

切换拓扑下多自主体系统的事件触发一致性控制

尚宇¹, 刘成林^{1†}, 曹科才²

(1. 江南大学 自动化研究所 轻工过程先进控制教育部重点实验室, 江苏 无锡 214122;

2. 南京工程学院 自动化学院, 江苏 南京 211167)

摘要: 本文针对一阶非线性多自主体系统, 考察了切换拓扑下的事件触发一致性控制问题. 当切换拓扑子图的并图包含有向生成树时, 基于一阶保持器提出了一种分布式事件触发一致性算法, 用以降低网络的通信负载. 运用迭代法和不等式法, 得到了多自主体系统达到有界一致性的充分条件. 此外, 证明了所提事件触发机制不存在Zeno现象, 并得到了触发间隔的正下界. 最后, 给出仿真实例, 验证了所提事件触发一致性算法和理论分析结果的有效性.

关键词: 非线性多自主体系统; 切换拓扑; 事件触发控制; 有界一致性

引用格式: 尚宇, 刘成林, 曹科才. 切换拓扑下多自主体系统的事件触发一致性控制. 控制理论与应用, 2021, 38(10): 1522 – 1530

DOI: 10.7641/CTA.2021.00928

Event-triggered consensus control of multi-agent systems under switching topologies

SHANG Yu¹, LIU Cheng-lin^{1†}, CAO Ke-cai²

(1. Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry of Ministry of Education, Institute of Automation, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China;

2. School of Automation, Nanjing Institute of Technology, Nanjing Jiangsu 211167, China)

Abstract: In this article, the consensus control problem is addressed for the first-order nonlinear multi-agent systems under switching topologies. Under an assumption that the union graph of switching topologies contains a directed spanning tree, a distributed event-triggered consensus algorithm using first-order hold is developed to decrease the network communication load. Based on iterative method and inequality method, several sufficient criteria are obtained for the agents to reach the bounded consensus. Furthermore, it is proved that Zeno behavior is excluded under the proposed event-triggered algorithm, and the positive lower bound of the minimum inter-event times is given. Finally, the effectiveness of the proposed event-triggered consensus algorithm and theoretical results are substantiated by means of a numerical simulation.

Key words: nonlinear multi-agent systems; switching topologies; event-triggered control; bounded consensus

Citation: SHANG Yu, LIU Chenglin, CAO Kecai. Event-triggered consensus control of multi-agent systems under switching topologies. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(10): 1522 – 1530

1 引言

近年来, 随着传感与检测技术、数字控制技术和无线通信技术的发展, 多自主体系统的一致性問題引起了众多学者的关注, 并在智能电网^[1]、航空航天^[2]、传感网络^[3]等工程领域得到了广泛应用. 一致性问题^[4–6]是指利用自主体的局部交互信息设计合适的控制算法, 使所有自主体的状态最终达到相同.

在实际工程中, 自主体通常配备小型嵌入式微处

理器, 其通信、计算、存储和执行能力都是有限的, 并且高频通信会阻塞通信信道, 造成数据包丢失、通信时延增加、吞吐量减小等不良影响. 为了提升多自主体系统的资源利用率, 事件触发机制被广泛应用到一致性算法中^[7]. 在事件触发控制中, 触发器设有预定义的测量误差触发函数, 只有当该函数超过触发阈值时, 才会进行邻居自主体间的通信和控制器的更新. 目前, 事件触发一致性算法的研究成果大部分局限于

收稿日期: 2020–12–28; 录用日期: 2021–03–25.

†通信作者. E-mail: liucl@jiangnan.edu.cn.

本文责任编辑: 王龙.

国家自然科学基金项目(61973139, 61473138), 中央高校基本科研业务费专项资金(JUSRP22014)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61973139, 61473138) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities (JUSRP22014).

固定连通拓扑^[8-11]. 文献[8]研究了无向拓扑和通信时延下线性多自主体的领导跟随一致性问题, 设计了一种分段常数控制信号, 控制器只在触发时刻更新, 触发间隔内用零阶保持器保持控制信号, 并利用代数图论、矩阵论和时延系统稳定性理论, 得到了自主体渐近达到一致的充分条件. 文献[9]利用估计器代替零阶保持器, 在触发间隔内估计邻居自主体的状态, 设计了一种连续更新的事件触发控制器来降低通信负担, 并使得一阶线性自主体系统能够渐近达到一致. 针对有向拓扑下一阶非线性多自主体的一致性, 文献[10]设计了一种状态依赖触发函数, 得到了在强连通拓扑下自主体渐近达到一致的充分条件, 并将结果扩展到有向生成树结构. 此外, 文献[11]考察了符号拓扑下二阶非线性多自主体系统的双向一致性问题, 在事件触发函数中加入了指数函数来降低触发率.

然而, 由于通信能力、传感范围等限制因素, 自主体间的连通关系往往是随时间变化的^[12], 且切换拓扑下的一致性分析比固定拓扑更具挑战性. 针对一阶非线性多自主体系统, 文献[13]考虑强连通切换拓扑的情况, 设计了一种分段常数事件触发控制信号, 并通过构造Lyapunov函数得到了反馈增益和耦合强度参数的范围. 此外, 文献[14]针对不含有生成树的切换拓扑, 利用邻居的连续状态信息设计了一种分布式事件触发函数, 通过迭代法计算自主体间的最大距离, 得到了自主体达到有界一致的充分条件. 针对二阶非线性多自主体系统, 文献[15]考虑切换拓扑双向连通的情况, 提出了一种与系统动态相关的事件触发函数, 文献[16]则针对包含有向生成树的切换拓扑, 提出了一种状态依赖的事件触发函数. 针对阶线性多自主体系统, 文献[17]考虑切换拓扑为双向连通的情况, 利用零阶保持器设计事件触发控制协议, 触发函数与拓扑切换的具体时间相关, 并利用坐标变换得到了自主体达到一致性的充分条件. 虽然文献[13-17]的算法可以降低控制器和执行器的更新频率, 但触发函数需要邻居自主体的连续状态信息, 这在实际工程中难以实现. 为了降低通信负载, 避免自主体间连续的通信, 文献[18]利用线性动态特性对邻居状态做指数估计, 触发阈值由状态估计值和指数函数构成, 在切换拓扑是联合连通的前提下, 分别得到了一阶同构多自主体系统达到状态一致和一阶异构多自主体系统达到输出一致的充分条件. 此外, 文献[19]考虑切换拓扑的子图包含有向生成树的情况, 利用自主体间的离散通信信息, 设计了一种包含衰减指数的阈值函数, 分析了一阶线性多自主体系统的领导跟随一致性问题. 在文献[19]的基础上, 文献[20]进一步考虑切换拓扑的子图不具有生成树的情况, 提出了一种基于状态观测的事件触发算法, 并利用矩阵论和Lyapunov函数得到自主体渐近达到一致的充分条件. 但是, 文献[19-20]需要构造

与线性动态相关的正定矩阵, 不适用于具有非线性动态的自主体.

基于上述讨论, 本文研究切换拓扑下一阶非线性多自主体的一致性, 考虑的切换拓扑的子图可以不包含有向生成树, 弱化了文献[13, 15-19]的拓扑要求. 针对文献[13-16, 19-20]算法中通信和系统动态的局限性, 利用一阶保持器来减少触发率, 提出了一种分布式事件触发控制算法, 可以避免自主体间的连续通信. 根据迭代法和不等式方法, 得到了多自主体系统达到有界一致的充分条件. 此外, 构造了触发阈值和测量误差的比值函数, 利用比值函数的微分方程来求解触发间隔的下界, 证明了触发间隔始终为正常数, 自主体不存在连续触发行为, 排除了Zeno现象.

符号说明: \mathbb{R} 表示实数集, \mathbb{N} 表示非负整数集; $\mathbb{R}^{N \times N}$ 表示 $N \times N$ 维矩阵; $\|\cdot\|$ 表示欧式范数; D^+ 表示Dini导数.

