

拦截高速机动目标的非线性自抗扰制导律

马鹏娟¹, 赵志良¹, 陈 森¹, 郭 杨^{2†}

(1. 陕西师范大学 数学与统计学院, 陕西 西安 710110; 2. 火箭军工程大学 导弹工程学院, 陕西 西安 710025)

摘要: 为实现导弹对目标的高精度拦截, 本文提出了基于加权齐次函数的非线性自抗扰拦截制导设计方法. 首先, 提出了基于加权齐次函数的非线性扩张状态观测器在线估计视线角速率和由目标加速度等内外不确定性因素构成的总扰动. 其次, 设计了基于非线性扩张状态观测器的非线性自抗扰三维制导律对总扰动进行补偿, 该制导律克服了高阶非线性项与强耦合项等不利因素的影响, 提高了拦截制导精度. 本文通过分析误差系统的动力学行为证明了闭环制导系统的稳定性和收敛性. 本文提出的方法在拦截精度等方面优于已有的基于线性扩张状态观测器和基于fal函数的扩张状态观测器的自抗扰制导方法. 仿真结果验证了本文所提出方法的有效性和优越性.

关键词: 拦截制导; 非线性自抗扰控制; 扩张状态观测器

引用格式: 马鹏娟, 赵志良, 陈森, 等. 拦截高速机动目标的非线性自抗扰制导律. 控制理论与应用, 2023, 40(5): 942 – 948

DOI: 10.7641/CTA.2021.10239

Nonlinear active disturbance rejection guidance law for highly maneuvering targets

MA Peng-juan¹, ZHAO Zhi-liang¹, CHEN Sen¹, GUO Yang^{2†}

(1. College of Mathematics and Statistics, Shaanxi Normal University, Xi'an Shaanxi 710110, China;

2. School of Missile Engineering, Rocket Force University of Engineering, Xi'an Shaanxi 710025, China)

Abstract: To improve the precision of missiles interception, this paper proposes a weighted-homogeneous-function-based nonlinear active disturbance rejection interception guidance design method. Firstly, a weighted-homogeneous-function-based extended state observer is proposed to online estimate the line-of-sight angular rate and the total disturbances. The total disturbances are composed of internal and external uncertainties including the acceleration of the target missile. Secondly, a nonlinear active disturbance rejection three-dimensional guidance law is designed by using the estimated value from the extended state observer, where the total disturbances are compensated by their estimated values. The proposed guidance law improves the interception accuracy despite high-order nonlinearities and coupling factors of the interception system. The stability and convergence of the closed-loop system are proved by analyzing the dynamic behavior of the error system. It is shown that the proposed method possesses the merit of high-accurate interception compared to existing linear-ESO-based and fal-ESO-based active disturbance rejection guidance methods. Numerical simulations validate the effectiveness and the merits of the proposed method.

Key words: interception guidance; nonlinear active disturbance rejection control; extended state observer

Citation: MA Pengjuan, ZHAO Zhiliang, CHEN Sen, et al. Nonlinear active disturbance rejection guidance law for highly maneuvering targets. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(5): 942 – 948

1 引言

利用导弹摧毁关键目标是现代战争的主要特征之一, 导弹的高效拦截引起了人们的广泛关注, 拦截制导问题也已被深入研究^[1-5]. 在导弹拦截制导研究中, 在视线角和视线角速率较小的情况下, 通常采用双平

面解耦的方法, 将导弹和目标三维运动方程在理想的碰撞点附近进行线性化, 亦即将三维制导问题简化成两个二维平面制导问题^[1]. 随着高速机动导弹的快速发展, 在未来战争中, 高速机动目标将成为导弹拦截系统的重要拦截对象. 目标的机动是影响制导精度的

收稿日期: 2021-03-22; 录用日期: 2021-12-22.

†通信作者. E-mail: guoyang820@foxmail.com; Tel.: +86 13022999030.

本文责任编辑: 陈谋.

国家自然科学基金项目(61973202, 62003202), 中央高校基本科研业务费专项资金项目(GK202003008).

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61973202, 62003202), the Fundamental Research Funds for the Central Universities (GK202003008).

主要因素之一,传统的比例导引律对高速机动目标往往不能满足高精度拦截的需求^[2].针对导弹目标相对运动二维非线性关系,文献[3]将目标加速度视为外界干扰在线估计,并在所设计的自抗扰导引律中进行了补偿.类似的研究还可参见文献[4-5],文献[4-5]设计了降阶扩张状态观测器来在线观测目标机动信息和空气动力学参数的变化信息.

