0.0360 & 0 \\ 0.2470 & 0 \\ -0.0890 & 0 \end{bmatrix}, \Phi_1^\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.01 & -0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \end{bmatrix}, \\ H &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, Q = \text{diag}\{7.2, 2.0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \text{diag}\{5.6, 1.6\}, R = \text{diag}\{0.9, 5.0\}, \\ \bar{R} &= \text{diag}\{0.7, 3.9\}, R_{\gamma_1} = 0.5, \\ \bar{R}_{\gamma_1} &= 0.4, \pi_\lambda = 0.98, \pi_\xi = 0.95. \end{aligned}$$

图1给出了时变Kalman估值器 $\hat{x}(t|t+N)$, $N = -1, 0, 1$ 的实际和鲁棒精度. 验证了时变精度关系式(61)和式(62)是正确的.

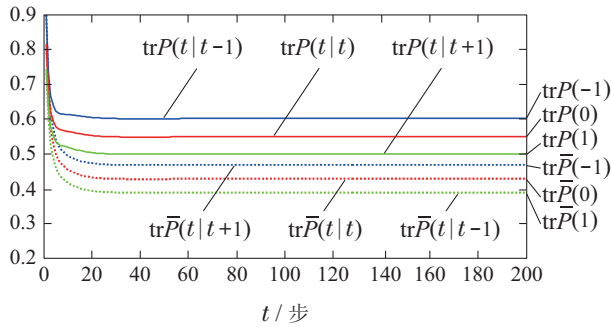


图 1 鲁棒时变Kalman估值器的实际和鲁棒精度

Fig. 1 The actual and robust accuracy of robust time-varying Kalman estimators

表1给出了鲁棒稳态Kalman估值器 $\hat{x}^s(t|t+N)$, $N = -1, 0, 1$ 的实际和鲁棒精度. 验证了稳态精度关系式(87)和式(88)是正确的.

表 1 鲁棒稳态Kalman估值器的实际和鲁棒精度
Table 1 The actual and robust accuracy of robust steady-state Kalman estimators estimators

$\text{tr } P(-1)$	$\text{tr } P(0)$	$\text{tr } P(1)$
0.6018	0.5498	0.4999
$\text{tr } \bar{P}(-1)$	$\text{tr } \bar{P}(0)$	$\text{tr } \bar{P}(1)$
0.4685	0.4280	0.3893

图2给出了水平位置 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的二步平滑估值, 蓝色实线表示实际状态, 红色虚线表示实际二步平滑器.

取 $\rho = 10000$ 的Monte Carlo仿真, 鲁棒Kalman预报器和平滑器的均方误差(MSE)曲线如图3所示. 其中直线表示实际预报和平滑误差的方差的迹, 曲线表示相应的MSE的值. 从图3看到, 当 ρ 足够大时, MSE曲线接近直线, 这验证了实际采样方差的一致性.

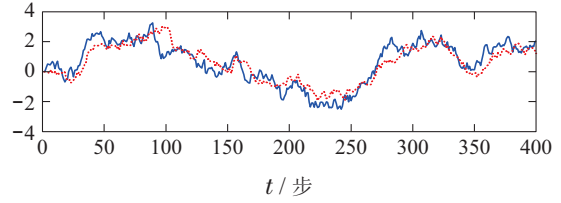
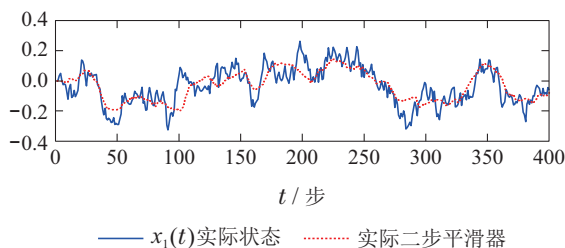