2 问题描述

2.1 图论

集合 $\{\mathcal{G}_1(\mathcal{V}, \mathcal{E}_1, \mathcal{A}_1), \dots, \mathcal{G}_T(\mathcal{V}, \mathcal{E}_T, \mathcal{A}_T)\}$ 表示含有 N 个节点的切换拓扑图, $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$ 是节点集, $\mathcal{E}_{\sigma(t)}$ 是通信边, 邻接矩阵 $\mathcal{A}_{\sigma(t)} = [a_{ij}^{\sigma(t)}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$, 函数 $\sigma(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \{1, 2, \dots, T\}$ 表示通信拓扑的切换信号, t_0 为初始时刻. $(i, j) \in \mathcal{E}_{\sigma(t)}$ 指节点 j 可以获得节点 i 的信息, 即节点 i 为节点 j 的一个邻居节点. 如果 $(j, i) \in \mathcal{E}_{\sigma(t)}$, 则 $a_{ij}^{\sigma(t)} > 0$, 否则 $a_{ij}^{\sigma(t)} = 0$.

定义集合 $\partial(\mathcal{G}_m, \Omega_m) = \{j \in \Omega_m | (j, i) \in \mathcal{E}_m\}$, 其中: $\mathcal{V}_m \subseteq \mathcal{V}$, $\Omega_m = \bigcup_{s=1}^m \mathcal{V}_s$, $m = 1, 2, \dots, T + 1$. 于是, 集合 \mathcal{V}_m 中的任意节点都能在 $\partial(\mathcal{G}_m, \Omega_m)$ 中找到邻居节点.

子图 $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_m$ 的并集记为图 \mathcal{G}_{1-m} , 它的节点集为 \mathcal{V} , 边集为子图 $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_m$ 的边的并集. 若图 \mathcal{G}_{1-m} 包含有向生成树, 则节点集 \mathcal{V} 中存在一个根节点 s_1 , 构成单元素集 $\mathcal{V}_1 = \{s_1\}$, 使得任意子节点集 \mathcal{V}_{m+1} 满足

$$\mathcal{V}_{m+1} \subseteq \partial(\mathcal{G}_m, \Omega_m).$$

假设切换间隔为 h , 第 $nT + l$ 个切换时刻为 t_{nT+l} , $n \in \mathbb{N}, l = 0, 1, \dots, T - 1$. 若图 \mathcal{G}_{1-m} 包含有向生成树, 则当 $t \in [t_{nT}, t_{nT+1})$ 时刻, \mathcal{V}_2 中的节点都存在邻居, 且邻居在集合 Ω_1 中, 即根节点 s_1 , 得到集合 $\Omega_2 = \Omega_1 \cup \mathcal{V}_2$, 接着到 $t \in [t_{nT+1}, t_{nT+2})$ 时刻, \mathcal{V}_3 中的节点都存在邻居, 且邻居在集合 Ω_2 中, 再得到集合 $\Omega_3 = \Omega_2 \cup \mathcal{V}_3$, 重复上述过程直到 $t_{(n+1)T}$ 时刻, 此时集合 $\Omega_{T+1} = \mathcal{V}$.

2.2 模型描述

考虑 N 个一阶非线性多自主体构成的多自主体系

统, 动态模型如下:

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t) + f(x_i(t), t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

其中: $x_i(t) \in \mathbb{R}$, $u_i(t) \in \mathbb{R}$, $f(x_i(t), t) \in \mathbb{R}$ 分别指自主体*i*的状态信息、控制输入和内部非线性动态。

给出下列假设和引理, 做为理论分析的基础。

假设 1^[21] 对于非线性函数 $f(x_i(t), t)$, 存在非负常数 ρ , 使得 $f(x_i(t), v_i(t), t)$ 满足Lipschitz条件:

$$\|f(x_i(t), t) - f(x_j(t), t)\| \leq \rho \|x_i(t) - x_j(t)\|.$$

假设 2^[12] 对于任意正整数 r , 总存在正整数 T , 使得切换拓扑 $\{\mathcal{G}_n\}_{n=(r-1)T+1}^T$ 的子图的并图包含有向生成树。

引理 1^[11] 对于微分方程 $\dot{x} = \alpha x + \beta e^{Lt} + \pi e^{\alpha t}$, $L \neq \alpha$, 若初始状态 $x(t_0) = x_0$, 则 $x_0 e^{\alpha(t-t_0)} + \frac{\beta}{L-\alpha} (e^{L(t-t_0)} - e^{\alpha(t-t_0)}) e^{L t_0} + \pi e^{\alpha t} (t - t_0)$ 为方程的解。

接下来, 给出有界一致性的定义。

定义 1 对于任意初始状态 $x_i(0)$, 若存在正实数 ζ , 使得自主体满足以下等式关系:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| \leq \zeta, \quad i, j = 1, 2, \dots, N,$$

则称多自主体系统(1)能够实现有界一致。

3 事件触发一致性算法

本节先利用一阶保持器构造控制信号, 再设计相关的事件触发条件。

3.1 事件触发控制信号

当触发函数满足阈值条件时, 自主体会获得邻居的状态信息并更新控制器, 而在触发间隔内, 则利用保持器保持控制信号。利用一阶保持器, 自主体*i*的控制输入设计为

$$u_i(t) = -c \sum_{j=1}^N a_{ij}^{\sigma(t)} [\hat{x}_i(t_k^i) - \hat{x}_j(t_k^j)], \quad (2)$$

其中:

$$\hat{x}_j(t_k^i) = x_j(t_k^j) + \frac{x_j(t_k^j) - x_j(t_{k-1}^j)}{t_k^i - t_{k-1}^j} (t - t_k^i),$$

$$\hat{x}_i(t_k^i) = x_i(t_k^i) + \frac{x_i(t_k^i) - x_i(t_{k-1}^i)}{t_k^i - t_{k-1}^i} (t - t_k^i),$$

其中: $t \in [t_k^i, t_{k+1}^i)$, $k \in \mathbb{N}$, t_k^i 表示自主体*i*的第*k*个触发时刻, $\hat{x}_i(t_k^i)$ 是自主体*i*在一阶保持下的触发状态, $c > 0$ 是控制增益。

注 1 离散控制信号需要利用数字模拟转换器变为连续控制信号^[22], 如零阶保持器和一阶保持器。相较于提供分段常数信号的零阶保持器, 一阶保持器提供的则是分段线性

信号, 利用一阶保持器代替零阶保持器是一种减少触发率的可行办法^[23]。

3.2 事件触发函数

定义测量误差 $e_i(t) = \hat{x}_i(t_k^i) - x_i(t)$ 。在切换拓扑下, 自主体*i*的事件触发函数为

$$t_{k+1}^i = \{t | t > t_k^i, \|e_i(t)\| \geq \varphi_1 e^{-\gamma(t-t_0)} + \varphi_2 \text{ 或 } a_{ij}^{\sigma(t)} \neq a_{ij}^{\sigma(t_k^i)}\}, \quad (3)$$

其中: $\varphi_1 > 0$, $\varphi_2 > 0$ 和 $\gamma > 0$ 是待设定的参数。控制器*i*在触发时刻 t_k^i 更新, 测量误差 $e_i(t)$ 会重置为零。

注 2 控制信号(2)和分布式触发函数(3)使用的是邻居自主体*j*的离散信息 $x_j(t_k^j)$ 和 $x_j(t_{k-1}^j)$, 而不是连续信息 $x_j(t)$ 。因此, 自主体间可以避免连续的通信。

注 3 控制增益 c , 触发参数 φ_1 , φ_2 和 γ 与事件触发间隔和一致性收敛速度有关。通常情况下, 减小 γ , 增大 φ_1 和 φ_2 , 触发间隔会变大。另一方面, 增大控制增益 c , 得到的触发间隔会减小, 但收敛速度会变快。因此, 预先选择这些参数可以得到合适的触发间隔。