导弹和目标的相对运动存在着复杂的非线性关系,在双平面解耦设计中,高阶非线性项与交叉耦合项通常被忽略.这些被忽略的高阶非线性耦合项通常会对拦截精度造成不利影响.因此研究未简化的三维非线性系统对进一步提升拦截精度具有重要意义.文献[6]利用输入-状态稳定性原理,针对部分执行器失效的问题设计了一种三维非线性自适应容错导引律,实现了对机动目标拦截时执行器部分失效的自动补偿,并且克服了机动目标未知机动性对制导效果的影响.文献[7]构造了线性扩张状态观测器来估计目标加速度和总扰动,并考虑了量测噪声对制导精度的影响.文献[8]发展了一种线性自抗扰制导律,通过线性扩张状态观测器估计弹目运动中的总扰动并进行实时动态补偿.文献[9]首先设计了基于非线性fal函数的扩张状态观测器来估计目标机动和视线角速率,然后基于动态面控制方法设计了三维空间导引律,避免了传统反演控制方法中的“微分膨胀”问题.

上述基于扩张状态观测器的制导律是自抗扰控制技术在导弹拦截制导中的拓展^[7-9].自抗扰控制是中国控制理论家韩京清先生在20世纪80年代末开始提出的新控制技术^[10].在已有的基于自抗扰控制技术的拦截制导文献中,扩张状态观测器的设计函数或者是线性函数^[7-8],或者是非线性的fal函数^[9].

为进一步提高收敛速度和拦截精度,本文针对未经简化的三维拦截系统提出了基于加权齐次函数的非线性自抗扰拦截制导设计.由于视线角的量测易于视线角速率的量测,本文仅利用视线角而非视线角速率作为系统量测输出信号.

本文剩余内容安排如下:第2节分析了导弹和目标的运动关系,指出了弹目拦截系统中不确定性因素和高阶非线性耦合因素以及由此构成的总扰动;第3节首先构造了基于加权齐次函数的扩张状态观测器(weighted-homogenous-function-based extended state observer, WHF-ESO),用于估计视线角速率和总扰动,然后设计了基于WEH-ESO非线性自抗扰制导律;第4节是本文的主要结果及证明;第5节是仿真;最后是全文总结.

2 弹目运动关系

导弹和目标三维相对运动几何关系如图1所示,图中 $O-XYZ$ 为牵连惯性坐标系,与惯性坐标系平行,

$O-X_L Y_L Z_L$ 为视线坐标系,原点与导弹质心重合, T 点为目标质心, $q_h \in \mathbb{R}$ 是导弹和目标的视线偏航角, $q_v \in \mathbb{R}$ 是导弹和目标的视线俯仰角, r 是导弹和目标的相对距离.

导弹-目标的相对运动方程为^[9,11]

$$\begin{cases} \ddot{q}_v(t) = -2\frac{\dot{r}(t)}{r(t)}\dot{q}_v(t) + \frac{a_y^E(t) - a_y^P(t)}{r}(t) - \\ \quad \dot{q}_h^2(t) \sin(q_v(t)) \cos(q_v(t)) + d_v(t), \\ \ddot{q}_h(t) = -2\frac{\dot{r}(t)}{r(t)}\dot{q}_h(t) + \frac{a_z^E(t) - a_z^P(t)}{r(t) \cos(q_v(t))} + \\ \quad 2\dot{q}_h^2(t) q_v(t) \tan(q_v(t)) + d_h(t), \\ \ddot{r}(t) = a_x^E(t) - a_x^P(t) + \dot{q}_v^2(t)r(t) + \\ \quad (\dot{q}_h(t) \cos(q_v(t)))^2 r(t) + d_r(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $a_y^E(t) \in \mathbb{R}$, $a_z^E(t) \in \mathbb{R}$, $a_x^E(t) \in \mathbb{R}$ 是目标制导加速度在视线坐标系上的分量; $a_y^P(t) \in \mathbb{R}$, $a_z^P(t) \in \mathbb{R}$, $a_x^P(t) \in \mathbb{R}$ 是拦截导弹制导加速度在视线坐标系上的分量; $d_h(t) \in \mathbb{R}$, $d_v(t) \in \mathbb{R}$, $d_r(t) \in \mathbb{R}$ 是星际间引力等因素构成的外部扰动.根据平行接近法原理,当视线角速率为0时,导弹可以成功碰撞拦截目标.因此拦截制导的关键在于如何通过控制 a_y^P , a_z^P 使得视线俯仰角速率 $\dot{q}_v(t)$ 和视线偏航角速率 $\dot{q}_h(t)$ 充分接近0.