图 2 水平位置及其实际二步平滑器

Fig. 2 The horizontal position and their actual 2-step smoothers

在式(4)中, 概率 π_λ 和 π_ξ 的值越高, 说明发生传感器故障和传输网络异常的情形越少, 则实际估计误差越小. 为验证这一情况, 定义

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_\xi &= 1 - \pi_\xi, \bar{\pi}_\lambda = 1 - \pi_\lambda, \\ [\bar{\pi}_\xi \quad \bar{\pi}_\lambda] &= \pi[1 \quad 1], 0 \leq \pi \leq 1. \end{aligned} \quad (91)$$

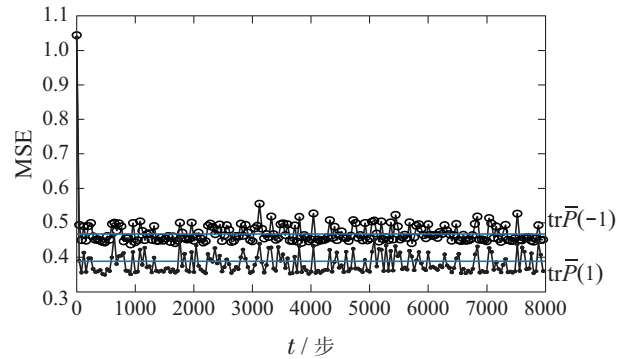


图 3 鲁棒Kalman预报器和平滑器的MSE曲线

Fig. 3 The MSE curves of robust Kalman predictor and smoother

则 π 表示观测缺失、丢包和随机滞后3种网络诱导不确定发生的概率. 图4给出了鲁棒和实际精度 $\text{tr } P(N)$ 和 $\text{tr } \bar{P}(N)$, $N = -1, 0, 1$ 随 π 变化情况. 可以看到, 当 π 增加时, $\text{tr } P(N)$ 和 $\text{tr } \bar{P}(N)$ 是增加的.

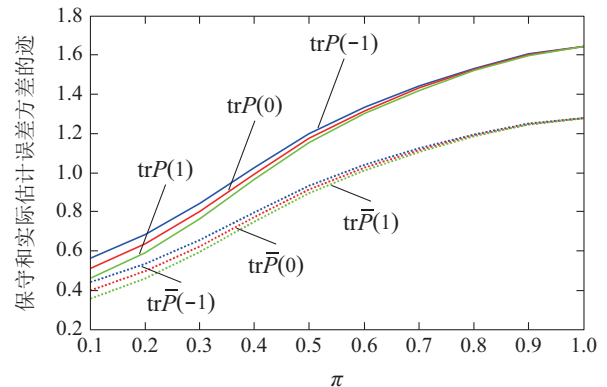


图 4 鲁棒和实际精度随 π 变化情况

Fig. 4 The variation of robust and actual accuracy with π

进一步考虑不确定噪声方差的影响, 对所有可容许的实际方差, 定义

$$\bar{Q} = \alpha Q, \bar{R} = \alpha R, \bar{R}_{\gamma_1} = \alpha R_{\gamma_1}, 0 \leq \alpha \leq 1,$$

图5给出了鲁棒Kalman预报器实际精度 $\text{tr} P(-1)$ 随 α 和 π 变化三维图. 可以看到 $\text{tr} P(-1)$ 随着 α 和 π 的增加而增加.

