

# 严格反馈系统的事件触发学习控制

王 敏<sup>1†</sup>, 胡 锐<sup>1</sup>, 辛学刚<sup>2</sup>, 时昊天<sup>1</sup>

(1. 华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510641; 2. 华南理工大学 医学院, 广东 广州 510006)

**摘要:** 本文针对一类严格反馈非线性系统, 提出了基于确定学习的事件触发控制方案. 首先, 在本地控制测试端设计自适应神经网络控制, 并在控制过程中实现系统未知动态的知识获取和存储. 随后, 基于常值权值, 设计了新颖的事件触发控制器和事件触发条件. 结合李雅普诺夫稳定性分析和非线性脉冲动态系统原理, 验证了所提方案能够保证跟踪误差收敛到零的小邻域内以及所有闭环信号是最终一致有界的. 此外, 本文所提方案采用常值权值代替了估计权值, 使得所提方案易于实现, 暂态性能好和网络资源占用少. 最后, 通过对比仿真结果证明了所提方案的有效性.

**关键词:** 确定学习; 事件触发机制; 自适应控制; 神经网络; 严格反馈系统; 网络控制系统

**引用格式:** 王敏, 胡锐, 辛学刚, 等. 严格反馈系统的事件触发学习控制. 控制理论与应用, 2021, 38(10): 1577 – 1586

DOI: 10.7641/CTA.2021.00730

## Event-triggered learning control for strict-feedback systems

WANG Min<sup>1†</sup>, HU Rui<sup>1</sup>, XIN Xue-gang<sup>2</sup>, SHI Hao-tian<sup>1</sup>

(1. College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China;

2. School of Medicine, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510006, China)

**Abstract:** This paper proposes a novel event-triggered tracking control scheme for a class of strict-feedback nonlinear systems based on deterministic learning. Firstly, this paper designs an adaptive neural network control for strict-feedback systems on the local control test side and realizes the knowledge acquirement of unknown dynamics in the control process. Then, based on stored constant weights, this paper designs a novel event-triggered controller and a triggering condition. By combining Lyapunov stability analysis with nonlinear impulse dynamic system theory, the proposed control scheme can be verified to guarantee that the tracking error converges to a small neighborhood of zero and all the signals in the closed-loop system are uniformly ultimately bounded. Moreover, the proposed control scheme uses constant weights instead of estimated weights, which makes the proposed scheme possess some good features including the easy-to-implement triggered condition, the improved transient control performance, and the less network resource occupancy. A comparative simulation is given to illustrate the effectiveness of the proposed scheme.

**Key words:** deterministic learning; event-triggered mechanism; adaptive control; neural networks; strict-feedback systems; network control system

**Citation:** WANG Min, HU Rui, XIN Xuegang, et al. Event-triggered learning control for strict-feedback systems. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(10): 1577 – 1586

## 1 引言

严格反馈系统是一种十分常见的非线性系统. 在实际工程中, 很多系统都可建模为严格反馈系统, 例如机械臂<sup>[1]</sup>、移动机器人<sup>[2]</sup>、无人船<sup>[3]</sup>. 早期的严格反馈系统控制方案主要是针对系统完全已知或者部分参数未知情况<sup>[4–5]</sup>. 然而, 实际系统由于外部干扰和阻

尼等因素影响, 通常无法精确建模. 针对此问题, 一些学者联合神经网络逼近原理和后推技术, 提出了一些新颖的自适应神经网络控制方法, 从而有效解决了存在未知动态的严格反馈系统控制问题<sup>[6–9]</sup>. 值得指出的是, 现有的自适应神经网络控制方法学习能力较有限, 对于相同或者相似的控制任务, 仍需对神经网络

收稿日期: 2020–10–20; 录用日期: 2021–03–04.

†通信作者. E-mail: auwangmin@scut.edu.cn.

本文责任编辑: 孙长银.

国家自然科学基金项目(61773169, 61973129), 广东省自然科学基金项目(2019B151502058), 广东省重点领域研发计划项目(2020B1111010002), 广东海洋经济发展专项(粤自然资合[2020]018号), 广州市科技计划项目(201904010295)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61773169, 61973129), the National Natural Science Foundation of Guangdong Province (2019B151502058), the Key-Area Research and Development Program of Guangdong Province (2020B1111010002), the Guangdong Marine Economic Development Project (2020018) and the Guangzhou Science and Technology Project (201904010295).

进行重复的调整训练<sup>[10]</sup>. 此过程耗时严重并且在神经网络训练过程, 控制系统的暂态跟踪效果较差. 由此可见, 如何从动力学系统的神经网络控制过程中实现未知动态的学习变得尤为重要. 近年来, 王聪教授等人以二阶Brunovsky系统为研究对象, 提出了确定学习理论来尝试解决未知动态的学习问题<sup>[11-12]</sup>. 该理论证明了沿着周期轨迹的径向基函数神经网络满足持续激励条件, 从而结合线性时变系统指数稳定性原理实现了神经网络权值的收敛以及对未知动态的精确逼近. 结合系统解耦技术和动态面控制技术等, 文献[13]将确定学习原理推广到了严格反馈系统. 目前, 确定学习理论研究已广泛应用于解决许多面向实际的控制与学习问题, 例如预设性能控制<sup>[14]</sup>、编队控制<sup>[15-16]</sup>和故障诊断等<sup>[17]</sup>.

另一方面, 由于网络化控制系统可以实现资源共享, 远程控制, 且易于维护以及低成本等优点, 控制系统逐渐趋向于数字化和网络化, 例如地面站对无人船的远程操作, 以及数字控制台对车间工业机器人的远程控制等. 网络的共享与带宽受限容易导致网络拥塞和数据丢包, 如何有效使用网络资源在控制系统设计中具有重要意义. 传统的网络控制中通常采用时间触发的方式, 即每次信号都是等周期的进行传送, 此方案往往会产生网络资源的浪费. 为了克服此缺陷, 事件触发机制被提出来用于节省网络资源<sup>[18]</sup>, 其思想是将信号在必要的时候进行非周期的传输, 以此来节省网络资源. 近年来, 学者们基于事件触发机制做了大量工作<sup>[19-28]</sup>, 在文献[19]中, 将非线性滤波误差系统建模为时滞系统, 实现了自适应事件触发参数与滤波参数共同设计. 文献[20-21]使用了基于模型的事件触发控制方法, 通过在控制器端设计一个镜像的被控对象, 从而进一步地减少状态信号的传输次数, 但同时会增加整个系统的计算量. 在文献[22]中, 对于仅输出可测的系统, 利用状态观测器提出了输出反馈的事件触发控制方案. 在文献[23]中, 对于网络通道位于控制器到执行器端的系统, 提出了3种不同的事件触发控制方案. 在文献[24]中, 对于非线性级联系统, 通过增强学习, 提出了一种分布式最优事件触发控制方案. 在文献[25]中, 对于含有未知系统动态的非线性纯反馈系统, 提出了一种自适应神经网络事件触发控制方案. 文献[26]为了进一步减少事件触发次数, 提出了含有死区算子的事件触发机制. 文献[27-28]中针对离散非线性严格反馈系统提出了一种新型的自适应神经网络控制框架. 文献[29-32]对事件触发机制进行了扩展, 提出了自触发控制方案, 其触发时刻仅由系统之前的信号状态决定. 值得注意的是, 文献[25-28]中的神经网络缺乏好的学习能力, 导致依赖估计权值设计的事件触发条件难于实施, 且由于相同任务下仍需要重新调整神经网络权值增加了大量的计算负担.

基于上述原因, 本文针对带有传感器到控制器端网络通道资源受限的严格反馈非线性系统, 提出了一种基于确定学习的事件触发控制方法. 该控制方案设计分为两个部分. 在第一部分里, 本文首先在本地端网络资源充足的前提下设计了严格反馈系统的自适应神经网络控制器, 并在稳定的控制过程中实现系统未知动态的学习以及收敛估计权值的存储. 在第二部分里, 利用存储的权值设计了具有常系数的相对事件触发条件和静态事件触发控制器进行远程控制. 随后, 结合脉冲动力学系统原理与李雅普诺夫稳定原理验证了所提出的事件触发控制方案能够保证跟踪性能和闭环所有信号的一致最终有界. 该方案的主要贡献总结如下: 1) 提出采用确定学习原理来解决不确定非线性系统事件触发控制问题, 在系统本地网络资源充足的情况下实现了未知动态的知识获取与存储; 2) 利用经验知识进行事件触发控制方案设计, 大大降低了控制方案的计算量; 3) 利用获取到的常值神经网络权值设计了一种新型的事件触发条件. 该触发条件结合静态事件触发控制器, 相较于现有的自适应神经网络事件触发控制方案, 可以获取更好的暂态跟踪性能, 更少的触发次数以及更小的计算负担.