4 主要结果

本节先分析多自主体系统的一致性问题, 然后考察Zeno现象。

为简化符号表达, 令 $a_{\max}^{\sigma(t)} = \max_{i \in \mathcal{V}} \{ \sum_{m=1}^N a_{im}^{\sigma(t)} \}$,

$$a_{\min}^{\sigma(t)} = \min_{i \in \mathcal{V}} \{ \sum_{m=1}^N a_{im}^{\sigma(t)} \}, \quad \hat{a} = \sup_{t \geq t_0} a_{\max}^{\sigma(t)},$$

$$\tilde{a} = \sup_{t \geq t_0} a_{\min}^{\sigma(t)}, \quad \phi_1 = \frac{2c\hat{a}N\varphi_1}{\rho + \gamma}, \quad \phi_2 = \frac{2c\tilde{a}N\varphi_2}{\rho},$$

$$\mu = \rho - 2c\hat{a}, \quad \tilde{\phi}_1 = \frac{2c\hat{a}^2N\varphi_1}{\mu + \gamma}, \quad \tilde{\phi}_2 = \frac{2c\tilde{a}^2N\varphi_2}{\mu},$$

$$\chi_1 = \frac{(\mu + \gamma - c\hat{a})\tilde{\phi}_1}{\mu + \gamma}, \quad \chi_2 = \frac{(\mu - c\hat{a})\tilde{\phi}_2}{\mu},$$

$$\theta_1 = \chi_1 e^{-\gamma t h} (e^{\mu h} - e^{-\gamma h}) (e^{-\gamma T h})^n + \tilde{\phi}_1 e^{-\gamma t h} (h c e^{\mu h} - 1) (e^{-\gamma T h})^n,$$

$$\theta_2 = \chi_2 (e^{\mu h} - 1) - h c \tilde{\phi}_2 e^{\mu h} + \tilde{\phi}_2,$$

$$\alpha_1 = \frac{\theta_1}{1 - h c \hat{a} e^{\mu h}} - \tilde{\phi}_1 e^{-\gamma(nT+l)h},$$

$$\alpha_2 = \frac{\theta_2}{1 - h c \hat{a} e^{\mu h}} - \tilde{\phi}_2, \quad \eta = e^{\sigma T h} - (h c e^{\mu h})^T.$$

4.1 多自主体系统一致性分析

定义动态误差 $\varepsilon_{ij}(t) = x_i(t) - x_j(t)$, 得到最大距离函数

$$y(t) = \max_{i, j \in \mathcal{V}} \|\varepsilon_{ij}(t)\|.$$

此外, 对 $t \in [t_{nT+l}, t_{nT+l+1})$, $l = 0, 1, \dots, T-1$, 定义

$$\hat{d}_{nT}^l(t) = \max_{i,j \in \Omega_m} \|\varepsilon_{ij}(t)\|.$$

引理 2 对于任意 $i, j \in \mathcal{V}$, 当 $t \in [t_{nT}, t_{(n+1)T})$, 若假设 1 和假设 2 成立, 那么

$$y(t) \leq \hat{y}_{nT} e^{\rho(t-t_{nT})},$$

其中 $\hat{y}_{nT} = y(t_{nT}) + \phi_1 e^{-\gamma nTh} + \phi_2$.

证 当 $t \in [t_{nT}, t_{(n+1)T})$, 存在节点 $i_0, j_0 \in \mathcal{V}$, 使得 $y(t) = \|\varepsilon_{i_0 j_0}(t)\|$. 根据系统动态(1)和控制输入(2)可得动态误差系统

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{i_0 j_0}(t) &= f(x_{i_0}(t), t) - f(x_{j_0}(t), t) + \\ &c \sum_{m=1}^N a_{i_0 m}^{\sigma(t)} (\varepsilon_{m j_0}(t) - \varepsilon_{i_0 j_0}(t)) + \\ &c \sum_{m=1}^N a_{j_0 m}^{\sigma(t)} (\varepsilon_{i_0 m}(t) - \varepsilon_{i_0 j_0}(t)) - \\ &c \sum_{m=1}^N a_{i_0 m}^{\sigma(t)} (e_{i_0}(t) - e_m(t)) + \\ &c \sum_{m=1}^N a_{j_0 m}^{\sigma(t)} (e_{j_0}(t) - e_m(t)). \end{aligned} \quad (4)$$

对于任意 $i, j \in \mathcal{V}$, 满足

$$\varepsilon_{i_0 j_0}^T (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{i_0 j_0}) \leq \|\varepsilon_{i_0 j_0}\| (\|\varepsilon_{ij}\| - \|\varepsilon_{i_0 j_0}\|) \leq 0.$$

当假设 1 成立, 将事件触发函数(3)代入误差系统(4), 那么

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i_0 j_0}^T(t) \dot{\varepsilon}_{i_0 j_0}(t) &\leq \\ \rho \|\varepsilon_{i_0 j_0}(t)\|^2 - c \sum_{m=1}^N a_{i_0 m}^{\sigma(t)} \varepsilon_{i_0 j_0}^T(t) (e_{i_0}(t) - e_m(t)) + \\ c \sum_{m=1}^N a_{j_0 m}^{\sigma(t)} \varepsilon_{i_0 j_0}^T(t) (e_{j_0}(t) - e_m(t)) &\leq \\ \rho \|\varepsilon_{i_0 j_0}(t)\| [\|\varepsilon_{i_0 j_0}(t)\| + 2cN\hat{a}(\varphi_1 e^{-\gamma(t-t_0)} + \varphi_2)]. \end{aligned} \quad (5)$$

因为 Dini 导数满足

$$\begin{aligned} D^+(\|\varepsilon_{ij}(t)\|^2) &= 2\|\varepsilon_{ij}(t)\| D^+(\|\varepsilon_{ij}(t)\|), \\ D^+(\|\varepsilon_{ij}(t)\|) &= \\ D^+(\varepsilon_{ij}^T(t) \varepsilon_{ij}(t)) &= 2\varepsilon_{ij}^T(t) \dot{\varepsilon}_{ij}(t). \end{aligned}$$

于是

$$D^+(\|\varepsilon_{ij}(t)\|) = \frac{\varepsilon_{ij}^T(t) \dot{\varepsilon}_{ij}(t)}{\|\varepsilon_{ij}(t)\|}. \quad (6)$$

结合式(5)–(6), 得到

$$D^+(y(t)) \leq \rho y(t) + 2cN\hat{a}(\varphi_1 e^{-\gamma(t-t_0)} + \varphi_2).$$

因此, 当 $t \in [t_{nT}, t_{(n+1)T})$, 距离函数 $y(t)$ 满足

$$\begin{aligned} y(t) &\leq \\ (y(t_{nT}) + \phi_1 e^{-\gamma nTh} + \phi_2) e^{\rho(t-t_{nT})} - \phi_1 e^{-\gamma nTh} - \phi_2 &\leq \\ (y(t_{nT}) + \phi_1 e^{-\gamma nTh} + \phi_2) e^{\rho(t-t_{nT})} = \\ \hat{y}_{nT} e^{\rho(t-t_{nT})}. \end{aligned}$$

证毕.

引理 2 分析了区间 $[t_{nT}, t_{(n+1)T})$ 内 $\varepsilon_{ij}(t)$ 的上界, 针对的是集合 \mathcal{V} 中节点的距离关系. 接下来考虑子区间 $[t_{nT+l}, t_{nT+l+1})$, 考察集合 Ω_{l+2} 中节点的距离关系.

引理 3 对于 $i, j \in \Omega_{l+2}$, 当 $t \in [t_{nT+l}, t_{nT+l+1})$, 若假设 1 和假设 2 成立, 那么

$$\begin{aligned} \hat{d}_{nT}^l(t) &\leq e^{\mu(t-t_{nT+l})} [\hat{d}_{nT}^l(t_{nT+l}) + \\ \phi_1 e^{-\gamma(nT+l)h} + \phi_2] + \\ \hat{y}_{nT} e^{\rho(t_{nT+l}-t_{nT})} (e^{\rho(t-t_{nT+l})} - \\ e^{\mu(t-t_{nT+l})}) - \phi_1 e^{-\gamma(t-t_0)} - \phi_2. \end{aligned} \quad (7)$$

证 对任意节点 $i, j \in \Omega_{l+2}$, 由动态误差(4)和假设 1 可知

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^T(t) \dot{\varepsilon}_{ij}(t) &\leq 2c\hat{a}N(\varphi_1 e^{-\gamma(t-t_0)} + \varphi_2) \|\varepsilon_{ij}(t)\| + \\ c \sum_{m=1}^N a_{im}^{\sigma(t)} \|\varepsilon_{ij}(t)\| (\|\varepsilon_{mj}(t)\| - \\ \|\varepsilon_{ij}(t)\|) + c \sum_{m=1}^N a_{jm}^{\sigma(t)} \|\varepsilon_{ij}(t)\| \cdot \\ (\|\varepsilon_{im}(t)\| - \|\varepsilon_{ij}(t)\|) + \rho \|\varepsilon_{ij}(t)\|^2. \end{aligned}$$