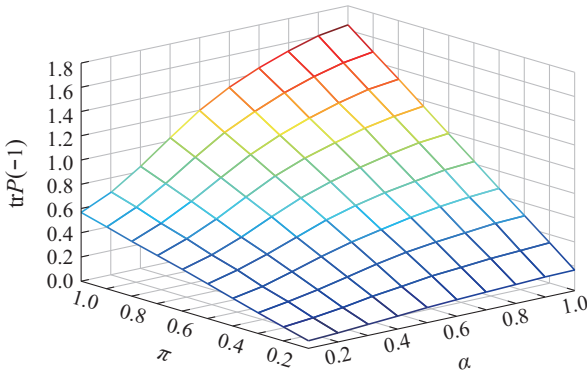


图5 鲁棒预报器实际精度随 α 和 π 变化

Fig. 5 The variation of robust prediction actual accuracy with α and π

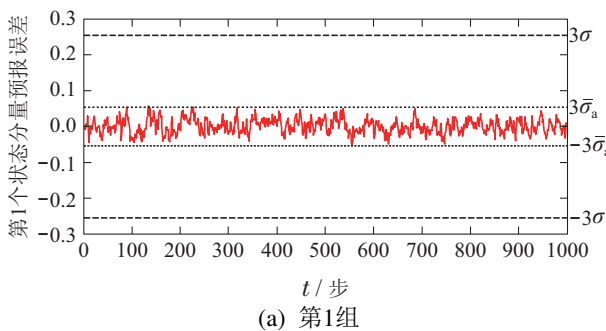
任取3组实际噪声方差 $\bar{Q}, \bar{R}, \bar{R}_{\gamma_1}$ 为

(a) $\bar{Q} = \text{diag}\{0.56, 0.32\}, \bar{R} = \text{diag}\{0.1, 0.9\}, \bar{R}_{\gamma_1} = 0.05.$

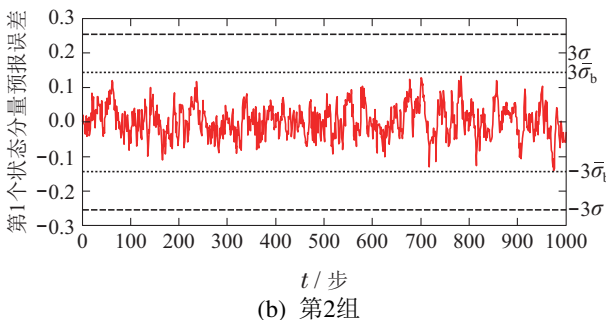
(b) $\bar{Q} = \text{diag}\{2.8, 0.8\}, \bar{R} = \text{diag}\{0.4, 2.2\}, \bar{R}_{\gamma_1} = 0.15.$

(c) $\bar{Q} = \text{diag}\{5.6, 1.6\}, \bar{R} = \text{diag}\{0.7, 3.9\}, \bar{R}_{\gamma_1} = 0.4.$

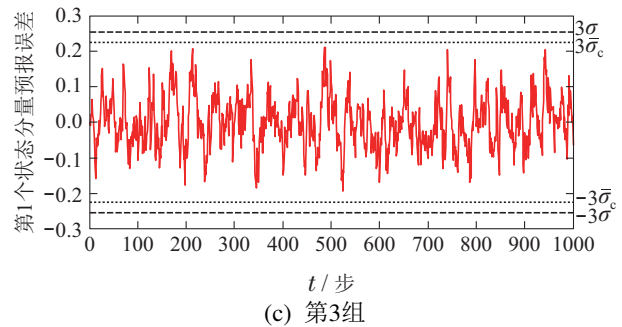
可得3组水平位置 $x_1(t)$ 的预报估值 $\hat{x}_1^{(l)}(t+1|t)$, $l = a, b, c$, 及相应的预报误差曲线和鲁棒 $\pm 3\sigma$ 和实际 $\pm 3\bar{\sigma}_l$ 标准差线如图6所示. 可看到超过99%的预报误差落在 $\pm 3\bar{\sigma}_l, l = a, b, c$ 区间内, 也落在 $\pm 3\sigma$ 区间内.



