第 38 卷第 12 期
2021 年 12 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 38 No. 12
Dec. 2021

热波耦合系统的指数镇定及其H_∞鲁棒性

金雪莲[1], 张思佳[2], 郑　福[2†]

(1. 辽宁工业大学 理学院, 辽宁 锦州 121002; 2. 渤海大学 数学科学学院, 辽宁 锦州 121013)

摘要: 本文对具有边界观测和同位控制的一维热波耦合系统的指数镇定进行了研究. 当控制为零时, 系统是多项式稳定的. 本文设计2种反馈方式–静态负比例反馈和动态反馈, 利用Lyapunov函数直接法, 得到在2种反馈下闭环系统是指数稳定的. 此外, 并对2种控制的H_∞鲁棒性进行了分析, 给出了相应的充分条件.

关键词: 热波方程; 边界反馈; 指数稳定性

引用格式: 金雪莲, 张思佳, 郑福. 热波耦合系统的指数镇定及其H_∞鲁棒性. 控制理论与应用, 2021, 38(12): 2069 – 2075

DOI:10.7641/CTA.2021.00814

The exponential stabilization of the heat-wave coupled system and H_∞ robustness

JIN Xue-lian[1], ZHANG Si-jia[2], ZHENG Fu[2†]

(1. Science College, Liaoning University of Technology, Jinzhou Liaoning 121002, China;
2. Department of Mathematics, Bohai University, Jinzhou Liaoning 121013, China)

Abstract: In this paper, the exponential stabilization of the heat-wave coupled equation with observation and collocated control is discussed. The system is only polynomially stable when the control is zero. Two feedback strategies, static negative proportional feedback and dynamic feedback are designed. By the direct method of Lyapunov function, the exponential stability of the closed-loop systems is tested. Moreover, the H_∞ robustness of two controls is further analyzed and the related sufficient conditions are given.

Key words: heat-wave equation; boundary feedback; exponential stability

Citation: JIN Xuelian, ZHANG Sijia, ZHENG Fu. The exponential stabilization of the heat-wave coupled system and H_∞ robustness. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(12): 2069 – 2075

1 引言

本文研究由如下偏微分方程组描绘的一维热波耦合系统,

$$\begin{cases} z_t(t,x)-z_{xx}(t,x)=0,\ x\in(-1,0),\\ y_{tt}(t,x)-y_{xx}(t,x)=0,\ x\in(0,1),\\ z(t,-1)=0,\ y_x(t,1)=u(t),\\ y_t(t,0)=z(t,0),\ y_x(t,0)=z_x(t,0),\\ z(0,x)=z^0,\ y(0,x)=y^0,\ y_t(0,x)=y^1. \end{cases} \tag{1}$$

这个系统是一维空间中流体结构交互作用的线性化模型, 由一根热杆和一根振动的弦组成. 这里假设热杆所占的空间为$(-1,0)$, 弹性弦所占的空间为$(0,1)$, $z(t,x)$表示t时刻热杆在$x\in(-1,0)$处的温度, $y(t,x)$表示t时刻震动弦在$x\in(0,1)$处偏离平衡态的位移, 热杆的左端点温度恒为零, 在弦的右端实施Neumann边界控制$y_x(t,1)=u(t)$, 并具有同位速度观测$O(t)=y_t(t,1)$, 热杆和弦在内部节点$x=0$ (也称作传输界面)相连. 文献[1]对系统的零可控性、可观性和稳定性进行了详细的研究, 结果表明当控制$u(t)=0$时, 系统是多项式稳定的, 而不是指数稳定的; 当控制$u(t)$存在时, 系统是零可控的. 文献[2–3]给出了更多相关的结果, 但是在系统的稳定性分析方面, 只是得到系统是多项式稳定的, 而不是指数稳定的.

系统(1)具有多项式稳定性的原因在于它是由一个指数稳定的系统(热方程部分)和一个能量守恒系统(波方程部分)耦合在一起的, 由于连接2个部分的耗散

收稿日期: 2020−11−17; 录用日期: 2021−04−28.
†通信作者. E-mail: zhengfu@qymail.bhu.edu.cn; Tel.: +86 13841631604.
本文责任编委: 郭宝珠.
国家自然科学基金项目(11871117), 辽宁省教育厅科学研究经费项目(JJL201915408)资助.
Supported by the National Natural Science Foundation of China (11871117) and the Scientific Research Fund Project of Liaoning Provincial Department of Education (JJL201915408).

机制太弱, 只有热方程部分是指数稳定的, 并不能把整个系统交互作用成指数稳定的. 文献[4]的研究结果进一步表明, 即使将控制$u(t)$设计为如下的动态反馈控制:

$$u(t)=-\eta(t),\ \eta_t(t)-O(t)+\beta\eta(t)=0,$$

此时波方程部分相应于一个多项式稳定的系统(见文献[5]), 但是整个系统仍然是多项式稳定的. 可见想要指数镇定系统(1), 需要从指数稳定的波方程中寻找控制, 因而受文献[6–10]的启发, 本文采用如下负比例反馈:

$$u(t)=-kO(t),\ k>0 \tag{2}$$

和动态反馈控制

$$u(t)=-c^{\mathrm{T}}w(t)-dO(t), \tag{3}$$

$$w_t=Aw(t)+bO(t), \tag{4}$$

其中: $u(t)\in\mathbb{R}^n$是控制器的状态, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$是常数矩阵, $b,c\in\mathbb{R}^n$是列向量, d是正常数. 本文主要采用Lyapunov函数法验证系统(1)在负比例反馈控制(2)和动态反馈控制(3)–(4)下都是指数稳定的.