根据引理 2, 将上式写为

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^T(t) \dot{\varepsilon}_{ij}(t) &\leq \\ \rho \|\varepsilon_{ij}(t)\|^2 + c \left(\sum_{m=1}^N a_{im}^{\sigma(t)} + \sum_{m=1}^N a_{jm}^{\sigma(t)} \right) \cdot \\ \|\varepsilon_{ij}(t)\| (\hat{y}_{nT} e^{\rho(t-t_{nT})} - \|\varepsilon_{ij}(t)\|) + \\ 2c\hat{a}N(\varphi_1 e^{-\gamma(t-t_0)} + \varphi_2) \|\varepsilon_{ij}(t)\| &\leq \\ \mu \|\varepsilon_{ij}(t)\|^2 + 2c\hat{a}\hat{y}_{nT} e^{\rho(t-t_{nT})} \|\varepsilon_{ij}(t)\| + \\ 2c\hat{a}N(\varphi_1 e^{-\gamma(t-t_0)} + \varphi_2) \|\varepsilon_{ij}(t)\|. \end{aligned}$$

1) 当 $\|\varepsilon_{ij}(t)\| \neq 0$, 根据式(6)可得

$$D^+(\|\varepsilon_{ij}(t)\|) \leq \mu \|\varepsilon_{ij}(t)\| + 2c\hat{a}\hat{y}_{nT} e^{\rho(t-t_{nT})} + 2c\hat{a}N(\varphi_1 e^{-\gamma(t-t_0)} + \varphi_2). \quad (8)$$

2) 当 $\|\varepsilon_{ij}(t)\| = 0$, 则 $x_i(t) = x_j(t)$. 利用式(6)可得

$$D^+(\|\varepsilon_{ij}(t)\|) \leq 2c\hat{a}(\hat{y}_{nT} e^{\rho(t-t_{nT})} - \|\varepsilon_{ij}(t)\|) + 2c\hat{a}N(\varphi_1 e^{-\gamma(t-t_0)} + \varphi_2). \quad (9)$$

结合式(8)–(9), 当 $t \in [t_{nT+l}, t_{nT+l+1})$, 有

$$D^+(\hat{d}_{nT}^l(t)) \leq \mu \|\varepsilon_{ij}(t)\| + 2c\hat{a}\hat{y}_{nT}e^{\rho(t-t_{nT})} + 2c\hat{a}N(\varphi_1e^{-\gamma(t-t_0)} + \varphi_2). \quad (10)$$

利用引理1, 可得动态误差 $\hat{d}_{nT}^l(t)$ 存在上界

$$\begin{aligned} \hat{d}_{nT}^l(t) \leq & e^{\mu(t-t_{nT+l})}[\hat{d}_{nT}^l(t_{nT+l}) + \tilde{\phi}_1e^{-\gamma(nT+l)h} + \tilde{\phi}_2] + \\ & (\hat{y}_{nT} + \phi_1e^{-\gamma nTh} + \phi_2)(e^{\rho(t-t_{nT+l})} - e^{\mu(t-t_{nT+l})}) \\ & e^{\rho(t_{nT+l}-t_{nT})} - \tilde{\phi}_1e^{-\gamma(t-t_0)} - \tilde{\phi}_2. \end{aligned} \quad (11)$$

定理 1 当假设1和假设2成立, 运用控制输入(2)和事件触发函数(3), 如果满足以下3个条件, 则非线性多自主体系统(1)能够达到有界一致性.

$$1) \mu + \gamma < 0; \quad (12)$$

$$2) e^{-\gamma Th} < \eta < 1; \quad (13)$$

$$3) hc < 1. \quad (14)$$

证 当 $t \in [t_{nT+l}, t_{nT+l+1})$, 对于 $i, j \in \Omega_{l+2}$, 满足 $\Omega_{l+2} = \Omega_{l+1} \cup \mathcal{V}_{l+2}$, 根据 Ω_{l+2} 中自主体间的通信关系, 将定理1的证明分为以下3种情况.

1) 当 $i, j \in \Omega_{l+1}$, 在时间间隔 $[t_{nT+l}, t_{nT+l+1})$ 内, 自主体 i 和 j 都不存在邻居自主体. 若条件(13)满足, 运用引理3, 可以得到

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_{ij}(t_{nT+l+1})\| \leq & \hat{d}_{nT}^l(t) \leq \\ & e^{\mu h}[\hat{d}_{nT}^l(t_{nT+l}) + \tilde{\phi}_1e^{-\gamma(nT+l)h} + \tilde{\phi}_2] + \\ & \hat{y}_{nT}e^{\rho(t_{nT+l}-t_{nT})}(e^{\rho h} - e^{\mu h}) - \\ & \tilde{\phi}_1e^{-\gamma(nT+l)h}e^{-\gamma h} - \tilde{\phi}_2 \leq \\ & hce^{\mu h}[\hat{d}_{nT}^l(t_{nT+l}) - \hat{y}_{nT}e^{\rho(t_{nT+l}-t_{nT})}] + \\ & (\tilde{\phi}_1e^{-\gamma(nT+l)h} + \tilde{\phi}_2)e^{\mu h} + \hat{y}_{nT}e^{\rho(t_{nT+l}-t_{nT})}e^{\rho h} - \\ & \tilde{\phi}_1e^{-\gamma(nT+l)h}e^{-\gamma h} - \tilde{\phi}_2 = \\ & hce^{\mu h}[\hat{d}_{nT}^l(t_{nT+l}) + \tilde{\phi}_1e^{-\gamma(nT+l)h} + \tilde{\phi}_2] + \\ & \hat{y}_{nT}e^{\rho(t_{nT+l}-t_{nT})}(e^{\rho h} - hce^{\mu h}) + \\ & \tilde{\phi}_1e^{-\gamma(nT+l)h}(e^{\mu h} - e^{-\gamma h} - hce^{\mu h}) + \\ & \tilde{\phi}_2(e^{\mu h} - 1 - hce^{\mu h}). \end{aligned} \quad (15)$$

2) 当 $i \in \mathcal{V}_{l+2}, j \in \Omega_{l+1}$, 在间隔 $[t_{nT+l}, t_{nT+l+1})$ 内, 自主体 i 存在邻居 $s \in \Omega_{l+1}$, 使得 $a_{is}^{\sigma(t)} > 0$. 由误差系统(4)可得

$$\begin{aligned} D^+(\|\varepsilon_{ij}(t)\|) \leq & \rho\|\varepsilon_{ij}(t)\| + ca_{is}^{\sigma(t)}(\|\varepsilon_{sj}(t)\| - \|\varepsilon_{ij}(t)\|) + \\ & c \sum_{m=1, m \neq s}^N a_{im}^{\sigma(t)} \times (\|\varepsilon_{mj}(t)\| - \|\varepsilon_{ij}(t)\|) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c \sum_{m=1}^N a_{jm}^{\sigma(t)}(\|\varepsilon_{im}(t)\| - \|\varepsilon_{ij}(t)\|) + \\ & 2c\hat{a}N(\varphi_1e^{-\gamma(t-t_0)} + \varphi_2). \end{aligned}$$

根据引理2, 将上式改写为

$$\begin{aligned} D^+(\|\varepsilon_{ij}(t)\|) \leq & \rho\|\varepsilon_{ij}(t)\| + ca_{is}^{\sigma(t)}(\hat{d}_{nT}^l(t) - \|\varepsilon_{ij}(t)\|) + \\ & c \left(\sum_{m=1, m \neq s}^N a_{im}^{\sigma(t)} + \sum_{m=1}^N a_{jm}^{\sigma(t)} \right) (\hat{y}_{nT}e^{\rho(t-t_{nT})} - \\ & \|\varepsilon_{ij}(t)\|) + 2c\hat{a}N(\varphi_1e^{-\gamma(t-t_0)} + \varphi_2) \leq \\ & \mu\|\varepsilon_{ij}(t)\| + ca_{is}^{\sigma(t)}\hat{d}_{nT}^l(t) + 2c\hat{a}\hat{y}_{nT}e^{\rho(t-t_{nT})} + \\ & 2c\hat{a}N(\varphi_1e^{-\gamma(t-t_0)} + \varphi_2). \end{aligned}$$