(a) 第1组



(b) 第2组



(c) 第3组

图6 $x_1(t)$ 的实际预报误差及 ± 3 倍鲁棒和实际标准差

Fig. 6 The prediction errors of $x_1(t)$ and their ± 3 robust and actual standard deviations

7 结论

本文研究了混合不确定网络化系统鲁棒Kalman估计问题, 同时考虑了不确定噪声方差、乘性噪声和三种网络诱导不确定, 克服了现有文献仅考虑两种网络诱导不确定的局限, 发展了现有文献的结果. 提出了基于虚拟噪声进行扩维的新模型转换方法, 以及基于扩展的Lyapunov方程方法的新鲁棒性证明方法, 可用于解决更加复杂的混合不确定网络化系统鲁棒Kalman估计问题及鲁棒性证明问题.

本文基于扩展的Lyapunov方程方法和极大极小鲁棒估计方法, 设计了鲁棒时变和稳态Kalman估值器, 给出了时变和稳态估值器的收敛性分析, 当系统矩阵是稳定矩阵, 扩维系统完全能稳时, 相应的鲁棒时变Kalman估值器按实现收敛于稳态Kalman估值器. 但系统矩阵是稳定的条件在实际应用中限制较为严格, 下一步将对不稳定网络化系统设计鲁棒估值器, 并研究网络诱导不确定对鲁棒估值器的鲁棒性和收敛性的影响等问题.

参考文献:

- [1] YOU Keyou, XIE Lihua. Survey of recent progress in networked control systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(2): 101 – 118. (游科友, 谢立华. 网络控制系统的最新研究综述. 自动化学报, 2013, 39(2): 101 – 118.)
- [2] CHEN Yong, LI Meng. Overview and research trends of predictive control method for network control systems. *Journal of University of Electronic Science and Technology of China*, 2016, 45(4): 564 – 572. (陈勇, 李猛. 网络控制系统的预测控制算法研究进展. 电子科技大学学报, 2016, 45(4): 564 – 572.)
- [3] SUN S L, LIN H L, MA J, et al. Multi-sensor distributed fusion estimation with applications in networked systems: A review paper. *Information Fusion*, 2017, 38(3): 122 – 134.
- [4] WANG Xuemei, LIU Wenqiang, DENG Zili. Modified robust covariance intersection fusion steady-state Kalman filter for systems with missing measurements and uncertain noise variances. *Control Theory and Applications*, 2016, 33(7): 973 – 979. (王雪梅, 刘文强, 邓自立. 带丢失观测和不确定噪声方差系统改进的鲁棒协方差交叉融合稳态Kalman滤波器. 控制理论与应用, 2016, 33(7): 973 – 979.)