## 2 问题描述

考虑如下形式的严格反馈非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = g_i(\bar{x}_i)x_{i+1} + f_i(\bar{x}_i), \\ \dot{x}_n = g_n(\bar{x}_n)u + f_n(\bar{x}_n), \\ y = x_1, \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $g_i(\bar{x}_i)$ ,  $g_n(\bar{x}_n)$ ,  $f_i(\bar{x}_i)$  和  $f_n(\bar{x}_n) \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  是未知的非线性函数;  $\bar{x}_i = [x_1 \ \dots \ x_i]^T \in \mathbb{R}^i$ ,  $i = 1, \dots, n$  是系统状态向量;  $u \in \mathbb{R}$  是系统控制输入;  $y \in \mathbb{R}$  为系统输出.

本文中, 参考信号模型设计为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_{di} = x_{d,i+1}, \quad i = 1, \dots, m-1, \\ \dot{x}_{dm} = f_d(\mathbf{x}_d), \\ y_d = x_d, \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $\mathbf{x}_d = [x_{d1} \ \dots \ x_{dm}]^T \in \mathbb{R}^m$  为该参考信号模型的状态矢量;  $y_d \in \mathbb{R}$  为该模型的输出变量.  $f_d(\cdot)$  为已知光滑非线性函数. 本文假设  $x_{di} \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq m$  为回归信号且参考轨迹为回归轨迹.

本文的控制任务是在通讯资源受限的情况下, 设计基于确定学习的事件触发控制方案, 使得系统(1)的输出  $y$  跟踪给定的参考轨迹  $y_d$  和闭环系统的所有信号保持最终一致有界. 控制目标是在完成控制任务的前提下提升受控系统的暂态性能, 节省网络资源和降低算法的计算量.

**假设 1** 非线性函数  $g_i(\bar{x}_i)$  的符号是已知的, 且

满足  $g_i \leq g_i(\bar{x}_i) \leq \bar{g}_i$  和  $|\dot{g}_i(\bar{x}_i)| \leq \bar{g}_{id}$ , 其中  $g_i$ ,  $\bar{g}_i$  和  $\bar{g}_{id}$  是正常数.

**假设 2** RBF神经网络的基函数  $S(x_i)$  满足局部 Lipschitz 条件:  $\|S(x_i) - S(\hat{x}_i)\| \leq L_i \|x_i - \hat{x}_i\|$ , 其中  $L_i$  为 Lipschitz 常数.

**引理 1**<sup>[11]</sup> 如果 RBF 神经网络的输入信号  $Z(t)$  是回归的, 那么由接近  $Z(t)$  所构成的回归向量  $S(Z(t))$  是持续激励的.

本文的事件触发机制描述如下: 令  $\{t_k\}_{k=1}^\infty$  表示触发时刻序列, 其中  $t_{k+1} > t_k$  并且  $t_0 = 0$  表示第 1 次触发时刻序列. 当时间  $t$  为触发时刻  $t_k$  时, 从传感器获取的状态量  $x(t)$  会被传送到控制器端, 并记为  $\hat{x}(t)$ , 其表示为

$$\hat{x}_i(t^+) = x_i(t_k), t = t_k, i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

其中  $t^+$  表示紧随  $t_k$  触发时刻之后的瞬间时刻.

$x_i(t_k)$  的值通过零阶保持器保持到下一个触发时刻, 即

$$\hat{x}_i(t) = x_i(t_k), t_k \leq t < t_{k+1}, i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

定义事件触发误差  $e_i(t)$  为

$$e_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t), i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

### 3 基于确定学习的事件触发控制

在本节中, 首先构造自适应神经网络控制器并利用确定学习机制获取常值神经网络权值, 最后构造基于经验知识的事件触发控制器. 控制方案框图参见图 1 所示.

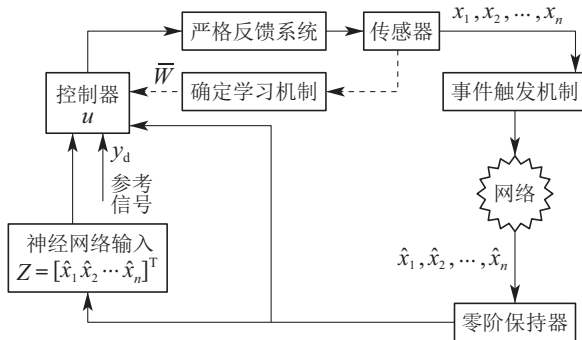


图 1 基于确定学习的事件触发控制框图

Fig. 1 The control framework of the proposed event-triggered control based on deterministic learning

#### 3.1 闭环未知系统动态的知识获取以及存储

在本地控制测试端, 即控制器在系统本地且网络资源充足的环境下, 首先通过设计自适应神经网络控制器, 实现闭环未知系统动态的知识获取以及存储.

**第  $i$  步** ( $1 \leq i < n$ ) 定义误差为  $z_i = x_i - \alpha_{i-1f}$ , 其中  $\alpha_{0f} = x_{d1}$ . 根据式(1)可以得到

$$\dot{z}_i = g_i(\bar{x}_i)x_{i+1} + f_i(\bar{x}_i) - \dot{\alpha}_{i-1f}. \quad (6)$$

定义  $z_{i+1} = x_{i+1} - \alpha_{if}$ , 可以得到

$$\dot{z}_1 = g_1(\bar{x}_1)(z_{1+1} + \alpha_{1f}) + f_1(\bar{x}_1) - \dot{\alpha}_{0-1f}. \quad (7)$$

定义未知动态  $H_i(Z_i)$  为

$$H_i(Z_i) = \frac{f_i(\bar{x}_i)}{g_i(\bar{x}_i)} - \frac{\dot{\alpha}_{i-1f}}{g_i(\bar{x}_i)}, \quad (8)$$

其中  $Z_i = [\bar{x}_i^T \ \dot{\alpha}_{i-1f}]^T$ .

利用 RBF 神经网络逼近未知动态  $H_i(Z_i)$

$$H_i(Z_i) = W_i^{*T} S(Z_i) + \varepsilon_i(Z_i), \quad (9)$$

其中:  $W_i^*$  为未知的理想神经网络权值,  $\varepsilon_i(Z_i)$  为逼近误差. 选取虚拟控制律  $\alpha_i$  为

$$\alpha_i = -k_i z_i - \hat{W}_i^T S(Z_i), \quad (10)$$

其中:  $k_i$  是正的设计参数,  $\hat{W}_i$  为理想权值  $W_i^*$  的估计值.

基于参数为  $\tau_i$  的一阶滤波器, 可以获得滤波变量  $\alpha_{if}$ :

$$\tau_i \dot{\alpha}_{if} + \alpha_{if} = \alpha_i, \alpha_{if}(0) = \alpha_i(0). \quad (11)$$

**第  $n$  步** 定义误差为  $z_n = x_n - \alpha_{n-1f}$ . 根据系统(1), 得

$$\dot{z}_n = g_n(\bar{x}_n)u + f_n(\bar{x}_n) - \dot{\alpha}_{n-1f}. \quad (12)$$

定义未知动态  $H_n(Z_n)$  为

$$H_n(Z_n) = \frac{f_n(\bar{x}_n)}{g_n(\bar{x}_n)} - \frac{\dot{\alpha}_{n-1f}}{g_n(\bar{x}_n)}, \quad (13)$$

其中  $Z_n = [\bar{x}_n^T \ \dot{\alpha}_{n-1f}]^T$ .