将引理3运用于 $\hat{d}_{nT}^l(t)$, 那么

$$\begin{aligned} D^+(\|\varepsilon_{ij}(t)\|) \leq & \mu\|\varepsilon_{ij}(t)\| + 2c\hat{a}\hat{y}_{nT}e^{\rho(t-t_{nT})} + c\hat{a}[\hat{d}_{nT}^l(t_{nT+l}) - \\ & \hat{y}_{nT}e^{\rho(t_{nT+l}-t_{nT})} + \phi_1e^{-\gamma(nT+l)h} + \phi_2]e^{\mu(t-t_{nT+l})} - \\ & c(\tilde{\phi}_1e^{-\gamma(t-t_0)} + \tilde{\phi}_2) + 2c\hat{a}N(\varphi_1e^{-\gamma(t-t_0)} + \varphi_2). \end{aligned} \quad (16)$$

根据引理式1和式(16), 可得

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_{ij}(t)\| \leq & e^{\mu(t-t_{nT+l})}(\|\varepsilon_{ij}(t_{nT+l})\| + \chi_1e^{-\gamma(nT+l)h} + \chi_2) + \\ & \hat{y}_{nT}e^{\rho(t_{nT+l}-t_{nT})}(e^{\rho(t-t_{nT+l})} - e^{\mu(t-t_{nT+l})}) + \\ & c\hat{a}(t - t_{nT+l})[\hat{d}_{nT}^l(t_{nT+l}) - \hat{y}_{nT}e^{\rho(t_{nT+l}-t_{nT})} + \\ & \tilde{\phi}_1e^{-\gamma(nT+l)h} + \tilde{\phi}_2]e^{\mu(t-t_{nT+l})} - \\ & \chi_1e^{-\gamma(t-t_0)} - \chi_2. \end{aligned}$$

令 $t = t_{nT+l+1}$, 将 $t - t_{nT+l} = h$ 运用于上式

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_{ij}(t_{nT+l+1})\| \leq & \hat{y}_{nT}e^{\rho h}(e^{\rho h} - hce^{\mu h}) + ch[\hat{a}\hat{d}_{nT}^l(t_{nT+l}) + \\ & \tilde{\phi}_1e^{-\gamma(nT+l)h} + \tilde{\phi}_2]e^{\mu h} + \\ & \chi_1e^{-a(nT+l)h}(e^{\mu h} - e^{\rho h}) + \\ & \chi_2(e^{\mu h} - 1). \end{aligned} \quad (17)$$

3) 当 $i, j \in \mathcal{V}_{l+2}$, 在间隔 $[t_{nT+l}, t_{nT+l+1})$ 内, 自主体 i 存在邻居 $p \in \Omega_{l+1}$, 自主体 j 存在邻居 $q \in \Omega_{l+1}$, 使得 $a_{ip}^{\sigma(t)}, a_{jq}^{\sigma(t)} > 0$. 此时, 存在关系

$$\begin{aligned} a_{ip}^{\sigma(t)}(\varepsilon_{pj}(t) - \varepsilon_{ij}(t)) + a_{jq}^{\sigma(t)}(\varepsilon_{iq}(t) - \varepsilon_{ij}(t)) = \\ a_{ip}^{\sigma(t)}(\varepsilon_{pq}(t) - \varepsilon_{ij}(t)) - (a_{jq}^{\sigma(t)} - a_{ip}^{\sigma(t)}) \cdot \\ (\varepsilon_{iq}(t) - \varepsilon_{ij}(t)). \end{aligned} \quad (18)$$

结合误差系统动态式(4)和式(18), 可得

$$\begin{aligned}
 D^+(\|\varepsilon_{ij}(t)\|) &\leq (\tilde{\phi}_1 e^{-\gamma(nT+l)h} + \tilde{\phi}_2) + \frac{\theta_1 + \theta_2}{1 - hc\hat{a}e^{\mu h}} - \\
 ca_{ip}^{\sigma(t)} \|\varepsilon_{pq}(t)\| + (a_{jq}^{\sigma(t)} - a_{ip}^{\sigma(t)}) \|\varepsilon_{iq}(t)\| + &\tilde{\phi}_1 e^{-\gamma(nT+l)h} - \tilde{\phi}_2 \leq \\
 \mu \tilde{\phi}_2 + c \sum_{m=1, m \neq p}^N a_{im}^{\sigma(t)} (\|\varepsilon_{mj}(t)\| - \|\varepsilon_{ij}(t)\|) + &\hat{y}_{nT} [(e^{\rho h})^{l+1} - (hce^{\mu h})^{l+1}] + \\
 c \sum_{m=1, m \neq q}^N a_{jm}^{\sigma(t)} (\|\varepsilon_{im}(t)\| - \|\varepsilon_{ij}(t)\|) + &\alpha_1 (e^{-\gamma T h})^n + \alpha_2. \tag{22} \\
 (\rho - ca_{jq}^{\sigma(t)}) \|\varepsilon_{ij}(t)\| + (\mu + \gamma) \tilde{\phi}_1 e^{-\gamma(t-t_0)} &\leq \\
 (\rho - 2c\hat{a} - c\tilde{a}) \|\varepsilon_{ij}(t)\| + c\tilde{a} \hat{d}_{nT}^l(t) + &\hat{d}_{nT}(t_{nT+T}) = y(nTh + Th) \leq \\
 (2c\hat{a} - 1) \hat{y}_{nT} e^{\rho(t-t_{nT})} + &\hat{y}_{nT} [(e^{\rho h})^T - (hce^{\mu h})^T] + \alpha_1 (e^{-\gamma T h})^n + \alpha_2 \leq \\
 (\mu + \gamma) \tilde{\phi}_1 e^{-\gamma(t-t_0)} + \mu \tilde{\phi}_2. &\eta \hat{y}_{nT} + \alpha_1 (e^{-\gamma T h})^n + \alpha_2. \tag{23}
 \end{aligned}$$

运用引理3于上式, 那么

$$\begin{aligned}
 D^+(\|\varepsilon_{ij}(t)\|) &\leq \\
 \mu \|\varepsilon_{ij}(t)\| + (2c\hat{a} - 1) \hat{y}_{nT} e^{\rho(t-t_{nT})} + \mu \tilde{\phi}_2 & \\
 c\tilde{a} [\hat{d}_{nT}^l(t_{nT+l}) + \tilde{\phi}_1 e^{-\gamma(nT+l)h} + \tilde{\phi}_2] e^{\mu(t-t_{nT+l})} + & \\
 c\tilde{a} \hat{y}_{nT} e^{\rho(t_{nT+l}-t_{nT})} (e^{\rho(t-t_{nT+l})} - e^{\mu(t-t_{nT+l})}) - & \\
 c\tilde{a} \tilde{\phi}_1 e^{-\gamma(t-t_0)} - c\tilde{a} \tilde{\phi}_2 + (\mu + \gamma) \tilde{\phi}_1 e^{-\gamma(t-t_0)} &\leq \\
 \mu \|\varepsilon_{ij}(t)\| + 2\hat{a}c \hat{y}_{nT} e^{\rho(t_{nT+l}-t_{nT})} + \mu \chi_2 & \\
 c\tilde{a} e^{\mu(t-t_{nT+l})} [\hat{d}_{nT}^l(t_{nT+l}) - \hat{y}_{nT} e^{\rho(t_{nT+l}-t_{nT})} + & \\
 \tilde{\phi}_1 e^{-\gamma(nT+l)h} + \tilde{\phi}_2] + (\mu + \gamma) \chi_1 e^{-\gamma(t-t_0)}. &\tag{19}
 \end{aligned}$$