- [5] ZHANG Y, TIAN Y P. A fully distributed weight design approach to consensus Kalman filtering for sensor networks. *Automatica*, 2019, 104(2): 34 – 40.
- [6] YANG C S, YANG Z B, DENG Z L. Robust weighted state fusion Kalman estimators for networked systems with mixed uncertainties. *Information Fusion*, 2019, 45(1): 246 – 265.
- [7] CAI Fenghuang, WANG Wu, LIN Qiongbina, et al. H-Infinity filtering for networked switched systems with random communication time-delays. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(3): 309 – 314. (蔡逢煌, 王武, 林琼斌, 等. 具有一步随机通讯时延的网络化切换系统H_∞滤波. *控制理论与应用*, 2011, 28(3): 309 – 314.)
- [8] WANG S Y, FANG H J, TIAN X G. Robust estimator design for networked uncertain systems with imperfect measurements and uncertain-covariance noises. *Neurocomputing*, 2017, 230(11): 40 – 47.
- [9] SONG X M, ZHENG W X. Linear estimation for discrete-time periodic systems with unknown measurement input and missing measurements. *ISA Transactions*, 2019, 95(11): 164 – 172.
- [10] WANG Z D, HO D W C, LIU X H. Variance-constrained filtering for uncertain stochastic systems with missing measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(7): 1254 – 1258.
- [11] WANG B F, GUO G, YUE W. Variance-constrained robust Estimation for uncertain systems with multiple packet dropouts. *Optimal Control Applications and Methods*, 2013, 34(1): 53 – 68.
- [12] CHEN D Y, XU L, DU J H. Optimal filtering for systems with finite-step autocorrelated process noises, random one-step sensor delay and missing measurements. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2016, 32(8): 211 – 224.
- [13] QI Bo, SUN Shuli. Distributed fusion filtering for multi-sensor networked uncertain systems with unknown communication disturbances and compensations of packet dropouts. *Acta Automatica Sinica*, 2018, 44(6): 1107 – 1114. (祁波, 孙书利. 带未知通信干扰和丢包补偿的多传感器网络化不确定系统的分布式融合滤波. *自动化学报*, 2018, 44(6): 1107 – 1114.)
- [14] LIU W, SHI P. Optimal linear filtering for networked control systems with time-correlated fading channels. *Automatica*, 2019, 101(11): 345 – 353.
- [15] LI Yueyang, ZHONG Maiying. Fault detection filter design for linear discrete time-varying systems with multiple packet dropouts. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(9): 1638 – 1648. (李岳扬, 钟麦英. 具有多测量数据包丢失的线性离散时变系统故障检测滤波器设计. *自动化学报*, 2015, 41(9): 1638 – 1648.)
- [16] FENG Y, NIE X H, CHEN X. Robust optimal filtering over lossy networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 65(5): 2272 – 2277.
- [17] MOHAMMAD H, MEHDI R. Robust distributed H_∞ filtering over an uncertain sensor network with multiple fading measurements and varying sensor delays. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(2): 538 – 566.
- [18] YANG C S, DENG Z L. Robust time-varying Kalman estimators for systems with packet dropouts and uncertain-variance multiplicative and linearly correlated additive white noises. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2018, 32(1): 147 – 169.
- [19] ZHAO Y, YANG C S. Information fusion robust guaranteed cost Kalman estimators with uncertain noise variances and missing measurements. *International Journal of Systems Science*, 2019, 50(15): 2853 – 2869.
- [20] GAO Y, DENG Z L. Robust weighted fusion Kalman estimators for networked multisensor mixed uncertain systems with random one-step sensor delays, uncertain-variance multiplicative, and additive white noises. *IEEE Sensors Journal*, 2019, 19(22): 10935 – 10946.
- [21] LIU W Q, DENG Z L. Weighted fusion robust steady-state estimators for multisensor networked systems with one-step random delay and inconsecutive packet dropouts. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2020, 34(2): 151 – 182.
- [22] RAN C J, DENG Z L. Robust fusion Kalman estimators for networked mixed uncertain systems with random one-step measurement delays, missing measurements, multiplicative noises and uncertain noise variances. *Information Sciences*, 2020, 534(4): 27 – 52.
- [23] SINOPOLI B, SCHENATO L, FRANCESCHETTI M, et al. Kalman filtering with intermittent observations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1453 – 1461.
- [24] KAR S, MOURA J. Moderate deviations of a random Riccati equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(9): 2250 – 2265.
- [25] ZHOU T. Robust recursive state estimation with random measurements droppings. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(1): 156 – 171.
- [26] ZHOU T. Asymptotic behavior of recursive state estimations with intermittent measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(2): 400 – 415.
- [27] DENG Z L, GAO Y, LI C B, et al. Self-tuning decoupled information fusion Wiener state component filters and their convergence. *Automatica*, 2008, 44(3): 685 – 695.
- [28] DEGROOT M H, SCHERVISH M J. *Probability and Statistics, Third Edition*. Beijing: Higher Education Press, 2005.
- [29] HU J, WANG Z D, GAO H J, et al. Robust sliding mode control for discrete stochastic systems with mixed time-delays, randomly occurring uncertainties and nonlinearities. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2012, 59(7): 3008 – 3015.