系统(1)描绘的是流体结构交互作用的线性化模型, 原模型应该是由Navier-Stokes方程和弹性方程通过自由接触界面耦合在一起的, 但是对于这种复杂的情形, 系统解的存在性和唯一性都是未解决的难题, 文献[12]给出了变形的此类系统的解的存在性相关结果. 相比较而言, 虽然系统(1)易于研究, 但是它的稳定性分析不但是非平凡的, 而且还是非常复杂和困难的. 事实上, 耦合方程一直是工程学、数学和控制论中的重要研究内容, 特别是耦合方程的镇定是热点研究问题, 但有一定困难和复杂性[13–17]. 除了上面提及的热波耦合系统[11]外, 还有抽象双曲–抛物耦合系统(Russell将这种耦合称之为间接阻尼机制)[18–19]、波–波耦合系统[14,20–21]、热弹性系统[15,19,22–23]、流体结构通过界面耦合系统[24–26]、热–波平面网络系统[27]、梁方程–波方程耦合系统[16]和梁方程–薛定谔方程耦合系统[17]等.

负比例反馈(2)是非常经典的, 可见文献[10,28]及其中的参考文献. 动态反馈控制(3–4)来自[6–9]. 但是事实上, 动态反馈控制在当代控制论中是广泛使用的[29–32], 特别是输出调节问题中的鲁棒控制仅在动态控制中是存在的, 这可由内模原理得到[33](Lemma 1.21, p. 19). 关于无穷维空间上抽象系统的动态控制和静态控制之间的关系可见文献[34–35].

本文结构如下: 第2节对相应于负比例反馈(2)的闭环系统的指数稳定性进行了研究; 第3节对相应于动态边界反馈(3)–(4)的闭环系统的指数稳定性进行了研究; 第4节给出了2种控制是H_∞鲁棒的充分条件; 第5节是总结和展望部分.

2 静态反馈系统的指数稳定性

系统(1)在静态反馈(2)下的闭环系统为

$$\begin{cases} z_t(t,x)-z_{xx}(t,x)=0,\ x\in(-1,0),\\ y_{tt}(t,x)-y_{xx}(t,x)=0,\ x\in(0,1),\\ z(t,-1)=0,\ t\geqslant 0,\\ y_t(t,0)=z(t,0),\ y_x(t,0)=z_x(t,0),\\ y_x(t,1)=-ky_t(t,1),\ t\geqslant 0,\\ z(0,x)=z^0(x),\ y(0,x)=y^0(x),\\ y_t(0,x)=y^1(x). \end{cases} \tag{5}$$

引入系统(5)的状态空间为

$$H=L^2(0,1)\times H^1(0,1)\times L^2(0,1)$$

及其内积

$$\langle m,\tilde m\rangle_H=\frac12\int_0^1[z(-x)\overline{\tilde z(-x)}+u\overline{\tilde u}+v\overline{\tilde v}]\mathrm{d}x,$$

其中: $m=(z(-\cdot),u(\cdot),v(\cdot)),\tilde m=(\tilde z(-\cdot),\tilde u(\cdot),\tilde v(\cdot))\in H$. 显然, 系统(5)的能量

$$E(t)=\frac12\int_0^1[|z(t,-x)|^2+|y_x(t,x)|^2+|y_t(t,x)|^2]\mathrm{d}x$$

是相应于上述内积导出的范数.

若令$X(t)=(z(t,-x)\ \ y(t,x)\ \ y_t(t,x))^{\mathrm{T}}$, 则可将系统(5)写成抽象微分方程形式:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t)=BX(t)=\begin{pmatrix} z_{xx}(t,-x)\\ y_t(t,x)\\ y_{xx}(t,x)\end{pmatrix},\\ X(0)=(z^0(-x),y^0(x),y^1(x))\in H, \end{cases} \tag{6}$$

其中算子B的定义域为

$$\begin{aligned} D(B)=\{m=(z(-x),u(x),v(x))\in\\ H|z(-x),u(x)\in H^2(0,1),\ v(x)\in\\ H^1(0,1),\ v(0)=z(0),\ z(-1)=0,\\ u_x(0)=z_x(0),\ u(1)=-kv(1)\}. \end{aligned}$$

定理 1 算子B在H上生成的半群是收缩的C_0半群.

证 很容易看出, 算子B是稠定闭算子, 由直接计算得

$$\mathrm{Re}\langle Bm,m\rangle=\frac12(\langle Bm,m\rangle+\langle m,Bm\rangle)=-\int_0^1 z_x^2(-x)\mathrm{d}x-kv^2(1), \tag{7}$$

进而有$\mathrm{Re}\langle Bm,m\rangle\leqslant 0$, 即$B$是耗散算子. 此外, 利用

共轭算子的定义, 易于求得

$$B^*\tilde{m}=(\tilde{z}(t,-x),-\tilde{v}_x,-\tilde{u}_x),$$

$\forall\tilde{m}=(\tilde{z}(t,-x),\tilde{u},\tilde{v})\in D(B^*)$, 定义域为

$$D(B^*)=\{\tilde{m}=(\tilde{z}(-x),\tilde{u}(x),\tilde{v}(x))\in H|z(-x),$$
$$u(x)\in H^2(0,1),\ v(x)\in H^1(0,1),\ \tilde{z}(-1)=0,$$
$$\tilde{v}(0)=\tilde{z}(0),\ \tilde{u}_x(0)=-\tilde{z}_x(0),\ \tilde{u}(1)=k\tilde{v}(1)\}.$$

同样地有,

$$\mathrm{Re}\langle B^*\widetilde{m},\widetilde{m}\rangle=-\int_0^1\tilde{z_x}^2(-x)\mathrm{d}x-k\widetilde{v}^2(1)\leqslant 0.$$

所以, B^*也是耗散算子, 进而得出由算子B生成的半群$T(t)$是收缩半群[36](定理6.1.8).　　证毕.