为便于问题的研究,令

$$\begin{cases} x_{11}(t) = q_v(t), x_{12}(t) = \dot{q}_v(t), \\ x_{21}(t) = q_h(t), x_{22}(t) = \dot{q}_h(t), \\ x = [x_{11} \ x_{12} \ x_{21} \ x_{22}]^T, \\ u_1(t) = \frac{-a_y^P(t)}{r(t)}, u_2(t) = \frac{-a_z^P(t)}{r(t) \cos(q_v(t))}. \end{cases} \quad (2)$$

由于通常情况下目标的加速度无法直接获得,本文将其作为有界扰动来处理.将传统控制方法难以处理的高阶非线性耦合项、目标加速度和其他系统内外扰动一起作为总扰动 $f_i: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} f_1(t, x(t)) &= -2\frac{\dot{r}(t)}{r(t)}x_{12}(t) + \frac{a_y^E(t)}{r(t)} - \\ &\quad x_{22}^2(t) \sin(x_{11}(t)) \cos(x_{11}(t)) + d_v(t), \\ f_2(t, x(t)) &= -2\frac{\dot{r}(t)}{r(t)}x_{21}(t) + \frac{a_z^E(t)}{r(t) \cos(x_{11}(t))} + \\ &\quad 2x_{22}^2(t)x_{11}(t) \tan(x_{11}(t)) + d_h(t). \end{aligned}$$

因此系统(1)可转化为

$$\begin{cases} \dot{x}_{11}(t) = x_{12}(t), \\ \dot{x}_{12}(t) = f_1(t, x(t)) + u_1(t), \\ \dot{x}_{21}(t) = x_{22}(t), \\ \dot{x}_{22}(t) = f_2(t, x(t)) + u_2(t). \end{cases} \quad (3)$$

对于系统(3)中导弹与目标之间的距离和目标的制导加速度以及外部干扰,给出如下有界性假设.

假设1 存在一个常数 $T > 0$, 使得对任意的 $t \in [0, T], r(t) > r_0 > 0$ 以及

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \left| \frac{\dot{r}(t)}{r(t)} \right| + \left| \frac{\ddot{r}(t)r(t) - \dot{r}^2(t)}{r^2(t)} \right| + \left| \frac{\dot{a}_y^E(t)r(t) - a_y^E(t)\dot{r}(t)}{r^2(t)} \right| + \left| \frac{\dot{a}_z^E(t)r(t) - a_z^E(t)\dot{r}(t)}{r^2(t)} \right| + |\dot{d}_v(t)| + |\dot{d}_h(t)| < \infty. \quad (4)$$

注1 当 $a_y^E(t), a_z^E(t), d_v(t), d_h(t)$ 及其导数以及 $\dot{r}(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上有界, 且 $r(t) > r_0$ 时假设1成立, r_0 为导弹和目标半径之和. 在实际中 $a_y^E(t), a_z^E(t), d_v(t), d_h(t)$ 及其导数以及 $\dot{r}(t)$ 通常是有界的. 在末端拦截中, 当 $r(t) > r_0$ 时, 导弹拦截正常进行; 当 $r(t) \leq r_0$ 时, 导弹会撞击目标. 因此, 在导弹拦截制导中假设 $r(t) > r_0 > 0$ 是合理的.

假设2

$$\|x(0)\| \leq R_1, \quad R_1 < R_2, \quad (5)$$

其中: R_1 是一个常数, $R_2 = \kappa_2^{-1}(\kappa_1(\pi/2))$, 其中, κ_1, κ_2 为 \mathcal{K}_∞ 类函数, $\kappa_1^{-1}, \kappa_2^{-1}$ 为 κ_1, κ_2 的反函数.

注2 假设2说明 $|x_{ij}(0)| < \frac{\pi}{2}$.