利用 RBF 神经网络逼近未知动态  $H(Z_n)$

$$H_n(Z_n) = W_n^{*T} S(Z_n) + \varepsilon_n(Z_n), \quad (14)$$

其中:  $W_n^*$  为未知的理想神经网络权值,  $\varepsilon_n(Z_n)$  为逼近误差. 选取实际控制律  $u$  为

$$u = -k_n z_n - \hat{W}_n^T S(Z_n), \quad (15)$$

其中:  $k_n$  是正的设计参数,  $\hat{W}_n$  为理想权值  $W_n^*$  的估计值. 随后, 选取权值更新率为

$$\dot{\hat{W}}_i = \Gamma_i(S(Z_i)z_i - \sigma_i \hat{W}_i), i = 1, \dots, n, \quad (16)$$

其中  $\Gamma_i$  和  $\sigma_i$  是正的设计参数.

**引理 2**<sup>[13]</sup> 考虑由严格反馈系统(1)、参考信号(2)、控制输入(10)(15)和权值更新率(16)构成的闭环系统. 对于任意给定的回归参考信号  $y_d$ , 有界的初始条件以及  $\hat{W}_i(0) = 0$ , 可知  $\hat{W}_i$  能够指数收敛到理想值  $W_i^*$  的一个小领域内, 并且未知动态  $H_i(Z_i)$  能够被沿着回归参考信号  $Z_i$  的常值神经网络  $\bar{W}_i^T S(Z_i)$  局部逼近, 其表达为

$$H_i(Z_i) = \bar{W}_i^T S(Z_i) + \epsilon_i(Z_i), \quad (17)$$

其中  $\epsilon_i(Z_i)$  为任意小的逼近误差, 且常值神经网络权

值

$$\bar{\mathbf{W}}_i = \text{mean}_{t \in [t_a, t_b]} \hat{\mathbf{W}}_i(t) = \frac{1}{t_b - t_a} \int_{t_a}^{t_b} \hat{\mathbf{W}}_i(s) ds, \quad (18)$$

其中:  $t_b > t_a > T$ ,  $[t_a, t_b]$ 为系统稳态后的时间段.

### 3.2 利用存储的经验知识构造事件触发控制器

在远程控制阶段,即控制器不在系统本地并且考虑网络资源受限的环境下,调用存储的系统未知动态经验知识,构造新的事件触发控制器,在保证控制性能的同时降低网络带宽的占用.

**第1步** 定义跟踪误差为  $\xi_1 = x_1 - x_{d1}$ , 根据式(1)可以得到

$$\dot{\xi}_1 = g_1(x_1)x_2 + f_1(x_1) - \dot{x}_{d1}. \quad (19)$$

定义  $\xi_2 = x_2 - \alpha_{11f}$ , 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= g_1(x_1)(z_2 + \alpha_{11f}) + f_1(x_1) - \dot{x}_{d1} = \\ &g_1(x_1)\left(\xi_2 + \alpha_{11f} + \frac{f_1(x_1)}{g_1(x_1)} - \frac{\dot{x}_{d1}}{g_1(x_1)}\right). \end{aligned} \quad (20)$$

定义相同的未知动态  $H_1(\mathbf{Z}_1)$ , 如式(8)所示. 为了便于后续设计, 记  $H_1(\mathbf{Z}_{11}) := H_1(\mathbf{Z}_1)$ . 基于引理2可知:

$$H_1(\mathbf{Z}_{11}) = \bar{\mathbf{W}}_1^T \mathbf{S}(\mathbf{Z}_{11}) + \epsilon_{11}(\mathbf{Z}_{11}), \quad (21)$$

其中:  $\bar{\mathbf{W}}_1$ 为已知的常数神经网络权值向量,  $\epsilon_{11}(\mathbf{Z}_{11})$ 为逼近误差且满足  $\epsilon_{11}(\mathbf{Z}_{11}) \leq \epsilon_{11}^*$ .

根据网络传输的数据  $\hat{\mathbf{Z}}_{11} = [\hat{x}_1 \ x_{d1}]^T$  和存储的神经网络权值知识(18), 设计基于事件触发的虚拟控制律  $\alpha_{11}$  为

$$\alpha_{11} = -c_1 \hat{\xi}_1 - \bar{\mathbf{W}}_1^T \mathbf{S}(\hat{\mathbf{Z}}_{11}), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad (22)$$

其中:  $c_1$ 是正的设计参数,  $\hat{\xi}_1 = \hat{x}_1 - x_{d1}$ .

基于参数为  $\tau_{11}$ 的一阶滤波器, 可以获得滤波变量  $\alpha_{11f}$ :

$$\tau_{11} \dot{\alpha}_{11f} + \alpha_{11f} = \alpha_{11}, \quad \alpha_{11f}(0) = \alpha_{11}(0). \quad (23)$$

**第*i*步** ( $2 \leq i < n$ ) 定义误差为  $\xi_i = x_i - \alpha_{i-1f}$ , 根据式(1)可以得到

$$\dot{\xi}_i = g_i(\bar{\mathbf{x}}_i)x_{i+1} + f_i(\bar{\mathbf{x}}_i) - \dot{\alpha}_{i-1f}. \quad (24)$$

定义  $\xi_{i+1} = x_{i+1} - \alpha_{if}$ , 可以得到

$$\dot{\xi}_i = g_i(\bar{\mathbf{x}}_i)(\xi_{i+1} + \alpha_{if}) + f_i(\bar{\mathbf{x}}_i) - \dot{\alpha}_{i-1f}. \quad (25)$$

定义未知动态  $H_i(\mathbf{Z}_i)$  为

$$H_i(\mathbf{Z}_i) = \frac{f_i(\bar{\mathbf{x}}_i)}{g_i(\bar{\mathbf{x}}_i)} - \frac{\dot{\alpha}_{i-1f}}{g_i(\bar{\mathbf{x}}_i)}, \quad (26)$$

其中:  $\mathbf{Z}_i = [\bar{\mathbf{x}}_i^T \ \dot{\alpha}_{i-1f}]^T$ .

根据一阶滤波器(11)(23), 可以设计正常数  $\tau_{11}$ , 使得  $\dot{\alpha}_{i-1f}$  近似于  $\dot{\alpha}_{i-1f}$ . 因此, 基于引理2获得的经验知

识, 可得

$$H_i(\mathbf{Z}_i) = \bar{\mathbf{W}}_i^T \mathbf{S}(\mathbf{Z}_i) + \epsilon_{li}(\mathbf{Z}_i), \quad (27)$$

其中:  $\bar{\mathbf{W}}_i$ 为已知的常数神经网络权值向量,  $\epsilon_{li}(\mathbf{Z}_i)$ 为逼近误差且满足  $\epsilon_{li}(\mathbf{Z}_i) \leq \epsilon_{li}^*$ .

相似于第1步, 基于事件触发机制由传感器传输到控制器的信号  $\hat{x}_i$ , 定义变量  $\hat{\mathbf{Z}}_i = [\hat{\mathbf{x}}_i^T \ \dot{\alpha}_{i-1f}]^T$ . 结合存储的神经网络权值知识(18), 设计基于事件触发的虚拟控制律  $\alpha_{li}$  为

$$\alpha_{li} = -c_i \hat{\xi}_i - \bar{\mathbf{W}}_i^T \mathbf{S}(\hat{\mathbf{Z}}_i), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad (28)$$

其中:  $c_i$ 是正的设计参数,  $\hat{\xi}_i = \hat{x}_i - \alpha_{i-1f}$ . 设计一阶滤波器, 可以获得滤波变量  $\alpha_{lif}$

$$\tau_{li} \dot{\alpha}_{lif} + \alpha_{lif} = \alpha_{li}, \quad \alpha_{lif}(0) = \alpha_{li}(0), \quad (29)$$

其中  $\tau_{li}$ 是小的正常数.

**第*n*步** 定义误差为  $\xi_n = x_n - \alpha_{n-1f}$ , 根据式(1)可以得到

$$\dot{\xi}_n = g_n(\bar{\mathbf{x}}_n)(u + f_n(\bar{\mathbf{x}}_n)) - \dot{\alpha}_{n-1f}. \quad (30)$$

定义未知动态  $H_n(\mathbf{Z}_n)$  为

$$H_n(\mathbf{Z}_n) = \frac{f_n(\bar{\mathbf{x}}_n)}{g_n(\bar{\mathbf{x}}_n)} - \frac{\dot{\alpha}_{n-1f}}{g_n(\bar{\mathbf{x}}_n)}, \quad (31)$$

其中  $\mathbf{Z}_n = [\bar{\mathbf{x}}_n^T \ \dot{\alpha}_{n-1f}]^T$ .