利用算子半群理论可知系统(5)是适定的, 并且系统(5)的唯一解可以由$T(t)X_0$给出. 此外, 从定理1的证明和能量$E(t)$与半群$T(t)$的关系可知系统(5)能量满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)=-\int_0^1 z_x^2(t,-x)\mathrm{d}x-ky_t^2(t,1).\quad(8)$$

为了得到系统(5)的指数稳定性, 令$0<\varepsilon<1$是可以自由选取的参数, 构造Lyapunov函数: $G(t)=E(t)+\varepsilon\phi(t)$, 其中$\phi(t)$是待定的函数. 为了给出$\varepsilon\phi(t)$的具体表达式, 首先由式(5)的第1个等式并利用分部积分公式有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1|z(t,-x)|^2\mathrm{d}x=\\&-2\int_0^1|z_x(t,-x)|^2\mathrm{d}x+2y_x(t,0)y_t(t,0)\leqslant\\&-4\int_0^1|z(t,-x)|^2\mathrm{d}x+2y_x(t,0)y_t(t,0),\end{aligned}\quad(9)$$

其中: 最后1个不等式用到了Wirtinger不等式[38]. 其次, 利用研究波动方程所用到熟知的辅助函数$\int_0^1 x\cdot y_t(t,x)y_x(t,x)\mathrm{d}x$可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 xy_t(t,x)y_x(t,x)\mathrm{d}x=\\&\frac{1}{2}(1+k^2)y_t^2(t,1)-\frac{1}{2}\int_0^1[y_t^2(t,x)+y_x^2(t,x)]\mathrm{d}x.\end{aligned}\quad(10)$$

再次, 注意到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1[(1-x)y_t^2(t,x)+(1-x)y_x^2(t,x)]\mathrm{d}x\leqslant\\&-2y_t(t,0)y_x(t,0)+\int_0^1[y_t^2(t,x)+y_x^2(t,x)]\mathrm{d}x.\end{aligned}\quad(11)$$

最后, 除了考虑消掉无关交叉项$y_t(t,0)y_x(t,0)$外, 还需考虑$\phi(t)$估计式中能量$E(t)$中所有项的平衡. 这样, 由$\frac{1}{10}(9)+(10)+\frac{1}{10}(11)$不但可以得到辅助函数的表达式(为后面方便写成矩阵的形式)

$$\phi(t)=\int_0^1 m\varPhi m^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x,\ m=[z(t,-x)\ \ y_x\ \ y_t],\quad(12)$$

其中

$$\varPhi=\begin{pmatrix}\frac{1}{10}&0&0\\0&\frac{1-x}{10}&\frac{x}{2}\\0&\frac{x}{2}&\frac{1-x}{10}\end{pmatrix},\quad(13)$$

而且根据能量$E(t)$和Lyapunov函数$G(t)$的表达式, 还有如下性质.

引理 1　Lyapunov函数$G(t)$等价于能量$E(t)$, 即如下关系式成立:

$$(1-\varepsilon)E(t)\leqslant G(t)\leqslant(1+\varepsilon)E(t).$$

引理 2　辅助函数$\phi(t)$满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t)\leqslant-\frac{4}{5}E(t)+\frac{1}{2}(1+k^2)y_t^2(t,1).\quad(14)$$

在给出本节的主要结果之前, 先给出一个注.

注 1　辅助函数$\phi(t)$由3部分组成, 前2部分分别来自研究热方程和波动方程指数稳定性所用到的Lyapunov函数[37], 第3部分是为了消掉交叉项$y_t(t,0)y_x(t,0)$而引入的. 辅助函数的系数是为了平衡$\phi(t)$中各项使其相关项合在一起与能量$E(t)$中各项一致, 可见, 系数的选取是不唯一的, 也就是说辅助函数$\phi(t)$有无穷多种设计方法.

定理 2　能量$E(t)$具有如下指数衰减率:

$$E(t)\leqslant\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\mathrm{e}^{-\frac{4}{5}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}t}E(0),$$

其中ε满足$0<\varepsilon<1$.

证　由式(8)和引理2可知

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t)=\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)+\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t)\leqslant\\&-\int_0^1 z_x^2(t,-x)\mathrm{d}x-ky_t^2(t,1)-\frac{4}{5}\varepsilon E(t)+\\&\frac{\varepsilon}{2}(k^2+1)y_t^2(t,1)\leqslant\\&-\frac{4}{5}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}G(t)-[k-\frac{\varepsilon}{2}(k^2+1)]y_t^2(t,1)\leqslant\\&-\frac{4}{5}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}G(t),\end{aligned}$$

其中: 选取参数ε确保

$$k-\frac{\varepsilon}{2}(k^2+1)>0,\quad(15)$$

所以有$\varepsilon<\frac{2k}{k^2+1}$. 再由比较原理[37](3.1节)可得

$$G(t)\leqslant\mathrm{e}^{-\frac{4}{5}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}t}G(0).$$

最后由引理1得

$$E(t) \leqslant \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\mathrm{e}^{-\frac{4}{5}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}t}E(0).$$

证毕.