3 非线性自抗扰控制方法设计

根据文献[12], 本文设计如下的非线性扩张状态观测器通过系统输出(视线角)观测系统的角速率以及由系统内外不确定性因素构成的总扰动:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_{11}(t) = \hat{x}_{12}(t) + 3\varepsilon \left[\frac{x_{11}(t) - \hat{x}_{11}(t)}{\varepsilon^2} \right]^{\theta_1}, \\ \dot{\hat{x}}_{12}(t) = \hat{x}_{13}(t) + 3 \left[\frac{x_{11}(t) - \hat{x}_{11}(t)}{\varepsilon^2} \right]^{\theta_2} + u_1(t), \\ \dot{\hat{x}}_{13}(t) = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{x_{11}(t) - \hat{x}_{11}(t)}{\varepsilon^2} \right]^{\theta_3}, \\ \dot{\hat{x}}_{21}(t) = \hat{x}_{22}(t) + 3\varepsilon \left[\frac{x_{21}(t) - \hat{x}_{21}(t)}{\varepsilon^2} \right]^{\theta_1}, \\ \dot{\hat{x}}_{22}(t) = \hat{x}_{23}(t) + 3 \left[\frac{x_{21}(t) - \hat{x}_{21}(t)}{\varepsilon^2} \right]^{\theta_2} + u_2(t), \\ \dot{\hat{x}}_{23}(t) = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{x_{21}(t) - \hat{x}_{21}(t)}{\varepsilon^2} \right]^{\theta_3}, \end{cases} \quad (6)$$

其中: $\hat{x}_{11}(t), \hat{x}_{12}(t), \hat{x}_{21}(t), \hat{x}_{22}(t)$ 分别是对 $x_{11}(t), x_{12}(t), x_{21}(t), x_{22}(t)$ 的估计, $\hat{x}_{13}(t), \hat{x}_{23}(t)$ 是对总扰动 $f_1(\cdot)$ 和 $f_2(\cdot)$ 的估计. 扩张状态观测器(6)中的非线性函数 $[\cdot]^{\theta_i}$ 定义为

$$[\tau]^{\theta_i} = |\tau|^{\theta_i} \text{sgn } \tau, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\theta_1 = \theta, \quad \theta_2 = 2\theta - 1, \quad \theta_3 = 3\theta - 2, \quad \theta \in \left(\frac{2}{3}, 1 \right).$$

这样选取函数和参数的目的是使得扩张状态观测器中的非线性函数构成一个加权齐次的向量场. 这里的 $\varepsilon \in (0, 1)$ 是增益调整参数, 观测误差将会随着 ε 的减小而变得任意小.

基于以上非线性扩张状态观测器的观测, 设计非

线性自抗扰制导律如下:

$$\begin{cases} u_1(t) = \text{sat}_{M_1}(-\alpha_1[x_{11}(t)]^{\beta_1} - \alpha_2[\hat{x}_{12}(t)]^{\beta_2} - \hat{x}_{13}(t)), \\ u_2(t) = \text{sat}_{M_2}(-\alpha_1[x_{21}(t)]^{\beta_1} - \alpha_2[\hat{x}_{22}(t)]^{\beta_2} - \hat{x}_{23}(t)), \end{cases} \quad (7)$$

其中: $[\tau]^{\beta_i}$ 的定义和它在扩张状态观测器中的定义相同, $\beta_1 = 2\beta - 1, \beta_2 = \frac{2\beta - 1}{\beta}, \beta \in (1/2, 1)$. 在本文的证明部分可以看到由反馈控制函数构成的向量场也是一个加权齐次向量场. 这里 α_1, α_2 是使得下面矩阵 K 为 Hurwitz 矩阵的常数:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}.$$

制导律中的 $\text{sat}_{M_i} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是如下定义的饱和函数:

$$\text{sat}_{M_i}(\tau) = \begin{cases} -M_i, & \tau \in (-\infty, -M_i], \\ \tau, & \tau \in (-M_i, M_i), \\ M_i, & \tau \in [M_i, \infty) \end{cases} \quad (8)$$

用于解决制导过程中的过载与抖振等问题. 在给出 M_i 的选取方法之前, 先定义一个 Lyapunov 函数.