利用经验知识  $\bar{\mathbf{W}}_n$ (式(18))得

$$H_n(\mathbf{Z}_n) = \bar{\mathbf{W}}_n^T \mathbf{S}(\mathbf{Z}_n) + \epsilon_{ln}(\mathbf{Z}_n), \quad (32)$$

其中  $\epsilon_{ln}(\mathbf{Z}_n)$ 为逼近误差且满足  $\epsilon_{ln}(\mathbf{Z}_n) \leq \epsilon_{ln}^*$ .

定义  $\hat{\mathbf{Z}}_n = [\hat{\mathbf{x}}_n^T \ \dot{\alpha}_{n-1f}]^T$ , 其中  $\hat{\mathbf{x}}_n$ 是系统变量  $\bar{\mathbf{x}}_n$  经事件触发机制由传感器传输到控制器的信号. 随后, 设计基于事件触发的实际控制律  $u$  为

$$u = -c_n \hat{\xi}_n - \bar{\mathbf{W}}_n^T \mathbf{S}(\hat{\mathbf{Z}}_n), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad (33)$$

其中:  $c_n$ 是正的设计参数,  $\hat{\xi}_n = \hat{x}_n - \alpha_{n-1f}$ .

定义  $\bar{e}_i(t) = [e_1(t) \ e_2(t) \ \dots \ e_i(t)]^T, i = 1, \dots, n, \boldsymbol{\xi}(t) = [\xi_1(t) \ \xi_2(t) \ \dots \ \xi_n(t)]^T$ , 则事件触发条件设计为

$$\|\bar{e}_n(t)\|^2 \leq \mu \|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2, \quad (34)$$

其中

$$\mu = \frac{2\Gamma}{\sum_{i=1}^n (3c_i + \|\bar{\mathbf{W}}_i\|^2 L_i^2)}, \quad (35)$$

这里  $\Gamma$ 为正的设计参数,  $L_i$ 是基函数  $\mathbf{S}(\mathbf{Z}_i)$  的利普希茨系数.

**注1** 与现有文献[25]的事件触发条件不同, 本文的触发条件式(35)中包含的权值为存储的常值权值  $\bar{\mathbf{W}}_i$ . 根据式(35)可知,  $\mu$ 的值可以通过给定的  $\Gamma, c_i, L_i$  和  $\|\bar{\mathbf{W}}_i\|$  事先计算好. 然而, 文献[25]中事件触发条件包含的是动态变化的权值估计值  $\hat{\mathbf{W}}_i$ , 且该估计依赖于过程虚拟控制变量, 从而导致  $\mu$

的值需要通过在线实时计算  $\|\hat{\mathbf{W}}_i\|$  才能获得且计算过程复杂。因此, 与文献[25]相比, 本文所提出的事件触发条件所需的在线计算量更少, 更加易于实施。此外, 结合基于事件触发的神经网络学习控制器设计(33), 能够在获得更好暂态跟踪性能的同时减少更多的事件触发次数。

定义动态面滤波器产生的层面误差为

$$y_i = \alpha_{1if} - \alpha_{li}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (36)$$

根据式 (20)(22)(24)(28)(30)(33)(36), 可得如下基于事件触发的闭环误差系统:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = g_i(\bar{x}_i)[\xi_{i+1} + y_i - c_i \hat{\xi}_i + \bar{\mathbf{W}}_i^T (\mathbf{S}(\mathbf{Z}_{li}) - \mathbf{S}(\hat{\mathbf{Z}}_{li})) + \epsilon_{li}], \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{\xi}_n = g_n(\bar{x}_n)[-c_n \hat{\xi}_n + \bar{\mathbf{W}}_n^T \mathbf{S}(\hat{\mathbf{Z}}_{ln}) + \epsilon_{ln}], \\ \dot{y}_i = -y_i/\tau_{li} - \dot{\alpha}_{li}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{\xi}_1 = -\dot{x}_{d1}, \\ \dot{\xi}_i = -\dot{\alpha}_{i-1f}, \quad i = 2, \dots, n, \end{cases} \quad (37)$$

其中  $\mathbf{S}(\hat{\mathbf{Z}}_{ln}) = \mathbf{S}(\mathbf{Z}_{ln}) - \mathbf{S}(\hat{\mathbf{Z}}_{ln})$ 。

**定理 1** 对于系统(1), 在假设1-2以及虚拟控制器(28), 实际控制器(33)和事件触发条件(34)的作用下, 对于任意给定的常数  $\rho$  以及所有满足  $V(0) \leq \rho$  的初始状态, 通过选择适当的设计参数, 跟踪误差  $\xi_1(t)$  能够收敛到零的小邻域内, 闭环系统中的所有信号都是最终一致有界的, 且能够排除芝诺现象。

**证** 选取李雅普诺夫函数为

$$V = V_\xi + V_{\hat{\xi}} + V_y, \quad (38)$$

其中:

$$V_\xi = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2g_i} \xi_i^2, \quad V_{\hat{\xi}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \hat{\xi}_i^2, \quad V_y = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} y_i^T y_i.$$

**情况1** 触发间隔  $(t \in (t_k, t_{k+1}], k = 1, 2, \dots)$ 。根据式(37)以及假设2, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i(\xi_{i+1} + y_i - c_i \hat{\xi}_i + \|\bar{\mathbf{W}}_i\| L_i \|\bar{e}_i\| + \epsilon_{li}) + \xi_n(y_n - c_n \hat{\xi}_n + \|\bar{\mathbf{W}}_n\| L_n \|\bar{e}_n\| + \epsilon_{ln}) \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \left( \frac{-y_i}{\tau_{li}} - \dot{\alpha}_{li} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\dot{g}_i \xi_i^2}{2g_i^2} - \dot{x}_{d1} \hat{\xi}_1 - \sum_{i=1}^{n-1} \dot{\alpha}_{1if} \hat{\xi}_{i+1}, \end{aligned} \quad (39)$$

为了便于稳定性的证明, 将  $c_i$  拆分成  $c_{i1}$  和  $c_{i2}$ , 又由于  $e_i = \xi_i - \hat{\xi}_i$ ,  $y_i = \alpha_{1if} - \alpha_{li}$  以及杨氏不等式, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^{n-1} (\xi_i \xi_{i+1} + \xi_i y_i) + \sum_{i=1}^n (-c_{i1} \xi_i^2 + c_{i1} \xi_i e_i - c_{i2} \hat{\xi}_i^2 - c_{i2} e_i \xi_i + c_{i2} e_i^2 + \xi_i \|\bar{\mathbf{W}}_i\| L_i \|e_i\| + \xi_i \epsilon_{li}) \\ & + \hat{\xi}_1 \dot{x}_{d1} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i D_i - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_i^2}{\tau_{li}} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} y_i \hat{\xi}_{i+1} - \sum_{i=1}^n \frac{\dot{g}_i \xi_i^2}{2g_i^2}, \quad (40)$$

其中:  $D_1(\dot{x}_{d1}, \ddot{x}_d) = c_1 \dot{x}_{d1} + \ddot{x}_d$ , 并且对于  $i = 2, \dots, n-1$ , 有

$$D_i(y_1, \dots, y_{i-1}, \dot{x}_{d1}, \ddot{x}_{d1}) = \frac{c_i(-y_{i-1})}{\tau_{li-1}} + \bar{\mathbf{W}}_i^T \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \dot{\alpha}_{li-1f}} \frac{\dot{y}_{i-1}}{\tau_{li-1}},$$

从参考轨迹系统(3)可知,  $x_{d1}, \dot{x}_{d1}, \ddot{x}_{d1}$  是周期信号, 所以存在紧集

$$\Omega_d = \{\Omega_d | \Omega_d = (x_{d1}, \dot{x}_{d1}, \ddot{x}_{d1}) : x_{d1}^2 + \dot{x}_{d1}^2 + \ddot{x}_{d1}^2 \leq B_0\},$$

其中  $B_0 > 0$ 。由于集合

$$\Omega = \{\Omega | \Omega = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\xi_i}{g_i}\right) + \sum_{i=1}^n y_i \leq 2\rho\}$$