由式(19)得到距离误差 $\varepsilon_{ij}(t)$ 在 $t = t_{nT+l+1}$ 时刻满足

$$\begin{aligned}
 \|\varepsilon_{ij}(t_{nT+l+1})\| &\leq \\
 hc\hat{a} [\hat{d}_{nT}^l(t_{nT+l}) + \tilde{\phi}_1 e^{-\gamma(nT+l)h} + \tilde{\phi}_2] e^{\mu h} + & \\
 \hat{y}_{nT} e^{\rho h} (e^{\rho h} - hce^{\mu h}) + \chi_1 e^{-\gamma(nT+l)h}. & \\
 (e^{\mu h} - e^{-\gamma h}) + \chi_2 (e^{\mu h} - 1). &\tag{20}
 \end{aligned}$$

若条件 (13) 成立, 有 $\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2 < 0$, 结合式 (15)(18) (20), 利用等比数列方法, 得到

$$\begin{aligned}
 \hat{d}_{nT}^l(t_{nT+l+1}) + \tilde{\phi}_1 e^{-\gamma(nT+l)h} + \tilde{\phi}_2 &\leq \\
 hc\hat{a} [\hat{d}_{nT}^l(t_{nT+l}) + \tilde{\phi}_1 e^{-\gamma(nT+l)h} + \tilde{\phi}_2] e^{\mu h} + & \\
 \hat{y}_{nT} (e^{\rho h})^l (e^{\rho h} - hce^{\mu h}) + \theta_1 + \theta_2 &\leq \\
 (hc\hat{a} e^{\mu h})^l (\hat{d}_{nT}^l(t_{nT}) + \tilde{\phi}_1 e^{-\gamma(nT)h} + \tilde{\phi}_2) + & \\
 \hat{y}_{nT} [(e^{\rho h})^{l+1} - (hce^{\mu h})^{l+1}] + & \\
 (\theta_1 + \theta_2) \frac{1 - [hc\hat{a} e^{\mu h}]^l}{1 - hc\hat{a} e^{\mu h}}. &\tag{21}
 \end{aligned}$$

由于 Ω_1 是单元素集, 可得 $\hat{d}_{nT}^l(t_{nT}) = 0$, 将式(21)化简为

$$\begin{aligned}
 \hat{d}_{nT}^l(t_{nT+l+1}) &\leq \\
 \hat{y}_{nT} [(e^{\rho h})^{l+1} - (hce^{\mu h})^{l+1}] + (hc\hat{a} e^{\mu h})^l. &
 \end{aligned}$$

令式(22)中 $l = T - 1$, 得到

$$\begin{aligned}
 \hat{d}_{nT}(t_{nT+T}) = y(nTh + Th) &\leq \\
 \hat{y}_{nT} [(e^{\rho h})^T - (hce^{\mu h})^T] + \alpha_1 (e^{-\gamma T h})^n + \alpha_2 &\leq \\
 \eta \hat{y}_{nT} + \alpha_1 (e^{-\gamma T h})^n + \alpha_2. &\tag{23}
 \end{aligned}$$

运用引理2于式(23), 则距离函数满足迭代关系:

$$\begin{aligned}
 \hat{y}_{nT} &\leq y(t_{nT}) + \phi_1 (e^{-\gamma T h})^n + \phi_2 \leq \\
 \eta \hat{y}_{(n-1)T} + (\phi_1 e^{-\gamma T h} + \alpha_1) (e^{-\gamma T h})^{n-1} + \alpha_2 + \phi_2 &\leq \\
 \eta^2 \hat{y}_{(n-2)T} + \eta (\phi_1 e^{-\gamma T h} + \alpha_1) (e^{-\gamma T h})^{n-2} + & \\
 \beta (\alpha_2 + \phi_2) + (\phi_1 e^{-\gamma T h} + \alpha_1) (e^{-\gamma T h})^{n-1} + & \\
 \alpha_2 + \phi_2 \leq \dots \leq \eta^n \hat{y}_0 + \eta^{n-1} (\phi_1 e^{-\gamma T h} + \alpha_1) + & \\
 \dots + (\phi_1 e^{-\gamma T h} + \alpha_1) (e^{-\gamma T h})^{n-1} + & \\
 (\alpha_2 + \phi_2) (\eta^{n-1} + \dots + 1) = & \\
 \eta^n \hat{y}_0 + (\alpha_2 + \phi_2) \frac{1 - \eta^n}{1 - \eta} + \eta^{n-1}. & \\
 (\phi_1 e^{-\gamma T h} + \alpha_1) \frac{1 - (e^{-\gamma T h} / \eta)^n}{1 - (e^{-\gamma T h} / \eta)}. &
 \end{aligned}$$

若条件(13)成立, 那么自主体间最大距离满足

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{y}_{nT} e^{\rho T h} = \frac{(\alpha_2 + \phi_2)}{1 - \eta} e^{\rho T h},$$

上式表明多自主体系统(1)能够达到有界一致性.

证毕.

4.2 Zeno现象分析

Zeno现象是指两个连续触发事件的时间间隔为0, 即 $t_{k+1}^i - t_k^i = 0$. 若系统发生Zeno现象, 则意味着该触发机制不适用. 为表明事件触发算法的合理性, 需保证对于任意 $k \in \mathbb{N}$ 和 $i = 1, 2, \dots, N$, 触发间隔满足 $t_{k+1}^i - t_k^i > 0$.

定理 2 对于任意初始条件 $x_i(0)$ 和时间 $t \geq t_0$, 若假设1和假设2成立, 在运用控制输入(2)和事件触发函数(3)的情况下, 多自主体系统(1)不存在Zeno现象.

证 定义 $U = \max_{t \in [t_k^i, t_{k+1}^i)} \{\|u_i(t)\|\}$,

$$\begin{aligned}
 \zeta(t_{k-1}^i, t_k^i) &= \rho \|x_i(t_k^i)\| + U + \frac{\|x_i(t_k^i) - x_i(t_{k-1}^i)\|}{t_k^i - t_{k-1}^i}, \\
 \hat{\zeta} &= \arg \max_{i \in \mathcal{V}, k \in \mathbb{N}} \zeta(t_{k-1}^i, t_k^i), \quad \psi = \frac{\max\{\hat{\zeta}, \rho \varphi_2 + \gamma \varphi_1\}}{\varphi_2},
 \end{aligned}$$

$$\varphi_i(t) = \frac{\|e_i(t)\|}{(\varphi_1 e^{-\gamma(t-t_0)} + \varphi_2)}.$$

根据测量误差 $e_i(t)$ 的定义, 可得

$$\begin{aligned} D^+(\|e_i(t)\|) &\leq \\ &\| -u_i(t) - f(x_i(t), t) \| + \frac{\|x_i(t_k^i) - x_i(t_{k-1}^i)\|}{t_k^i - t_{k-1}^i} \leq \\ &\rho \|e_i(t)\| + \rho \|x_i(t_k^i)\| + \|u_i(t)\| + \\ &\frac{\|x_i(t_k^i) - x_i(t_{k-1}^i)\|}{t_k^i - t_{k-1}^i} \leq \\ &\rho \|e_i(t)\| + \zeta(t_{k-1}^i, t_k^i). \end{aligned}$$

因此, 在 $t \in [t_k^i, t_{k+1}^i)$ 时刻, $e_i(t)$ 满足

$$\|e_i(t)\| \leq \frac{\zeta(t_{k-1}^i, t_k^i)}{\rho} e^{\rho(t-t_k^i)} - \frac{\zeta(t_{k-1}^i, t_k^i)}{\rho},$$

令 $t = t_{k+1}^i$, 则上式变为

$$\|e_i(t_{k+1}^i)\| \leq \frac{\zeta(t_{k-1}^i, t_k^i)}{\rho} e^{\rho(t_{k+1}^i - t_k^i)} - \frac{\zeta(t_{k-1}^i, t_k^i)}{\rho}. \quad (24)$$

根据触发函数(3), 在触发时刻 t_{k+1}^i , $\|e_i(t)\|$ 达到触发阈值, 那么

$$\|e_i(t_{k+1}^i)\| = \varphi_1 e^{-\gamma(t_{k+1}^i - t_0)} + \varphi_2. \quad (25)$$

结合式(24)–(25), 可以得到

$$\begin{aligned} \varphi_1 e^{-\gamma(t_{k+1}^i - t_0)} + \varphi_2 &\leq \\ \frac{\zeta(t_{k-1}^i, t_k^i)}{\rho} e^{\rho(t_{k+1}^i - t_k^i)} - \frac{\zeta(t_{k-1}^i, t_k^i)}{\rho}. \end{aligned} \quad (26)$$

如果自主体 $i \in \mathcal{V}$ 在第 $k+1$ 次触发时发生Zeno现象, 使得 $t_{k+1}^i - t_k^i = 0$, 则运用式(26)有

$$\varphi_1 e^{-\gamma(t_k^i - t_0)} + \varphi_2 \leq 0,$$

这与 $\varphi_1 > 0$ 和 $\varphi_2 > 0$ 的事实矛盾. 因此, 对于任意 $k \in \mathbb{N}$ 和 $i = 1, 2, \dots, N$, 都有 $t_{k+1}^i - t_k^i > 0$.