3 动态反馈系统的指数稳定性

系统(1)在动态反馈控制(3)–(4)下的闭环系统为

$$\begin{cases} z_t(t,x)-z_{xx}(t,x)=0,\ x\in(-1,0),\\ y_{tt}(t,x)-y_{xx}(t,x)=0,\ x\in(0,1),\\ z(t,-1)=0,\ t\geqslant 0,\\ y_t(t,0)=z(t,0),\ y_x(t,0)=z_x(t,0),\\ y_x(t,1)=-c^{\mathrm T}w(t)-dy_t(t,1),\\ w_t=Aw(t)+by_t(t,1),\\ z(0,x)=z^0(x),\ y(0,x)=y^0(x),\\ y_t(0,x)=y^1(x),\ w(0)=\eta, \end{cases} \tag{16}$$

其中A, b, c, d和$w(t)$在引言中已给出. 本节的结果依赖于如下假设:

H_1: 矩阵A的所有特征值有负实部;

H_2: (A, b)是可控的和(c, A)是可观的;

H_3: 对任意的实数s, 存在另一常数$\gamma\geqslant 0$, 使得$d\geqslant\gamma$和

$$d+\mathrm{Re}c^{\mathrm T}(isI-A)^{-1}b>\gamma.$$

由 Meyer-Kalman-Yakubovich 引理[6] (P. 1786)可知, 在这几个假设下, 对给定任意对称正定矩阵$Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 存在对称正定矩阵$P\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 向量$q\in\mathbb{R}^n$, 常数$\varDelta>0$满足

$$A^{\mathrm T}P+PA=-qq^{\mathrm T}-\varDelta Q, \tag{17}$$

$$Pb-c=\sqrt{2(d-\gamma)}q. \tag{18}$$

引入系统(16)空间

$$H_{\mathrm d}=L^2(0,1)\times L^2(0,1)\times L^2(0,1)\times\mathbb{R}^n$$

及其上的内积

$$\langle m,\tilde m\rangle_{H_{\mathrm d}}=\frac12\int_0^1(z(-x)\overline{\tilde z(-x)}+u\overline{\tilde u}+v\overline{\tilde v})\mathrm dx+\frac12\tilde w^{\mathrm T}Pw, \tag{19}$$

其中: $m=(z(-\cdot),u(\cdot),v(\cdot),w)$, $\tilde m=(\tilde z(-x),\tilde u,\tilde v,\tilde w)\in H_{\mathrm d}$, 正定矩阵$P$已在上面给出.

若令$Y(t)=(z(t,-x)\ \ y(t,x)\ \ y_t(t,x)\ \ w(t))^{\mathrm T}$, 算子$B_{\mathrm d}$的定义域为

$$\begin{aligned} D(B)=\{&m=(z(-x),u(x),v(x),w)\in\\ &H_{\mathrm d}|z(-x),\ u(x)\in H^2(0,1),\\ &v(x)\in H^1(0,1),\ v(0)=z(0),\\ &z(-1)=0,\ u_x(0)=z_x(0),\\ &u(1)=-c^{\mathrm T}w-dv(1)\}, \end{aligned}$$

可将系统(16)写成抽象微分方程形式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm d}{\mathrm dt}Y(t)=B_{\mathrm d}Y(t)=\begin{pmatrix} z_{xx}(t,-x)\\ y_t(t,x)\\ y_{xx}(t,x)\\ Aw+by_t(t,1)\end{pmatrix},\\ Y(0)=Y_0=(z^0(-x),y^0,y^1,\eta)\in H_{\mathrm d}. \end{cases} \tag{20}$$

则有如下适定性结果.

定理 3 算子$B_{\mathrm d}$在$H_{\mathrm d}$上生成的半群是收缩的C_0半群$T_{\mathrm d}(t)$.

证 很容易看出, 算子$B_{\mathrm d}$是稠定闭算子, 由直接计算得

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\langle B_{\mathrm d}m,m\rangle=\\ &\frac12(\langle B_{\mathrm d}m,m\rangle+\langle m,B_{\mathrm d}m\rangle)=\\ &-\int_0^1 z_x^2(-x)\mathrm dx-\frac12[\sqrt{2(d-\gamma)}v(t,1)-w^{\mathrm T}q]^2-\\ &\gamma v^2(t,1)-\frac{\varDelta}{2}w^{\mathrm T}Qw. \end{aligned}$$

进而有$\mathrm{Re}\langle B_{\mathrm d}m,m\rangle\leqslant 0$, 即$B_{\mathrm d}$是耗散算子. 此外, 利用共轭算子的定义, 易于求得

$$B_{\mathrm d}^*\tilde m=(\tilde z(t,-x),-\tilde v_x,-\tilde u_x,-A\tilde w-b\tilde v(1)),$$