是紧集, 则  $\Omega \times \Omega_d$  也是紧集。  $D_i(\cdot)$  均在紧集  $\Omega \times \Omega_d$  中, 所以对于  $D_i(\cdot)$ , 存在最大常数  $N_i$  使得  $\|D_i(\cdot)\| \leq N_i$ 。由于  $\dot{x}_{d1}$  是周期信号, 所以对于  $\dot{x}_{d1}$  也存在一个最大常数  $B_d$ 。随后, 结合杨氏不等式, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \left(-\frac{5}{6}c_{i1} + \frac{3 + c_{i2} + \lambda_i}{2}\right) \xi_i^2 + \frac{1}{2} \xi_{i+1}^2 + \frac{1}{2} y_i^2 + \frac{c_{i2}}{2} e_i^2 + c_{i2} e_i^2 - c_{i2} \hat{\xi}_i^2 + \|\bar{\mathbf{W}}_i\|^2 L_i^2 \|\bar{e}_i\|^2 + \frac{3}{2} c_{i1} e_i^2 + \frac{\epsilon_{li}^2}{2\lambda_i} + \left(\frac{1}{2\delta_i} - \frac{1}{\tau_{li}} + \frac{1}{\gamma_{i+1}\tau_{li}^2}\right) y_i^2 + \frac{\delta_i}{2} N_i^2 \right] \\ & - \left(\frac{5}{6}c_{n1} - \frac{c_{n2}}{2} - \frac{1}{2}\right) \xi_n^2 + \frac{3}{2} c_{n1} e_n^2 + \frac{c_{n2}}{2} e_n^2 + c_{n2} e_n^2 - c_{n2} \hat{\xi}_n^2 + \|\bar{\mathbf{W}}_n\|^2 L_n^2 \|\bar{e}_n\|^2 + \sum_{i=2}^n \frac{\gamma_i}{4} \hat{\xi}_i^2 - \sum_{i=1}^n \frac{\dot{g}_i \xi_i^2}{2g_i^2} + \frac{1}{2\gamma_1} \hat{\xi}_1^2 + \frac{1}{\gamma_1} B_d^2, \end{aligned} \quad (41)$$

由于  $e_i^2 = \|e_i\|^2$ , 且  $\|e_i\|$  以及  $\|\bar{e}_i\|$  均小于等于  $\|\bar{e}_n\|$ , 结合事件触发条件(34), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \sum_{i=1}^{n-1} -\left(\frac{5}{6}c_{i1} - \frac{\bar{g}_{id}}{2g_i^2} - \frac{3}{2} - \frac{c_{i2}}{2} - \Gamma - \frac{\lambda_i}{2}\right) \xi_i^2 - \left(\frac{5}{6}c_{n1} - \frac{\bar{g}_{nd}}{2g_n^2} - \frac{1}{2} - \frac{c_{n2}}{2} - \Gamma - \frac{\lambda_n}{2}\right) \xi_n^2 \\ & - \sum_{i=1}^n \left(c_{i2} - \frac{\gamma_i}{4}\right) \hat{\xi}_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\tau_{li}} - \frac{1}{\gamma_{i+1}\tau_{li}^2} - \frac{1}{2\delta_i} - \frac{1}{2}\right) y_i^2 + \frac{1}{\gamma_1} B_d^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\delta_i}{2} N_i^2\right) + \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon_{di}^2}{2\lambda_i}. \end{aligned} \quad (42)$$

**情况2** 触发时刻  $(t = t_k, k = 1, 2, \dots)$ 。

在触发时刻, 有  $x_i^+ = x_i, \hat{x}_i^+ = x_i$ 。根据定义  $\xi_i = x_i - \alpha_{li-1f}, \hat{\xi}_i = \hat{x}_i - \alpha_{li-1f}$  和  $y_i = \alpha_{1if} - \alpha_{li}$ , 显然可得  $\xi_i^+ = \xi_i, \hat{\xi}_i^+ = x_i - \alpha_{li-1f} = \xi_i$ , 和  $g_i(\bar{x}_i^+) = g_i(\bar{x}_i)$ 。

由于 $\alpha_{i_i}$ 中包含 $\hat{x}_i$ ,所以 $\alpha_{i_i}$ 在触发时刻会产生跳变,即 $y_i^+ \neq y_i$ . 综上可得

$$\Delta V = \sum_{i=1}^n \frac{(\xi_i^+)^2}{2g_i(\mathbf{x}_i^+)} - \sum_{i=1}^n \frac{(\xi_i)^2}{2g_i(\bar{\mathbf{x}}_i)} + \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{\xi}_i^+)^2}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{\xi}_i)^2}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_i^{+2}}{2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_i^2}{2} \leq \sum_{i=1}^n \frac{-(\hat{\xi}_i)^2}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{-y_i^2}{2} + D^\xi + D^y, t = t_k. \tag{43}$$

其中 $D^\xi = (D_1^\xi)^2/2$ ,  $D^y = (D_2^y)^2/2$ 分别为 $\xi$ 和 $y$ 在触发间隔 $t \in (t_k, t_{k+1}]$ 时的界.

由式(42)–(43)可知,通过适当选择设计参数 $c_i, \tau_{i_i}$ ,两种情况下均可确保闭环系统内的所有信号都是最终一致有界的. 证毕.

接下来,将证明所提出的方案可以避免芝诺现象. 根据式(37),对 $\dot{\xi}_i$ 增加元素 $-\dot{\xi}_i (i = 1, \dots, n)$ ,则可得

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 - \dot{\hat{\xi}}_1 = g_1[\xi_2 - \hat{\xi}_2 + y_1 - (c_1 - 1)\hat{\xi}_2 + \bar{\mathbf{W}}_1^T(\mathbf{S}(\mathbf{Z}_{11}) - \mathbf{S}(\hat{\mathbf{Z}}_{11})) + \epsilon_{11} + \frac{1}{g_1}\dot{x}_{11}], \\ \dot{\xi}_i - \dot{\hat{\xi}}_i = g_i[\xi_{i+1} - \hat{\xi}_{i+1} + y_i - (c_i - 1)\hat{\xi}_{i+1} + \bar{\mathbf{W}}_i^T(\mathbf{S}(\mathbf{Z}_{i_i}) - \mathbf{S}(\hat{\mathbf{Z}}_{i_i})) + \epsilon_{i_i} + \frac{y_i}{g_i\tau_{i_i}}], \\ i = 2, \dots, n-1, \\ \dot{\xi}_n - \dot{\hat{\xi}}_n = g_n[-c_n\hat{\xi}_n + \bar{\mathbf{W}}_n^T(\mathbf{S}(\mathbf{Z}_{1n}) - \mathbf{S}(\hat{\mathbf{Z}}_{1n})) + \epsilon_{1n} + \frac{y_{n-1}}{g_n\tau_{n-1}}]. \end{cases} \tag{44}$$

由式(44)可知,如下不等式成立:

$$\begin{cases} |\dot{\xi}_1 - \dot{\hat{\xi}}_1| \leq \bar{g}_1|\xi_2 - \hat{\xi}_2| + \bar{f}_1, \\ |\dot{\xi}_i - \dot{\hat{\xi}}_i| \leq \bar{g}_i|\xi_{i+1} - \hat{\xi}_{i+1}| + \bar{f}_i, \\ |\dot{\xi}_n - \dot{\hat{\xi}}_n| \leq 0 + \bar{f}_n, \end{cases} \tag{45}$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= \bar{g}_1[(c_1 + 1)|\hat{\xi}_2| + |y_1| + 2\|\bar{\mathbf{W}}_1\| + |\epsilon_{11}| + \frac{1}{g_1}|B_d|], \\ \bar{f}_i &= \bar{g}_i[(c_i + 1)|\hat{\xi}_{i+1}| + |y_i| + 2\|\bar{\mathbf{W}}_i\| + |\epsilon_{i_i}| + \frac{1}{g_i}\frac{|y_i|}{\tau_{i_i}}], \\ \bar{f}_n &= \bar{g}_n(c_n|\hat{\xi}_n| + 2\|\bar{\mathbf{W}}_n\| + |\epsilon_{1n}| + \frac{1}{g_n}\frac{|y_n|}{\tau_{1n}}). \end{aligned}$$

从上述表达式和闭环系统所有信号的有界性,可验证 $\bar{f}_1, \bar{f}_i$ 和 $\bar{f}_n$ 也是有界的.