附录

引理2证明 根据假设2, 对保守状态和实际状态分别有状态方差初值(23). 对实际系统, 将式(1)带入 $\bar{X}(t+1) = E[x(t+1) x^T(t+1)]$, 可得式(22). 对保守系统, 类似可得式(21). 因方差矩阵的非负定性, 有 $X(0) \geq 0$, $\bar{X}(0) \geq 0$, $\bar{R}_{\gamma_i} \geq 0$, $R_{\gamma_i} \geq 0$, $\bar{Q} \geq 0$, $Q \geq 0$, $\Gamma \bar{Q} \Gamma^T \geq 0$ 和 $\Gamma Q \Gamma^T \geq 0$, 则有 $X(1) \geq 0$ 和 $\bar{X}(1) \geq 0$, 通过迭代式(21)和式(22), 可得 $X(t) \geq 0$ 和 $\bar{X}(t) \geq 0$.

定义 $\Delta Q = Q - \bar{Q}$, $\Delta R_{\gamma_i} = R_{\gamma_i} - \bar{R}_{\gamma_i}$, 则 $\Delta X(t)$ 为

$$\Delta X(t) = \Phi \Delta X(t-1) \Phi^T + \sum_{i=1}^p \bar{R}_{\gamma_i} \Phi_i^T \Delta X(t-1) \Phi_i^T + \sum_{i=1}^p \Delta R_{\gamma_i} \Phi_i^T X(t-1) \Phi_i^T + \Gamma \Delta Q \Gamma^T. \quad (a1)$$

因 $\Delta X(0) = P_0 - \bar{P}_0 \geq 0$, $\Delta Q \geq 0$, $\Delta R_{\gamma_i} \geq 0$ 和 $X(0) \geq 0$, 有 $\Delta X(1) \geq 0$. 迭代式(a1), 可得 $\Delta X(t) \geq 0$. 证毕.

引理3证明 根据假设1–3, 易得虚拟噪声 $w_n(t)$ 和扩维噪声 $w_a(t)$ 是均值为零的白噪声, 将 $w_n(t)$ 带入 $E[w_n(t) w_n^T(t)]$, 有保守和实际噪声方差为式(26). 由式(7)可得式(25). 将 $w_a(t)$ 和 $v(t)$ 带入 $E[w_a(t) v^T(t)]$, 可得实际和保守的相关阵 S_a 和 \bar{S}_a .

定义 $\Delta Q_n(t) = Q_n(t) - \bar{Q}_n(t)$, 由式(26)有

$$\Delta Q_n(t) = \sum_{i=1}^p \bar{R}_{\gamma_i} \Phi_i^T \Delta X(t) \Phi_i^T + \sum_{i=1}^p \Delta R_{\gamma_i} \Phi_i^T X(t) \Phi_i^T + \Gamma \Delta Q \Gamma^T.$$

由 $\Delta Q \geq 0, \Delta R_{\gamma_i} \geq 0$, 以及引理2, 可得 $\Delta Q_n(t) \geq 0$. 对 $\Delta Q_a(t)$, 由式(25), 有 $\Delta Q_a(t) = \text{diag} \{ \Delta Q_n(t), \Delta R \}$, 由 $\Delta R \geq 0$ 和 $\Delta Q_n(t) \geq 0$ 以及引理1(i), 可得 $\Delta Q_a(t) \geq 0$. 证毕.

引理4证明 根据式(17), 对实际状态, 有

$$\begin{aligned} \bar{X}_a(t+1) &= E[x_a(t+1)x_a^T(t+1)] = \\ &\bar{\Phi}_a \bar{X}_a(t) \bar{\Phi}_a^T + E[\bar{\Phi}_a(t)x_a(t)x_a^T(t)\bar{\Phi}_a^T(t)] + \\ &E[\Gamma_a(t)w_a(t)w_a^T(t)\Gamma_a^T(t)], \end{aligned}$$