接下来求解触发间隔下界 τ , 对 $\varphi_i(t)$ 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_i(t) &= \\ &\frac{-e_i^T(t)\dot{e}_i(t)}{(\varphi_1 e^{-\gamma(t-t_0)} + \varphi_2)\|e_i(t)\|} - \frac{\gamma\varphi_1 e^{-\gamma(t-t_0)}\|e_i(t)\|}{(\varphi_1 e^{-\gamma(t-t_0)} + \varphi_2)^2} \leq \\ &\frac{\|\dot{e}_i(t)\|}{\varphi_1 e^{-\gamma(t-t_0)} + \varphi_2} + \frac{\gamma\varphi_1 e^{-\gamma(t-t_0)}\|e_i(t)\|}{(\varphi_1 e^{-\gamma(t-t_0)} + \varphi_2)^2} \leq \\ &\frac{\rho\|e_i(t)\| + \zeta(t_{k-1}^i, t_k^i)}{\varphi_1 e^{-\gamma(t-t_0)} + \varphi_2} + \frac{\gamma\varphi_1 e^{-\gamma(t-t_0)}}{\varphi_1 e^{-\gamma(t-t_0)} + \varphi_2} \varphi_i(t) \leq \\ &\rho\varphi_i(t) + \frac{\zeta(t_{k-1}^i, t_k^i)}{\varphi_2} + \frac{\gamma\varphi_1}{\varphi_2} \varphi_i(t) \leq \end{aligned}$$

$$\psi + \varphi\varphi_i(t) \leq \psi(1 + \varphi_i(t))^2. \quad (27)$$

根据式(27)可得 $\varphi_i(t) \leq \phi(t, \phi_0)$, 其中 $\phi(t, \phi_0)$ 是微分方程 $\dot{\phi}(t) = \psi(1 + \phi(t))^2$ 的解, 满足 $\phi(0, \phi_0) = \phi_0$.

假设 t 时刻有 $e_i(t) = 0$, 则函数 $\phi(t)$ 从0变成1的时间便为触发间隔下界 τ , 即 τ 为方程 $\phi(\tau, 0) = 1$ 的解. 由于 $\phi(\tau, 0) = \tau\psi/(1 - \tau\psi)$, 可得 $\tau = 1/2\psi > 0$. 因此, 多自主体系统(1)不存在Zeno现象. 证毕.

5 仿真结果与分析

为证明上述理论结果的正确性, 考察由6个非线性多自主体构成的一阶多自主体系统, 系统动态为

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t) + f(x_i(t), t), \quad i = 1, 2, \dots, 6,$$

其中非线性项 $f(x_i(t), t) = 0.2 \tanh x_i(t) + \sin t$, 得到Lipschitz系数 $\rho = 0.2$. 切换拓扑如图1所示, 子图 \mathcal{G}_1 和 \mathcal{G}_2 不包含有向生成树, 通信边权重均为1.

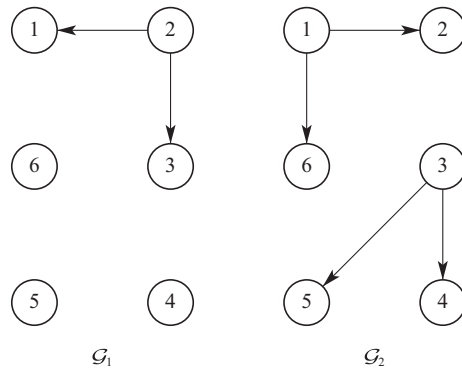


图1 网络通信拓扑

Fig. 1 Network communication topologies

选取控制增益 $c = 1$, 子图切换间隔 $h = 0.2$, 切换个数 $T = 2$, 触发函数参数 $\varphi_1 = 0.025$, $\varphi_2 = 0.01$ 和 $\gamma = 0.25$. 验证定理1中条件, 可得 $\mu + \gamma = -3.55 < 0$, $e^{-\gamma Th} = 0.9049 < \eta = 0.9144 < 1$, $hc = 0.2 < 1$.

随机选取自主体的初始状态, 在控制输入(2)和触发函数(3)的作用下, 状态变化轨迹如图2所示, 可以看出自主体的状态逐渐趋于有界一致. 图3给出了控制输入(2)的变化情况, 在一阶保持器的作用下, 控制信号为分段线性信号, 并且控制输入不断减小. 自主体的触发时刻如图4所示, 触发时刻是离散的, 可以降低通信频率, 节约通信资源. 此外, 图5表示自主体间最大距离 $\|y(t)\|$ 的变化轨迹, 随着时间的增加, 距离逐渐趋于有界常数.

定义一致性误差

$$\delta(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 (x_i(t) - x_j(t))^2}.$$

在满足条件(12)–(14)的前提下改变控制器增益 c ,

对比所提协议(2)(3)和文献[14]中的协议. 当 $\delta(t) < 0.1$ 时, 平均触发间隔和一致性收敛速度的对比结果在表1中给出, 可以看出协议(2)和(3)的平均触发间隔更大. 但采用一致性协议(2)和(3)时, 触发次数变少使得自主体的控制输入更新频率变低, 因此一致性收敛速度要慢于文献[14]的一致性协议. 此外, 文献[14]的触发函数需要利用邻居自主体的连续信息, 而协议(2)和(3)不需要自主体间的连续通信, 可以有效降低通信负载, 节约有限的通信资源.

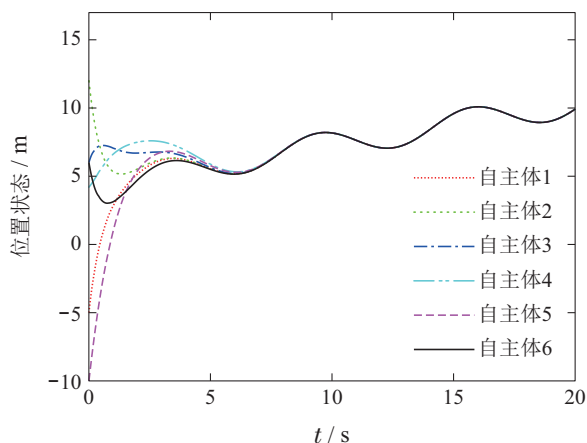


图 2 自主体的状态变化

Fig. 2 Evolution of states of each agent

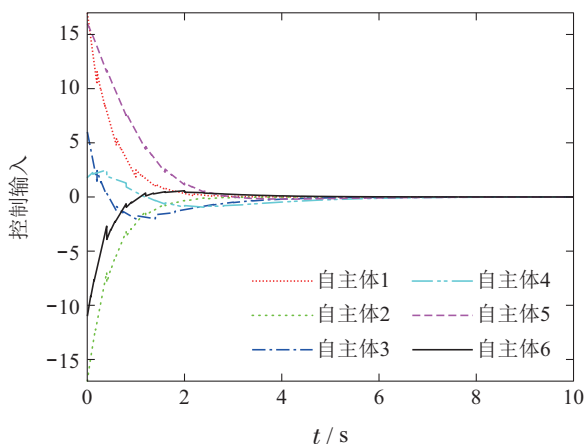


图 3 自主体的控制输入变化

Fig. 3 Evolution of control input of each agent

表 1 平均触发间隔 T_{at} 和一致性收敛速度 t_{ct} 的对比
Table 1 Comparison on the average triggering interval T_{at} and the consensus convergence time t_{ct}