将式(45)写为状态空间形式

$$\|\dot{\xi} - \dot{\hat{\xi}}\| \leq \|A\|\|\xi - \hat{\xi}\| + \bar{f}, \tag{46}$$

其中:

$$\begin{aligned} \xi &= [\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_n]^T, \\ \hat{\xi} &= [\hat{\xi}_1 \ \hat{\xi}_2 \ \dots \ \hat{\xi}_n]^T, \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & \bar{g}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \bar{g}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{g}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \\ f &= [\bar{f}_1 \ \bar{f}_2 \ \dots \ \bar{f}_n]^T. \end{aligned}$$

当 $t_k < t \leq t_{k+1}$ ,有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\bar{e}_n\| &= \frac{d}{dt}(\bar{e}_n^T \bar{e}_n)^{\frac{1}{2}} = \frac{\bar{e}_n^T \dot{\bar{e}}_n}{\|\bar{e}_n\|} \leq \frac{\|\bar{e}_n\|\|\dot{\bar{e}}_n\|}{\|\bar{e}_n\|} = \|\dot{\bar{e}}_n\| = \|\dot{\xi} - \dot{\hat{\xi}}\|. \end{aligned} \tag{47}$$

根据式(46)–(47),以及在 $t = t_k$ 时有 $\bar{e}_n^+ = 0$ ,则可得

$$\begin{aligned} \|\bar{e}_n\| &\leq \int_{t_k^+}^t \exp(\|A\|(t-s))\|f\|ds = \frac{\|f\|}{\|A\|}[\exp(\|A\|(t-t_k)) - 1], t_k < t \leq t_{k+1}. \end{aligned} \tag{48}$$

类似文献[25–26],事件触发条件(34)表明 $\|\bar{e}_n\|$ 的最大偏移量为 $\|\bar{e}_n\|_{\max} = \sqrt{\mu}D^\xi$ ,其中 $D^\xi$ 为 $\xi$ 的界. 基于此,可以得到

$$\sqrt{\mu}D^\xi \leq \frac{\|f\|}{\|A\|}(\exp\|A\|(t_{k+1} - t_k) - 1). \tag{49}$$

由式(49)可得

$$t_{k+1} - t_k \geq \frac{1}{\|A\|} \ln\left(1 + \frac{\|A\|}{\|f\|}\sqrt{\mu}D^\xi\right) > 0. \tag{50}$$

因此,所提的控制方案没有芝诺现象.

#### 4 仿真研究

本节利用双连杆机械臂仿真来说明所提方案的有效性,机械臂模型如下所示:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + V_m(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau}, \tag{51}$$

其中:  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2]^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $V_m \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $\mathbf{G}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^2$ 分别是关节角位置、惯性矩阵、柯氏力矩阵、重力矩阵和摩擦力向量;  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^2$ 为控制力矩;  $M(\mathbf{q}), V_m(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \mathbf{G}(\mathbf{q}), \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}})$ 是系统未知

动态.

选取  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{q}, \mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{q}}$ , 则系统(51)转变为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = -M^{-1}(\mathbf{x}_1)[V_m(\mathbf{X})\mathbf{x}_2 + \mathbf{G}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{F}(\mathbf{x}_2)] + M^{-1}(\mathbf{x}_1)\boldsymbol{\tau}, \end{cases} \quad (52)$$

其中  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1^T \ \mathbf{x}_2^T]^T$ . 机械臂参数如下所示:

$$M(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} 0.4\dot{q}_1 \\ 0.4\dot{q}_2 \end{pmatrix},$$

$$V_m(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}, \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix},$$

其中:

$$M_{11} = d_1 + d_2 \cos q_2 + d_2 \cos q_2,$$

$$M_{21} = d_3 + \frac{d_2}{2 \cos q_2},$$

$$M_{12} = d_3 + \frac{d_2}{2 \cos q_2}, M_{22} = d_3,$$

$$G_1 = d_4 \cos q_1 + d_5 \cos q_2, G_2 = d_5 \cos(q_1 + q_2),$$

$$V_1 = -d_2 \sin q_2 (\dot{q}_1 \dot{q}_2 + 0.5\dot{q}_2^2),$$

$$V_2 = 0.5d_2 \sin(q_2 \dot{q}_1^2),$$

$$q_1 = d_1 = l_2^2 + l_1^2(m_1 + m_2), d_2 = 2l_1 l_2 m_2,$$

$$d_3 = l_2^2 m_2, d_4 = (m_1 + m_2)l_1 g, d_5 = m_2 l_2 g,$$

$$l_1 = 1 \text{ m}, l_2 = 1 \text{ m}, m_1 = 0.8 \text{ kg},$$

$$m_2 = 2.3 \text{ kg}, g = 9.8 \text{ m/s}^2.$$

定义

$$\mathbf{H}(\mathbf{Z}) = -V_m(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2 - \mathbf{G}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_2) - M(\mathbf{x}_1)\dot{\boldsymbol{\alpha}}_f = [h_1 \ h_2]^T,$$

其中:  $\mathbf{Z} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_f]^T$ ,  $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_f$  为虚拟控制器  $\boldsymbol{\alpha}_1$  经过一阶滤波器后的输出变量.  $\boldsymbol{\alpha}_1 = -c_1 \hat{\boldsymbol{\xi}}_1 + \dot{\mathbf{x}}_{d1}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\xi}}_1 = \hat{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{x}_{d1}$ . 滤波器为  $T\dot{\boldsymbol{\alpha}}_f + \boldsymbol{\alpha}_f = \boldsymbol{\alpha}_1$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_f(0) = \boldsymbol{\alpha}_1(0)$ .

在仿真中, 定义参考轨迹  $\mathbf{x}_d = [\mathbf{x}_{d1}^T \ \mathbf{x}_{d2}^T]^T$ ,  $\mathbf{x}_{d1} = [x_{d11} \ x_{d12}]^T$ ,  $\mathbf{x}_{d2} = [\dot{x}_{d11} \ \dot{x}_{d12}]^T$  和连杆关节角位移跟踪误差  $\boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{d1} = [\xi_{11} \ \xi_{12}]^T$ ; 选取  $x_{d11} = x_{d12} = \sin t$ , 选取含有 4050 个神经元的神经网络, 其中心均匀分布在  $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-4, 4] \times [-4, 4]$  上, 其宽度分别为 1.25, 1.25, 1.25, 1.25, 2.5 和 2.5; 选取控制器设计参数  $c_1 = 10, c_2 = 10, T = 0.01, \Gamma = 6.8, L = 1$ ; 系统初始状态选取为  $\mathbf{x}_1 = [x_{11} \ x_{12}]^T = [0 \ 0]^T$ ,  $\mathbf{x}_2 = [x_{21} \ x_{22}]^T = [0 \ 0]^T$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_f = [1 \ 1]^T$ . 仿真采样步长设置为 1 ms. 图 2 和图 3 分别描述了连杆一和连杆二对参考轨迹的跟踪效果, 图 4 表示了事件触发间隔时间, 图 5 给出了事件触发阈值和事件触发误差关系图, 可以看出事件触发误差始终小于阈值.