将 $\bar{\Phi}_a^T$ 和 $\Gamma_a^T(t)$ 带入上式, 整理后可得式(29). 类似, 对保守状态, 可得式(28). 由 $x(t)$ 和 $x_a(t)$ 的关系, 有式(30). 由式(28)和式(29), 有 $\Delta X_a(t+1)$ 为

$$\begin{aligned} \Delta X_a(t+1) &= \bar{\Phi}_a \Delta X_a(t) \bar{\Phi}_a^T + \bar{\lambda}_0 \Phi_2 \Delta X_a(t) \Phi_2^T + \\ &\bar{\xi}_0 \Phi_3 \Delta X_a(t) \Phi_3^T + \bar{\beta}_0 \Phi_4 \Delta X_a(t) \Phi_4^T + \\ &(1 - \pi_\lambda) \Gamma_1 \Delta Q_a(t) \Gamma_1^T + \pi_\lambda C \Delta Q_a(t) C^T. \end{aligned}$$

利用迭代法, 易得 $\Delta X_a(t) \geq 0$ 成立. 证毕.

引理5证明 将式(32)–(36)分别带入 $M(t)$ 和 $\bar{M}(t)$, 并分解为

$$M(t) = \sum_{i=1}^5 M_i(t), \quad \bar{M}(t) = \sum_{i=1}^5 \bar{M}_i(t), \quad (a2)$$

$$\begin{aligned} M_1(t) &= \begin{bmatrix} (1 - \pi_\lambda) \Gamma_1 Q_a(t) \Gamma_1^T & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \\ M_2(t) &= \bar{\lambda}_0 \begin{bmatrix} \Phi_2 X_a(t) \Phi_2^T & \Phi_2 X_a(t) H_1^T \\ H_1 X_a(t) \Phi_2^T & H_1 X_a(t) H_1^T \end{bmatrix}, \\ M_3(t) &= \bar{\xi}_0 \begin{bmatrix} \Phi_3 X_a(t) \Phi_3^T & \Phi_3 X_a(t) H_2^T \\ H_2 X_a(t) \Phi_3^T & H_2 X_a(t) H_2^T \end{bmatrix}, \\ M_4(t) &= \bar{\beta}_0 \begin{bmatrix} \Phi_4 X_a(t) \Phi_4^T & \Phi_4 X_a(t) H_3^T \\ H_3 X_a(t) \Phi_4^T & H_3 X_a(t) H_3^T \end{bmatrix}, \\ M_5(t) &= \pi_\lambda \begin{bmatrix} C Q_a(t) C^T & C S_a \\ S_a^T C^T & R \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (a3)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_1(t) &= \begin{bmatrix} (1 - \pi_\lambda) \Gamma_1 \bar{Q}_a(t) \Gamma_1^T & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \\ \bar{M}_2(t) &= \bar{\lambda}_0 \begin{bmatrix} \Phi_2 \bar{X}_a(t) \Phi_2^T & \Phi_2 \bar{X}_a(t) H_1^T \\ H_1 \bar{X}_a(t) \Phi_2^T & H_1 \bar{X}_a(t) H_1^T \end{bmatrix}, \\ \bar{M}_3(t) &= \bar{\xi}_0 \begin{bmatrix} \Phi_3 \bar{X}_a(t) \Phi_3^T & \Phi_3 \bar{X}_a(t) H_2^T \\ H_2 \bar{X}_a(t) \Phi_3^T & H_2 \bar{X}_a(t) H_2^T \end{bmatrix}, \\ \bar{M}_4(t) &= \bar{\beta}_0 \begin{bmatrix} \Phi_4 \bar{X}_a(t) \Phi_4^T & \Phi_4 \bar{X}_a(t) H_3^T \\ H_3 \bar{X}_a(t) \Phi_4^T & H_3 \bar{X}_a(t) H_3^T \end{bmatrix}, \\ \bar{M}_5(t) &= \pi_\lambda \begin{bmatrix} C \bar{Q}_a(t) C^T & C \bar{S}_a \\ \bar{S}_a^T C^T & \bar{R} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (a4)$$