控制增益 c	1.0	1.2	1.5	2.0	3.0
T_{at} (所提)/s	0.1736	0.1550	0.1099	0.0738	0.0648
$T_{at}^{[14]}$ /s	0.0500	0.0371	0.0307	0.0227	0.0174
t_{ct} (所提)/s	9.0825	8.2650	6.4825	4.2975	3.8125
$t_{ct}^{[14]}$ /s	7.7600	6.2050	5.1725	3.5550	2.2125

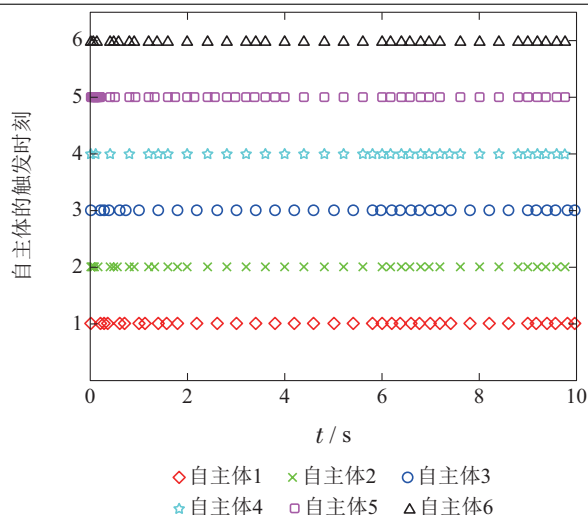


图 4 自主体的触发时刻

Fig. 4 Triggering instants of each agent

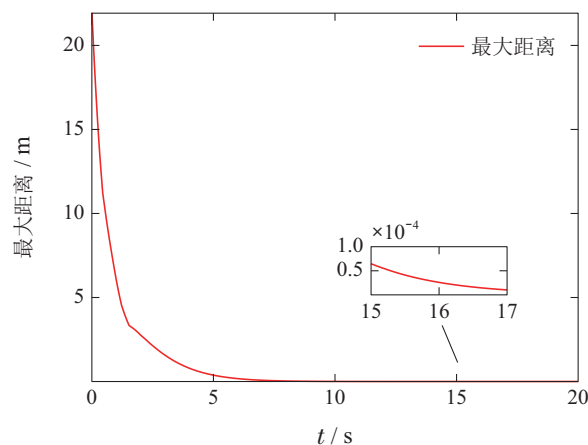


图 5 自主体间的最大距离 $\|y(t)\|$

Fig. 5 The maximal distance $\|y(t)\|$ of agents

6 结论

本文考察切换拓扑下一阶非线性多自主体系统的一致性控制问题. 利用一阶保持器构造控制信号, 设计了一种分布式事件触发算法, 可以避免自主体间的连续通信. 当切换拓扑的并图包含有向生成树时, 根据通信关系将自主体划分为不同集合, 采用迭代法和不等式法, 计算自主体间的最大距离函数, 得到了多自主体系统实现有界一致性的充分条件. 此外, 利用阈值条件构造了与触发间隔相关的微分方程, 证明了触发间隔的下界为正常数, 排除了自主体的Zeno触发行为, 保证了所提事件触发机制的合理性.

参考文献:

[1] SCHIFFER J, SEEL T, RAISCH J, et al. Voltage stability and reactive power sharing in inverter-based microgrids with consensus-based distributed voltage control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2016, 24(1): 96 – 109.

[2] REN W. Formation keeping and attitude alignment for multiple spacecraft through local interactions. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2007, 30(2): 633 – 638.

- [3] SONG C, FAN Y, ZHAO J. Coverage control for mobile sensor networks with limited communication ranges on a circle. *Automatica*, 2018, 92: 155 – 161.
- [4] LIU C L, LIU F. *Consensus Problem of Delayed Linear Multi-agent Systems: Analysis and Design*. Singapore: Springer Nature, 2017.
- [5] LI Yuling, YANG Hongyong, LIU Fan, et al. Cooperative motion of second order multi-agent systems with external disturbances. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(7): 1113 – 1121.
(李玉玲, 杨洪勇, 刘凡, 等. 具有外部干扰的二阶多自主体系统的协同运动. 控制理论与应用, 2019, 36(7): 1113 – 1121.)
- [6] WU Yiming, DING Jiajun, HE Xiongxiang, et al. Secure consensus control for multi-agent systems under communication delay. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(8): 1039 – 1045.
(伍益明, 丁佳骏, 何熊熊, 等. 通信时延下多智能体系统的安全一致性控制. 控制理论与应用, 2016, 33(8): 1039 – 1045.)
- [7] LI H, CHEN G, HUANG T, et al. Event-triggered consensus in nonlinear multi-agent systems with nonlinear dynamics and directed network topology. *Neurocomputing*, 2016, 185: 105 – 112.
- [8] ZHU W, JIANG Z P. Distributed functional observer-based event-triggered containment control of multi-agent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(5): 1362 – 1367.
- [9] YANG D, REN W, LIU X, et al. Decentralized event-triggered consensus for linear multi-agent systems under general directed graphs. *Automatica*, 2016, 69: 242 – 249.
- [10] LI H, GUO C, DONG Z, et al. Consensus analysis of multiagent systems with second-order nonlinear dynamics and general directed topology: An event-triggered scheme. *Information Sciences*, 2016, 370/371: 598 – 622.
- [11] REN J, SONG Q, LU G P. Event-triggered bipartite leader-following consensus of second-order nonlinear multi-agent systems under signed digraph. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, 356(12): 6591 – 6609.
- [12] CHEN Y, YU W W, TAN S L, et al. Synchronizing nonlinear complex networks via switching disconnected topology. *Automatica*, 2016, 70: 189 – 194.
- [13] LIU K X, DUAN P H, DUAN Z S, et al. Leader-following consensus of multi-agent systems with switching networks and event-triggered control. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2018, 65(5): 1696 – 1706.
- [14] CUI Y, LIU Y R, ZHANG W B, et al. Event-based consensus for a class of nonlinear multi-agent systems with sequentially connected topology. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2018, 65(10): 3506 – 3518.
- [15] XIE D, XU S Y, CHU Y M, et al. Event-triggered average consensus for multi-agent systems with nonlinear dynamics and switching topology. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, 352(2): 1080 – 1098.
- [16] LI H, LIAO X F, HUANG T W, et al. Event-triggering sampling based leader-following consensus in second-order multi-agent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(7): 1998 – 2003.
- [17] SUN J, WANG Z S. Event-triggered consensus control of high-order multi-agent systems with arbitrary switching topologies via model partitioning approach. *Neurocomputing*, 2020, 413(6): 14 – 22.
- [18] CHENG B, WANG X K, LI Z K. Event-triggered consensus of homogeneous and heterogeneous multi-agent systems with jointly connected switching topologies. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 49(12): 4421 – 4430.
- [19] MA Y, ZHAO J. Distributed event-triggering consensus using only triggered information for multi-agent systems under fixed and switching topologies. *IET Control Theory & Applications*, 2018, 12(9): 1357 – 1365.
- [20] MU R, WEI A R, LI H T, et al. Event-triggering leader-following consensus for multi-agent systems with external disturbances under fixed and switching topologies. *IET Control Theory & Applications*, 2020, 14(11): 1486 – 1496.
- [21] ATASSI A N, KHALIL H K. A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(9): 1672 – 1687.
- [22] ASTROM K J, WITTENMARK B. *Computer-Controlled Systems: Theory and Design*. North Chelmsford: Courier Corporation, 2013.
- [23] HE N, SHI D, CHEN T. Self-triggered model predictive control for networked control systems based on first-order hold. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, 28(4): 1303 – 1318.

作者简介:

尚宇 硕士研究生, 目前研究方向为多自主体系统事件触发控制, E-mail: jnwlwysy@163.com;

刘成林 教授, 博士生导师, 目前研究方向为多自主体系统协调控制、非线性控制, E-mail: liucl@jiangnan.edu.cn;

曹科才 教授, 硕士生导师, 目前研究方向为非线性系统的分析与控制、复杂系统的数学建模与控制, E-mail: caokecai@gmail.com.