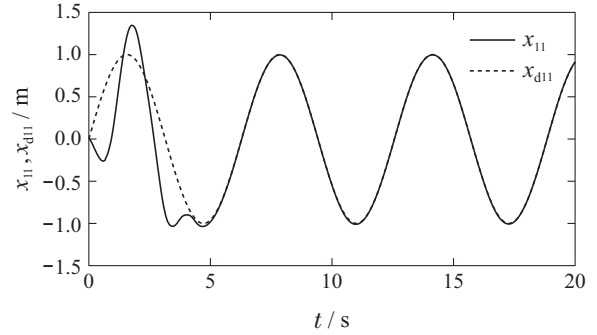


图 2 第 1 个连杆的位置跟踪效果

Fig. 2 Position tracking performance of the first link

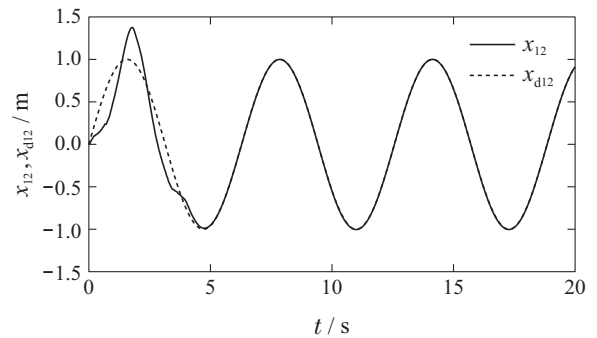


图 3 第 2 个连杆的位置跟踪效果

Fig. 3 Position tracking performance of the second link

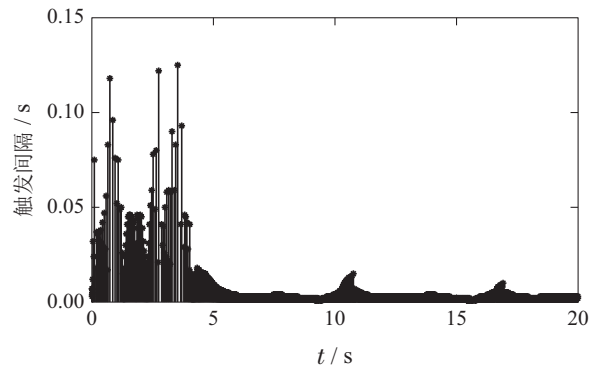


图 4 事件触发时间间隔

Fig. 4 Event interval time

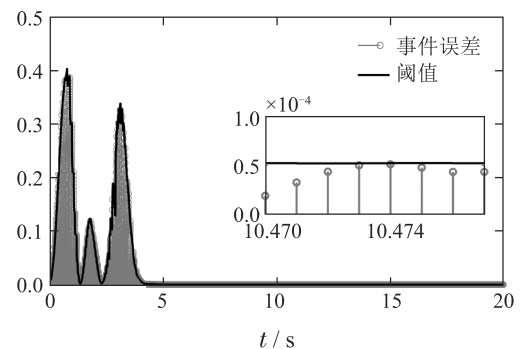


图 5 事件误差和阈值响应曲线

Fig. 5 Curves of the threshold and event error

为了进一步说明本文所提方案的有效性, 与现有

的自适应神经网络事件触发控制进行了仿真比较. 基于文献[25], 可以设计系统(52)的自适应神经网络事件触发控制器如下:

$$\tau = -\kappa_2 \hat{\chi}_2 - \hat{W}^T S(\hat{Z}_2),$$

其权值更新率为

$$\dot{W} = 0, t_k < t \leq t_{k+1},$$

$$\dot{W}^+ = \hat{W} + a \frac{e_2}{b + e_2^2} S(x_1, x_2) - \beta \hat{W}, t = t_k.$$

且事件触发条件为

$$\|e\|^2 \leq \lambda \|\chi\|^2,$$

其中:

$$\lambda = \frac{2\Gamma_a}{3(\kappa_1 + \kappa_2) + \|\hat{W}\|^2 L^2},$$

$$e = [e_1^T \ e_2^T]^T, \chi = [\chi_1^T \ \chi_2^T]^T,$$

$$e_1 = x_1 - \hat{x}_1, e_2 = x_2 - \hat{x}_2,$$

$$\chi_1 = x_1 - x_{d1} = [\chi_{11} \ \chi_{12}]^T,$$

$$\chi_2 = x_2 - \alpha_f, \hat{\chi}_2 = \hat{x}_2 - \alpha_f,$$

$$\hat{Z}_2 = [\hat{x}_1 \ \hat{x}_2 \ \hat{\alpha}_f]^T, T\hat{\alpha}_f + \alpha_f = \alpha_1,$$

$$\alpha_f(0) = \alpha_1(0), \alpha_1 = -\kappa_1 \hat{\chi}_1 + \dot{x}_{d1},$$

$$\hat{\chi}_1 = \hat{x}_1 - x_{d1},$$

$a$ 和 $b$ 都是正常数.

在仿真对比实验中, 采用相同的硬件平台、仿真时间、神经网络布点和初始状态; 文献[25]所提的自适应神经网络事件触发控制方案参数选取为 $\kappa_1 = 10$ ,  $\kappa_2 = 10$ ,  $L = 1$ ,  $T = 0.01$ ,  $\Gamma_a = 0.07$ ,  $a = 0.5$ ,  $b = 5$ ,  $\beta = 0.00001$ . 图6-10指示了两种方案对比的仿真结果.

图6-7描述了基于确定学习的事件触发控制(deterministic learning-based event-triggered control, DL-EC)和自适应神经网络事件触发控制(event-triggered adaptive neural control, EANC)的跟踪误差对比图, 图8和图9描述了采用上述两种控制方案的神经网络逼近未知动态的对比图. 图10描述了采用上述两种控制方案的触发次数对比图. 通过比较图6和图7以及图8和图9, 可以看出本文所提方案相比文献[25]所提的自适应神经网络事件触发控制方案, 其跟踪速度更快, 且神经网络逼近未知动态更快. 图10表明了所提方案可以更大程度的减少触发次数, 从而节省网络资源. 表1展示了基于确定学习的事件触发方案和自适应神经网络事件触发方案<sup>[25]</sup>在触发次数、暂态时间、平均绝对误差以及CPU耗时4项性能指标方面的对比结果. 由表1可知本文所提方案具有更好的跟踪性能, 更少的网络资源占用以及更小的计算负担.