$\forall\tilde m=(\tilde z(t,-x),\tilde u,\tilde v,\tilde w)\in D(B_{\mathrm d}^*)$, 定义域为

$$\begin{aligned} &D(B_{\mathrm d}^*)=\\ &\{\tilde m=(\tilde z(-x),\tilde u(x),\tilde v(x),\tilde w)\in H_{\mathrm d}|z(-x),\\ &u(x)\in H^2(0,1),\ v(x)\in H^1(0,1),\ \tilde z(-1)=0,\\ &\tilde v(0)=\tilde z(0),\ \tilde u(0)=-\tilde z_x(0),\\ &\tilde u(1)+\tilde w^{\mathrm T}\sqrt{2(d-\gamma)}q+c\tilde w^{\mathrm T}-d\tilde v(1)=0,\\ &\sqrt{2(d-\gamma)}q^{\mathrm T}w\tilde v(1)=\tilde w^{\mathrm T}(qq^{\mathrm T}+\varDelta Q)w\}. \end{aligned}$$

同样地,

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\langle B_{\mathrm d}^*\tilde m,\tilde m\rangle_{H_{\mathrm d}}=&-d\tilde v^2(1)-\int_0^1\tilde{z_x}^2(-x)\mathrm dx-\\ &\frac12\tilde w^{\mathrm T}(PA+A^{\mathrm T}P)\tilde w\leqslant 0. \end{aligned}$$

所以, $B_{\mathrm d}^*$也是耗散算子, 进而得出由算子$B_{\mathrm d}$生成的半群$T_{\mathrm d}(t)$是收缩半群. 证毕.

这样利用上节同样的分析可知系统(16)是适定的, 并且它的唯一解可以由$T_{\mathrm d}(t)Y_0$给出. 此外, 显然系统(16)的能量

$$\begin{aligned} E_{\mathrm d}(t)=&\frac12\int_0^1[|z(t,-x)|^2+|y_x(t,x)|^2+\\ &|y_t(t,x)|^2]\mathrm dx+\frac12 w^{\mathrm T}Pw \end{aligned}$$

是相应于上述内积导出的范数, 从上述定理的证明还

可以看出系统(16)能量的导数满足

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{\mathrm{d}}(t) = &-\int_0^1 z_x^2(t,-x)\mathrm{d}x - \\ &\frac{1}{2}[\sqrt{2(d-\gamma)}y_t(t,1) - w^{\mathrm{T}}q]^2 - \\ &\gamma y_t^2(t,1) - \frac{\varDelta}{2}w^{\mathrm{T}}Qw.\end{aligned} \tag{21}$$

为了利用Lyapunov函数法得到系统(16)的指数稳定性, 构造Lyapunov函数: $G_{\mathrm{d}}(t) = E_{\mathrm{d}}(t) + \varepsilon\phi(t)$, 其中$0<\varepsilon<1$和$\phi(t)$与上节相同. 与引理1类似, 有如下结果.

引理 3　Lyapunov函数$G_{\mathrm{d}}(t)$等价于能量$E_{\mathrm{d}}(t)$, 即如下关系成立:

$$(1-\varepsilon)E_{\mathrm{d}}(t) \leqslant G_{\mathrm{d}}(t) \leqslant (1+\varepsilon)E_{\mathrm{d}}(t).$$

对于系统(16), 辅助函数$\phi(t)$具有如下性质.

引理 4　辅助函数$\phi(t)$满足

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t) \leqslant &-\frac{4}{5}E_{\mathrm{d}}(t) + (d^2+\frac{1}{2})y_t^2(t,1) + \\ &cc^{\mathrm{T}}|w(t)|^2 + \frac{2}{5}w^{\mathrm{T}}Pw.\end{aligned} \tag{22}$$

证　直接求导得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t) = \frac{1}{5}\int_0^1 z(t,-x)z_{xx}(t,-x)\mathrm{d}x + \\ &\frac{1}{5}\int_0^1(1-x)y_t(t,x)y_{xx}(t,x)\mathrm{d}x + \\ &\frac{1}{5}\int_0^1(1-x)y_x(t,x)y_{xt}(t,x)\mathrm{d}x + \\ &\int_0^1 xy_t(t,x)y_{xt}(t,x)\mathrm{d}x + \\ &\int_0^1 xy_x(t,x)y_{xx}(t,x)\mathrm{d}x = \\ &-\frac{1}{5}\int_0^1 z_x^2(t,-x)\mathrm{d}x + y_t^2(t,1) + \\ &\frac{1}{5}\int_0^1 y_t(t,x)y_x(t,x)\mathrm{d}x - \int_0^1 y_t^2(t,x)\mathrm{d}x - \\ &\int_0^1 xy_t(t,x)y_{xt}(t,x)\mathrm{d}x + y_x^2(t,1) - \\ &\int_0^1 y_x^2(t,x)\mathrm{d}x - \int_0^1 xy_x(t,x)y_{xx}(t,x)\mathrm{d}x \leqslant \\ &-\frac{2}{5}\int_0^1 z^2(t,-x)\mathrm{d}x + \frac{1}{10}\int_0^1 y_t^2(t,x)\mathrm{d}x + \\ &\frac{1}{10}\int_0^1 y_x^2(t,x)\mathrm{d}x + y_t^2(t,1) + y_x^2(t,1) - \\ &\int_0^1 y_t^2(t,x)\mathrm{d}x - \int_0^1 y_x^2(t,x)\mathrm{d}x - \\ &\int_0^1 xy_t(t,x)y_{xt}(t,x)\mathrm{d}x - \\ &\int_0^1 xy_x(t,x)y_{xx}(t,x)\mathrm{d}x \leqslant \\ &-\frac{4}{5}\int_0^1 z^2(t,-x)\mathrm{d}x - \frac{4}{5}\int_0^1 y_t^2(t,x)\mathrm{d}x - \\ &\frac{4}{5}\int_0^1 y_x^2(t,x)\mathrm{d}x + y_t^2(t,1) + y_x^2(t,1) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t).\end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t) \leqslant \\ &-\frac{4}{5}E_{\mathrm{d}}(t) + \frac{2}{5}w^{\mathrm{T}}pw + \frac{1}{2}[y_t^2(t,1) + y_x^2(t,1)].\end{aligned}$$