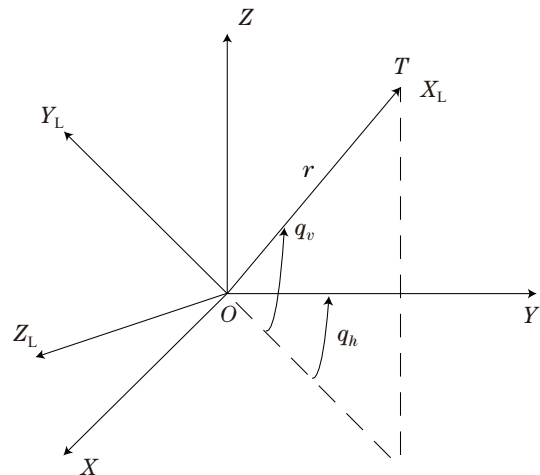


图1 弹目三维相对运动几何关系

Fig. 1 Three-dimensional relative motion geometric relationship between missile and target

定义 Lyapunov 函数 $\tilde{V} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\tilde{V}(z) = (z_1 \ z_2) P (z_1 \ z_2)^T, \quad z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (9)$$

其中 P 是 Lyapunov 方程 $A^T P + P A = -I$ 的对称正定矩阵解. 由于 A 是 Hurwitz 矩阵, 故 Lyapunov 方程存在唯一的对称正定矩阵解.

定义 $V_\beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$V_\beta(z) = \int_0^\infty \frac{1}{t^{\gamma+1}} (\alpha \circ \tilde{V})(tz_1, t^\beta z_2) dt, \quad (10)$$

其中: “ \circ ” 表示函数的复合, $\gamma > 1$ 是常数, $\alpha(\cdot)$ 是如下定义的连续可微函数:

$$\alpha(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \in (-\infty, 1), \\ \frac{1}{2}(\tau - 1)^2, & \tau \in [1, 2), \\ 1 - \frac{1}{2}(\tau - 3)^2, & \tau \in [2, 3), \\ 1, & \tau \in [3, +\infty), \end{cases} \quad (11)$$

可以证明 $\alpha \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 并且

$$\alpha(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \in (-\infty, 1], \\ 1, & \tau \in [3, +\infty), \end{cases} \quad \alpha'(\tau) > 0, \forall \tau \in (1, 3).$$

非线性自抗扰制导律(7)中的饱和参数 M_i 主要取决于拦截制导所能允许的过载范围, 同时它们分别小于一个和系统初始状态上界有关的常数(13).

令 $\bar{V}_\beta: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \bar{V}_\beta(\nu) = V_\beta(\nu_{11}, \nu_{12}) + V_\beta(\nu_{21}, \nu_{22}), \\ \nu = (\nu_{11}, \nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{22})^T \in \mathbb{R}^4. \end{cases} \quad (12)$$

选取饱和参数 $M_i, i = 1, 2$, 使得

$$M_i \geq \max_{\|\nu\| < R_1} (\alpha_1 |\nu_{i1}| + \alpha_2 |\nu_{i2}| + |f_i(t, \nu)|) + \delta, \quad (13)$$

其中: $\delta = \frac{v_2 - v_1}{4}, v_1 = \max_{\|x(t)\| \leq R_1} \bar{V}_\beta(x(t)), v_2 = \max_{\|x(t)\| \leq R_2} \bar{V}_\beta(x(t)).$

4 主要结果及证明

本节由两小节构成. 在第4.1小节给出本文的主要理论结果. 主要理论结果的证明在第4.2小节给出.

4.1 主要结果

对于导弹目标拦截系统(3), 在制导律(7)的作用下有如下的稳定性收敛性结果.

定理 1 如果假设1成立, 则存在 $\beta^* \in (1/2, 1), \theta^* \in (2/3, 1), \varepsilon^* \in (0, 1)$, 对任意的 $\theta \in (\theta^*, 1), \beta \in (\beta^*, 1), \varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$, 以及 $t \in [T^*, \infty)$, 由系统(3), 扩张状态观测器(6)及制导律(7)构成的闭环系统的解满足

$$\begin{cases} |x_{i1}(t) - \hat{x}_{i1}(t)| \leq \Gamma \varepsilon^{2 + \frac{1}{3\theta - 2}}, \\ |x_{i2}(t) - \hat{x}_{i2}(t)| \leq \Gamma \varepsilon^{1 + \frac{\theta}{3\theta - 2}}, \\ |f_i(\cdot) - \hat{x}_{i3}(t)| \leq \Gamma \varepsilon^{\frac{2\theta - 1}{3\theta - 2}}, \quad i = 1, 2, \\ |x_{i1}(t)| \leq \Gamma_1 \varepsilon^{\frac{2\theta - 1}{3\theta - 2} \cdot \frac{1}{2\beta - 1}}, \\ |x_{i2}(t)| \leq \Gamma_2 \varepsilon^{\frac{2\theta - 1}{3\theta - 2} \cdot \frac{\beta}{2\beta - 1}}, \quad i = 1, 2, \end{cases} \quad (14)$$

其中: $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ 是与 ε 无关的常数; T^* 是与 ε 和初始状态相关的常数.