定义

$$\Delta M(t) = M(t) - \bar{M}(t), \quad \Delta M_i(t) = M_i(t) - \bar{M}_i(t),$$

则有

$$\Delta M(t) = \sum_{i=1}^5 \Delta M_i(t), \quad (a5)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_1(t) &= \begin{bmatrix} (1 - \pi_\lambda) \Gamma_1 \Delta Q_a(t) \Gamma_1^T & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \\ \Delta M_2(t) &= \bar{\lambda}_0 \begin{bmatrix} \Phi_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & H_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X_a(t) & \Delta X_a(t) \\ \Delta X_a(t) & \Delta X_a(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & H_1 \end{bmatrix}^T, \\ \Delta M_3(t) &= \bar{\xi}_0 \begin{bmatrix} \Phi_3 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X_a(t) & \Delta X_a(t) \\ \Delta X_a(t) & \Delta X_a(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \Phi_3 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & H_2 \end{bmatrix}^T, \\ \Delta M_4(t) &= \bar{\beta}_0 \begin{bmatrix} \Phi_4 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & H_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X_a(t) & \Delta X_a(t) \\ \Delta X_a(t) & \Delta X_a(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_4 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & H_3 \end{bmatrix}^T, \\ \Delta M_5(t) &= \pi_\lambda \begin{bmatrix} C & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q_a(t) & \Delta S_a \\ \Delta S_a^T & \Delta R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & I_m \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (a6)$$

由引理1和引理4, 易得 $\Delta M_i(t) \geq 0, i = 1, 2, 3, 4$. 为证 $\Delta M_5(t) \geq 0$, 将其分解为

$$\Delta M_5(t) = \Delta M_5^1(t) + \Delta M_5^2, \quad (a7)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_5^1(t) &= \pi_\lambda \begin{bmatrix} C & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q_a^1(t) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & I_m \end{bmatrix}^T, \\ \Delta M_5^2 &= \pi_\lambda \begin{bmatrix} C & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q_a^2 & \Delta S_a \\ \Delta S_a^T & \Delta R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & I_m \end{bmatrix}^T, \\ \Delta Q_a^1(t) &= \begin{bmatrix} \Delta Q_n(t) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \\ \Delta Q_a^2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \Delta R \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (a8)$$

由引理1以及 $\Delta Q_n(t) \geq 0$, 易证得 $\Delta M_5^1(t) \geq 0$. 由 $\Delta Q_a^2, \Delta S_a$ 和 ΔR 的形式, 有

$$\Delta S_a = \Delta Q_a^2 B^T, \quad \Delta R = B \Delta Q_a^2 B^T,$$

其中 $B = [O \ I_m]$. 则 ΔM_5^2 可重写为

$$\begin{aligned} \Delta M_5^2 &= \pi_\lambda \begin{bmatrix} C & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m+n} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q_a^2 & \Delta Q_a^2 \\ \Delta Q_a^2 & \Delta Q_a^2 \end{bmatrix} \times \\ &\begin{bmatrix} I_{m+n} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & B \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & I_m \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (a9)$$

因此可得 $\Delta M_5^2 \geq 0$, 则 $\Delta M_5(t) \geq 0$, 从而 $\Delta M(t) \geq 0$, 即不等式 $\bar{M}(t) \leq M(t)$ 成立. 证毕.

作者简介:

杨春山 博士, 教授, 目前研究方向为网络化系统鲁棒Kalman滤波, E-mail: ycszy1999@guat.edu.cn;

经本钦 博士研究生, 讲师, 目前研究方向为Kalman滤波及应用, E-mail: jingbenqin@126.com;

刘政 博士, 高级实验师, 目前研究方向为新能源管理、建模与状态估计, E-mail: liuz@guat.edu.cn;

王建琦 博士, 教授级高级工程师, 目前研究方向为网络系统鲁棒智能解耦控制技术, E-mail: wangjianqi@guat.edu.cn.