由于$y_x(t,1) = -c^{\mathrm{T}}w(t) - dy_t(t,1)$, 所以

$$y_x^2(t,1) \leqslant 2cc^{\mathrm{T}}|w(t)|^2 + 2d^2y_t^2(t,1),$$

将其代入上式可得式(22).　　证毕.

定理 4　系统(16)的能量$E_{\mathrm{d}}(t)$具有如下指数衰减率

$$E_{\mathrm{d}}(t) \leqslant \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\mathrm{e}^{-\frac{4}{5}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}t}E_{\mathrm{d}}(0),$$

其中: $0<\varepsilon<1$满足$0<\varepsilon<\dfrac{2\gamma}{2d^2+1}$和使得二次型$\dfrac{\varDelta}{2}w^{\mathrm{T}}Qw - \varepsilon cc^{\mathrm{T}}|w(t)|^2 - \dfrac{2\varepsilon}{5}w^{\mathrm{T}}Pw$为正定的.

证　首先由式(21)和引理4可知

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{d}}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{\mathrm{d}}(t) + \varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t) \leqslant \\ &-\int_0^1 z_x^2(t,-x)\mathrm{d}x - \frac{4}{5}\varepsilon E_{\mathrm{d}}(t) - \gamma y_t^2(t,1) - \\ &\frac{\varDelta}{2}w^{\mathrm{T}}Qw - \frac{1}{2}[\sqrt{2(d-\gamma)}y_t(t,1) - w^{\mathrm{T}}q]^2 + \\ &\frac{\varepsilon}{2}(2d^2+1)y_t^2(t,1) + \varepsilon cc^{\mathrm{T}}|w(t)|^2 + \frac{2}{5}\varepsilon w^{\mathrm{T}}Pw \leqslant \\ &-\frac{4}{5}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}G_{\mathrm{d}}(t) - [\gamma - \frac{\varepsilon}{2}(2d^2+1)]y_t^2(t,1) - \\ &\frac{1}{2}[\sqrt{2(d-\gamma)}y_t(t,1) - w^{\mathrm{T}}q]^2 - \\ &[\frac{\varDelta}{2}w^{\mathrm{T}}Qw - \varepsilon cc^{\mathrm{T}}|w(t)|^2 - \frac{2}{5}\varepsilon w^{\mathrm{T}}Pw] \leqslant \\ &-\frac{4}{5}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}G_{\mathrm{d}}(t),\end{aligned}$$

其中选取参数ε确保

$$\begin{cases}\gamma - \dfrac{\varepsilon}{2}(2d^2+1) > 0, \\ \dfrac{\varDelta}{2}w^{\mathrm{T}}Qw - \varepsilon cc^{\mathrm{T}}|w(t)|^2 - \dfrac{2}{5}\varepsilon w^{\mathrm{T}}Pw > 0.\end{cases}$$

这就是定理中所列的ε需要满足的条件. 其次由比较原理可得

$$G_{\mathrm{d}}(t) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{4}{5}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}t}G_{\mathrm{d}}(0).$$

最后再根据引理3, 得

$$E_{\mathrm{d}}(t) \leqslant \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\mathrm{e}^{-\frac{4}{5}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}t}E_{\mathrm{d}}(0).$$

证毕.

4　H_∞边界控制

在本节, 受文献[38]的启发, 研究系统(1)在负比例反馈控制(2)和动态反馈控制(3)–(4)下内部扰动的H_∞控制问题. 首先考虑负比例反馈控制是H_∞鲁棒的,

也就是考虑系统(1)的内部扰动形式:

$$\begin{cases} z_t(t,x) - z_{xx}(t,x) + w_1(t,x) = 0,\ x \in (-1,0), \\ y_{tt}(t,x) - y_{xx}(t,x) + w_2(t,x) = 0,\ x \in (0,1), \\ z(t,-1) = 0,\ y_x(t,1) = u(t), \\ y_t(t,0) = z(t,0),\ y_x(t,0) = z_x(t,0), \\ z(0,x) = 0,\ y(0,x) = 0,\ y_t(0,x) = 0, \end{cases} \tag{23}$$

其中$w_1(t,x), w_2(t,x) \in L^2(0,\infty; L^2(0,1))$是外部扰动, 可容许的外部扰动虽然对受控输出

$$X(t,x) = (z(t,-x), y_x(t,x), y_t(t,x), u(t))$$

有影响, 但是使得上述系统是内部可稳的. 本文所关心的H_∞边界控制问题是指, 给定$\gamma > 0$和负比例反馈控制(2), 对于所有的可容许外部干扰$w_1(t,x)$, $w_2(t,x)$, 相应的系统(23)和式(2)的解都满足

$$J = \int_0^\infty \int_0^1 XX^{\mathrm{T}} - \gamma(w_1^2 + w_2^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t < 0,$$

为了解决上述问题, 寻求条件确保下式成立:

$$W(t) \triangleq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t) + \int_0^1 XX^{\mathrm{T}} - \gamma(w_1^2 + w_2^2)\mathrm{d}x < 0, \tag{24}$$

这里$G(t)$是在第2节内定义的, 上述关于时间t的导数是对闭环系统(23)和式(2)的解进行的. 事实上, 如果上式成立, 则对上式两侧关于t从0到∞求积分, 则有

$$J < -\lim_{t\to\infty} G(t) + G(0),$$

由于$G(t)$是正定的并且$G(0) = 0$, 所以$J < 0$.