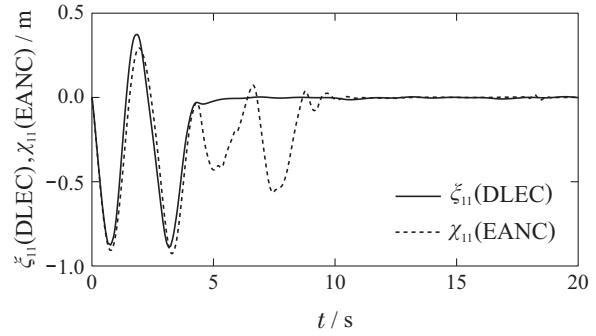


图6 第1个连杆的位置跟踪误差  
Fig. 6 Position tracking error of the first link

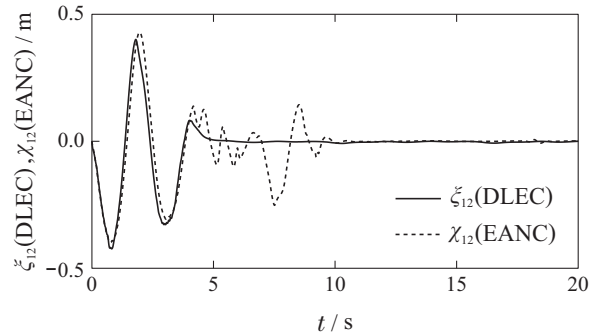


图7 第2个连杆的位置跟踪误差  
Fig. 7 Position tracking error of the second link

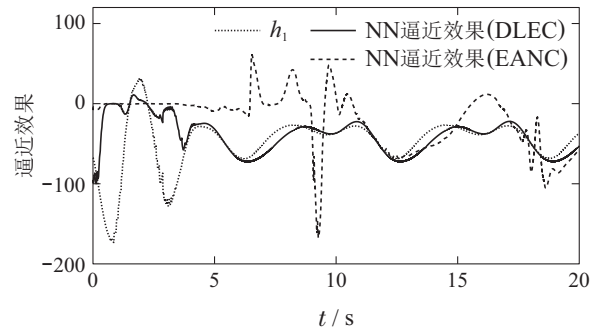


图8 神经网络对未知动态 $h_1$ 逼近效果  
Fig. 8 NN's approximation of unknown dynamics  $h_1$

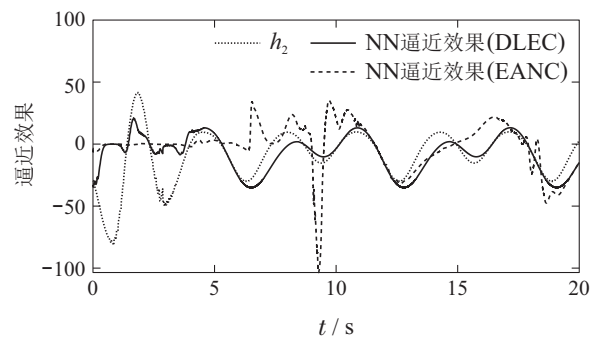


图9 神经网络对未知动态 $h_2$ 逼近效果  
Fig. 9 NN's approximation of unknown dynamics  $h_2$



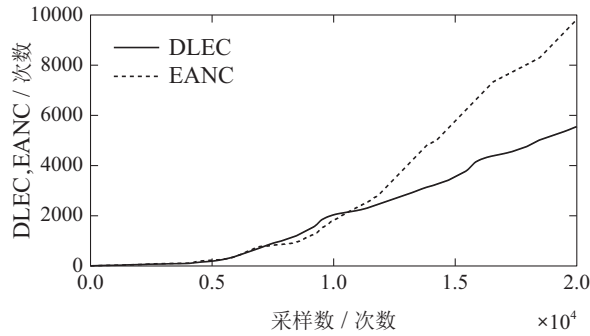


图 10 累计触发次数

Fig. 10 Cumulative number of events

表 1 自适应神经网络事件触发方案和基于确定学习事件触发方案性能对比

Table 1 Comparison of EANC and DLEC

	触发次数	暂态时间/s	MAE	CPU耗时/s
EANC	9823	11.4550	0.1142	31.9669
DLEC	5553	7.3830	0.0730	16.7041

## 5 结论

针对严格反馈非线性系统, 本文提出了基于确定学习的事件触发跟踪控制方案. 通过确定学习理论, 实现了系统未知动态的知识获取, 并将获取的知识存储于常值神经网络. 随后, 基于存储的经验知识设计了易于实施的相对事件触发条件, 并由此设计了新颖的事件触发控制器. 该控制器能够保证跟踪误差收敛到零的小邻域内, 闭环系统的所有信号都是有界的, 且避免芝诺现象. 仿真结果验证了此方案能够在节省网络资源的同时保证良好的跟踪效果. 特别是, 由于经验知识的利用, 所提出方案与传统的自适应神经网络事件触发控制方案相比具有更好的跟踪效果和更少的事件触发次数.

## 参考文献:

- [1] HE W, GE S S, HOW B V E, et al. Robust adaptive boundary control of a flexible marine riser with vessel dynamics. *Automatica*, 2011, 47(4): 722 – 732.
- [2] MARTINEZ R, CASTILLO O, AGUILAR L T, et al. Optimization of interval type-2 fuzzy logic controllers for a perturbed autonomous wheeled mobile robot using genetic algorithms. *Information Sciences*, 2009, 179(13): 2158 – 2174.
- [3] DAI S L, WANG M, WANG C. Neural learning control of marine surface vessels with guaranteed transient tracking performance. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, 63(3): 1717 – 1727.
- [4] KRISTIC M, KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York, NY, USA: Wiley, 1995.
- [5] LIU Wangkui, WEI Yiyin, DUAN Guangren. Adaptive control for second order multi-input multi-output nonlinear systems with state and input constraints. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(4): 533 – 541.  
(刘旺魁, 魏毅寅, 段广仁. 状态与输入受限的二阶多输入多输出非线性系统自适应控制. *控制理论与应用*, 2019, 36(4): 533 – 541.)
- [6] SANNER R M, SLOTINE J J E. Gaussian networks for direct adaptive control. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1992, 3(6): 837 – 863.
- [7] ZHANG T, GE S S, HANG C C. Adaptive neural network control for strict-feedback nonlinear systems using backstepping design. *Automatica*, 2000, 36(12): 1835 – 1846.
- [8] WANG M, WANG Z, DONG H, et al. A novel framework for backstepping-based control of discrete-time strict-feedback nonlinear systems with multiplicative noises. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 66(4): 1484 – 1496.
- [9] XIA Y, FU M, SHI P, et al. Adaptive backstepping controller design for stochastic jump systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(12): 2853 – 2859.
- [10] ANTSAKLIS P J. Intelligent learning control. *IEEE Control Systems*, 1995, 15(3): 5 – 7.
- [11] WANG C, HILL D J. Learning from neural control. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2006, 17(1): 130 – 146.
- [12] WANG M, WANG C. Recent advances on dynamic learning from adaptive NN control. *Control Theory and Technology*, 2020, 18(1): 107 – 109.
- [13] WANG M, WANG C. Learning from adaptive neural dynamic surface control of strict-feedback systems. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2015, 26(6): 1247 – 1259.
- [14] WANG M, WANG C, SHI P, et al. Dynamic learning from neural control for strict-feedback systems with guaranteed predefined performance. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2016, 27(12): 2564 – 2576.
- [15] HE S, WANG M, DAI S L, et al. Leader-follower formation control of USVs with prescribed performance and collision avoidance. *IEEE Transactions on Industrial Information*, 2019, 15(1): 572 – 581.
- [16] DAI S L, HE S, LIN H, et al. Platoon formation control with prescribed performance guarantees for USVs. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2018, 65(5): 4237 – 4246.
- [17] ZHANG J, YUAN C, STEGAGNO P, et al. Small fault detection from discrete-time closed-loop control using fault dynamics residuals. *Neurocomputing*, 2019, 365: 239 – 248.
- [18] TABUADA P. Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(9): 1680 – 1685.
- [19] XIANG Yun, LIN Chong, CHEN Bing. Filter design of networked nonlinear systems with adaptive event trigger. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(1): 1 – 12.  
(相贇, 林崇, 陈兵. 自适应事件触发网络化非线性系统滤波器设计. *控制理论与应用*, 2021, 38(1): 1 – 12.)
- [20] HEEMELS W P M H, DONKERS M C F. Model-based periodic event-triggered control for linear systems. *Automatica*, 2013, 49(3): 698 – 711.
- [21] JIANG B, KARIMI H R, KAO Y, et al. Takagi-sugeno model based event-triggered fuzzy sliding-mode control of networked control systems with semi-markovian switchings. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2020, 28(4): 673 – 683.
- [22] NARAYANAN V, JAGANNATHAN S, RAMKUMAR K. Event-sampled output feedback control of robot manipulators using neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2019, 30(6): 1651 – 1658.
- [23] XING L, WEN C, LIU Z, et al. Event-triggered adaptive control for a class of uncertain nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(4): 2071 – 2076.
- [24] YANG X, HE H. Decentralized event-triggered control for a class of nonlinear-interconnected systems using reinforcement learning. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, 51(2): 635 – 648.

- [25] LI Y X, YANG G H. Adaptive neural control of pure-feedback nonlinear systems with event-triggered communications. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, 29(12): 6242 – 6251.
- [26] GUO X, YAN W, CUI R. Event-triggered reinforcement learning-based adaptive tracking control for completely unknown continuous-time nonlinear systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(7): 3231 – 3242.
- [27] WANG M, WANG Z, CHEN Y, et al. Adaptive neural event-triggered control for discrete-time strict-feedback nonlinear systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(7): 2946 – 2958.
- [28] WANG M, WANG Z, CHEN Y, et al. Event-based adaptive neural tracking control for discrete-time stochastic nonlinear systems: a triggering threshold compensation strategy. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, 31(6): 1968 – 1981.
- [29] YI X, LIU K, DIMAROGONAS D V, et al. Dynamic event-triggered and self-triggered control for multi-agent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(8): 3300 – 3307.
- [30] TANG Y, GAO H, KURTHS J. Robust  $H_\infty$  self-triggered control of networked systems under packet dropouts. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, 46(12): 3294 – 3305.
- [31] ANTA A, TABUADA P. To sample or not to sample: self-triggered control for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(9): 2030 – 2042.
- [32] WANG X, LEMMON M D. Self-triggered feedback control systems with finite-gain stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(3): 452 – 467.

#### 作者简介:

王敏 教授, 博士生导师, 目前研究方向为智能自主控制、动态环境下的机器学习, E-mail: auwangmin@scut.edu.cn;

胡锐 硕士研究生, 目前研究方向为事件触发控制, E-mail: 594470792@qq.com;

辛学刚 教授, 博士生导师, 目前研究方向为医疗器械和科学仪器装备研发, E-mail: xinxg@scut.edu.cn;

时昊天 博士研究生, 目前研究方向为确定学习, E-mail: shihao-tian1009@126.com.