现在寻求条件使得式(24)成立. 若令$Y(t,x) = (z(t,-x), y_t, y_x, y_t(t,1), w_1, w_2)$, 则仿照(8)的证明, 利用Wirtinger不等式(见文献[38]的引理1) 和闭环系统(23)和式(2)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) \leqslant \int_0^1 Y(t,x)\Psi_1 Y^{\mathrm{T}}(t,x)\mathrm{d}x, \tag{25}$$

其中

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

类似地, 仿照第2节中$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t)$的估计, 由闭环系统(23)和式(2)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t) \leqslant \int_0^1 Y(t,x)\Psi_2 Y^{\mathrm{T}}(t,x)\mathrm{d}x, \tag{26}$$

其中

$$\Psi_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+k^2) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于$G(t) = E(t) + \varepsilon\phi(t)$, 所以由式(24)–(26)可有

$$W(t) \leqslant \int_0^1 Y(t,x)\Psi Y^{\mathrm{T}}(t,x)\mathrm{d}x,$$

其中

$$\Psi = \begin{pmatrix} -1-\frac{2\varepsilon}{5} & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1-\frac{2\varepsilon}{5} & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{2\varepsilon}{5} & 0 & 0 & -\frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & c & -\frac{\varepsilon}{2} & 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix},$$

其中: $a = -\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{10}$, $b = -k + k^2 + \frac{\varepsilon}{2}(1+k^2)$, $c = -\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon(-1)}{10}$. 这样由上面分析有如下定理.

定理 5 如果选取参数ε, γ和k使得矩阵Ψ是负定的($-\Psi > 0$), 则系统(23)在负比例边界反馈控制式(2)下是H_∞鲁棒的.

需要强调的是, 一方面, 利用MATLAB中LMI工具包很容易验证矩阵Ψ对于什么参数ε, γ和k是负定的; 另一方面, 利用本节和第3节类似的办法也可给出系统(23)在负比例边界反馈控制(3)–(4)下是H_∞鲁棒的充分条件.

5 总结和展望

对于具有边界控制和同位观测的热波耦合系统, 当不施加控制时, 系统仅是多项式稳定的. 为了提升系统的衰减率, 本文设计了2种边界反馈, 利用直接Lyapunov函数法验证闭环系统是指数稳定的. 需要特别指出的是, 不但验证2种闭环系统所用到的Lyapunov函数类似, 而且系统指数稳定性的验证方法很容易平移用于研究系统关于内部扰动是H_∞鲁棒的, 从而很容易给出系统是H_∞鲁棒的充分条件. 然而, 除了内部扰动外, 边界观测也存在扰动, 此时如何设计反馈使其可稳是重要的研究课题, 如文献[8,39]. 此外, 利用本文的结果还可以研究系统的一致指数稳定性以及可观性的反问题等.

参考文献:

[1] ZHANG X, ZUAZUA E. Polynomial decay and control of a 1-D hyperbolic-parabolic coupled system. *Journal of Diferential Equations*, 2004, 204(2): 380 – 438.

[2] RAUCH J, ZHANG X, ZUAZUA E. Polynomial decay of a hyperbolic-parabolic coupled system. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2005, 84(4): 407 – 470.

[3] ZHANG X, ZUAZUA E. Control, observation and polynomial decay for a coupled heat-wave system. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 2003, 336(10): 823 – 828.

[4] JIN X L, YAN L, ZHENG F. Spectrum and stability of a 1-d heat-wave coupled system with dynamical boundary control. *Mathematical Problems in Engineering*, 2019, Article ID 5716729.

[5] WEHBE A. Rational energy decay rate for a wave equation with dynamical control. *Applied Mathematics Letters*, 2003, 16(3): 357 – 364.

[6] MORGÜL O. A dynamic control law for the wave equation. *Automatica*, 1994, 30(11): 1785 – 1792.

[7] MORGÜL O. The stabilization and stability robustness against small time delays of some damped wave equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(9): 1626 – 1630.

[8] MORGÜL O. Stabilization and disturbance rejection for the wave equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(1): 89 – 95.

[9] MORGÜL O. An exponential stability result for the wave equation. *Automatica*, 2002, 38(2): 731 – 735.

[10] ZHENG Fu, LI Yan. The uniform exponential stability of wave equation with dynamical boundary damping discretized by the order reduction finite difference. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(7): 1589 – 1594.
(郑福, 李艳. 具有动态边界阻尼的波方程的降阶型差分半离散化的一致指数稳定性. 控制理论与应用, 2020, 37(7): 1589 – 1594.)

[11] PERALTA G, KUNSISCH K. Interface stabilization of a parabolic-hyperbolic PDE system with delay in the interaction. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series A*, 2018, 38(6): 3055 – 3083.

[12] BOULAKIA M. Existence of weak solutions for the motion of an elastic structure in an incompressible viscous fluid. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 2003, 336(10): 985 – 990.

[13] LIU Z, RAO B. Frequency domain approach for the polynomial stability of a system of partially damped wave equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, 335(2): 860 – 881.

[14] ABDALLAH F, NICAISE S, VALEIN J, et al. Stability results for the approximation of weakly coupled wave equations. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 2012, 350(1): 29 – 34.

[15] BERTI A. A dynamic thermoviscoelastic contact problem with the second sound effect. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2015, 421(2): 1163 – 1195.

[16] GUO B Z, REN H J. Stability and regularity transmission for coupled beam and wave equations through boundary weak connections. *ESAIM: COCV*, 2020, 26(1): 1 – 29.

[17] GUO B Z, REN H J. Stabilization and regularity transmission of a Schrodinger equation through boundary connections with a Kelvin-Voigt damped beam equation. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2020, 100: e201900013.

[18] RUSSELL D L. A General framework for the study of indirect damping mechanisms in elastic systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1993, 173(2): 339 – 358.

[19] GIBSON J S, ROSEN I G, TAO G. Approximation in control of thermoelastic systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1992, 30(5): 1163 – 1189.

[20] JÙNIOR A, RAMOS A, SANTOS L. Observability inequality for the finite-difference semi-discretization of the 1-d coupled wave equations. *Advances in Computational Mathematics*, 2015, 41(1): 105 – 130.

[21] LI T T, RAO B P. On the approximate boundary synchronization for a coupled system of wave equations: direct and indirect controls. *ESAIM: COCV*, 2018, 24(5): 1675 – 1704.

[22] WANG J, HAN Z J, XU G Q. Energy decay rate of transmission problem between thermoelasticity of type I and type II. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik Und Physik*, 2017, 68(1): 65 – 83.

[23] HAN Z J, XU G Q. Spectrum and stability analysis for a transmission problem in thermoelasticity with a concentrated mass. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 2015, 66(8): 1717 – 1736.

[24] CARDOSO RIBEIRO F L, MATIGNON D, POMMIER BUDIN GER V. Modeling of a fluid-structure coupled system using port-Hamiltonian formulation. *IFAC-Papers Online*, 2015, 48(13): 217 – 222.

[25] DALSEN M G. Strong stability for a fluid-structure interaction model. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2009, 32(11): 1452 – 1466.

[26] AVALOS G, TRIGGIANI R. Rational decay rates for a pde heat-structure interaction: a frequency domain approach. *Evolution Equations and Control Theory*, 2013, 2(2): 233 – 253.

[27] HAN Z J, ZUAZUA E. Decay rates for 1-d heat-wave planar networks, networks and heterogeneous media. *Networks and Heterogeneous Media*, 2016, 11(4): 655 – 692.

[28] LUO Z H, GUO B Z, MORGUL O. *Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems with Applications.* London: Springer-Verlag, 1999.

[29] LI H C, ZOU Z Q, WANG Y J. Dynamic output feedback control for systems subject to actuator saturation via event-triggered scheme. *Asian Journal of Control*, 2018, 20(1): 207 – 215.

[30] YANG X X, GE S S, LIU J. Dynamics and non-collocated model-free position control for a space robot with multi-link flexible manipulators. *Asian Journal of Control*, 2019, 21(3): 714 – 724.

[31] WEHBE A. Optimal energy decay rate in the Rayleigh beam equation with boundary dynamical controls. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society*, 2005, 12(1): 1 – 16.

[32] GUO B Z, XU G Q. On basis property of a hyperbolic system with dynamic boundary condition. *Differential Integral Equations*, 2005, 18(1): 35 – 60.

[33] HUANG J. *Non-linear Output Regulation: Theory and Applications*. Philadelphia: SIAM, 2004.

[34] FENG H, GUO B Z. On stability equivalence between dynamic output feedback and static output feedback for a class of second order infinite-dimensional infinite-dimensional systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2015, 53(6): 1934 – 1955.

[35] WEI J, GUO B Z. Dynamic and static feedback control for second order infinite-dimensional systems. *Asian Journal of Control*, 2020, 21: 1 – 10.

[36] JACOB B, ZWART H. *Linear Port-Hamiltonian System on Infinite-dimensional Space.* Basel: Springer, 2012.

[37] KRSTIC M, SMYSHLYAEV A. *Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Designs*. Philadelphia: SIAM, 2008.

[38] FRIDMAN E, ORLOV Y. An LMI approach to H_∞ boundary control of semilinear parabolic and hyperbolic systems. *Automatica*, 2009, 45(9): 2060 – 2066.

[39] FENG H, GUO B Z. New unknown input observer and output feedback stabilization for uncertain heat equation. *Automatica*, 2017, 86(1): 1 – 10.

作者简介:

金雪莲　副教授, 近期主要从事分布参数系统的稳定性研究, E-mail: 39849307@qq.com;

张思佳　硕士研究生, 近期主要从事分布参数系统的稳定性研究, E-mail: zhangsijia@qymail.bhu.edu.cn;

郑　福　博士, 近期主要从事分布参数控制系统的稳定性及其数值逼近和可修复系统的研究, E-mail: zhengfu@qymail.bhu.edu.cn.