定理1的严格证明在第4.2小节给出.

4.2 主要结果的证明

首先, 定义如下加权齐次向量场:

$$G_\beta(z) = [z_2 \quad -\alpha_1 [z_1]^{\beta_1} - \alpha_2 [z_2]^{\beta_2}]^T,$$

可以证明向量场是 $d = \beta - 1$ 度加权齐次的.

引理 1^[13] 如果矩阵 $K(8)$ 是 Hurwitz 矩阵, 那么存在一个常数 $\beta^* \in (1/2, 1)$, 使得对任意的 $\beta \in (\beta^*, 1)$ 和 $\gamma > 1$, 有

1) 函数 $V_\beta(z)$ 是正定的和径向无界的;

2) Lyapunov 函数 $V_\beta(\cdot)$ 沿着向量场 $G_\beta(\cdot)$ 的李导数是负定的;

3) $V_\beta, L_{G_\beta} V_\beta, \frac{\partial V_\beta}{\partial z_1}, \frac{\partial V_\beta}{\partial z_2}$ 分别是关于度 $\gamma, \gamma + \beta - 1, \gamma - 1$ 以及 $\gamma - \beta$ 的加权齐次函数, 它们的权数都是 $\{1, \beta\}$.

容易验证 $|z_1|, |z_2|$ 分别是 $1, \beta$ 度关于权数 $\{1, \beta\}$ 的加权齐次函数.

引理 2^[14] 如果 Lyapunov 函数 $V_\beta(\cdot)$ 满足引理1, 那么

$$|z_1| \leq B_1 (V_\beta(z))^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \left| \frac{\partial V_\beta(z)}{\partial z_1} \right| \leq B_3 (V_\beta(z))^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

$$|z_2| \leq B_2 (V_\beta(z))^{\frac{\beta}{\gamma}}, \quad \left| \frac{\partial V_\beta(z)}{\partial z_2} \right| \leq B_4 (V_\beta(z))^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma}},$$

$$L_{G_\beta} V_\beta(z) \leq -B_0 (V_\beta(z))^{\frac{\gamma+\beta-1}{\gamma}},$$

其中: $B_0 > 0, B_i > 1, i = 1, 2, 3, 4$.

接下来由文献[12]可得本文扩张状态观测器的收敛性结果如下.

引理 3^[12] 1) 若假设1-2的条件满足且 $\|x(t)\| \leq N < \frac{\pi}{2}$, 那么存在 $\theta^* \in (1/2, 1), \beta^* \in (2/3, 1), \varepsilon_0 > 0$, 使得对任意的 $\theta \in (\theta^*, 1), \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, 存在一个依赖于 ε 的常数 $T_0 \in (0, T)$, 当 $t \in [T_0, T]$ 时, 有

$$\begin{cases} |x_{i1}(t) - \hat{x}_{i1}(t)| \leq \Gamma \varepsilon^{2 + \frac{1}{3\theta - 2}}, \\ |x_{i2}(t) - \hat{x}_{i2}(t)| \leq \Gamma \varepsilon^{1 + \frac{\theta}{3\theta - 2}}, \\ |f_i(t, x(t)) - \hat{x}_{i3}(t)| \leq \Gamma \varepsilon^{\frac{2\theta - 1}{3\theta - 2}}, \quad i = 1, 2. \end{cases} \quad (15)$$

2) 若假设1-2的条件满足且 $\|x(t)\| \leq N < \frac{\pi}{2}$, 那么存在 $\theta^* \in (1/2, 1), \beta^* \in (2/3, 1), \bar{\varepsilon}_0 > 0$, 使得对任意的 $\theta \in (\theta^*, 1), \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}_0)$, 存在一个依赖于 ε 的常数 $T_0 > 0$, 当 $t \in (T_0, \infty)$ 时, 有

$$\begin{cases} |x_{i1}(t) - \hat{x}_{i1}(t)| \leq \Gamma \varepsilon^{2 + \frac{1}{3\theta - 2}}, \\ |x_{i2}(t) - \hat{x}_{i2}(t)| \leq \Gamma \varepsilon^{1 + \frac{\theta}{3\theta - 2}}, \\ |f_i(t, x(t)) - \hat{x}_{i3}(t)| \leq \Gamma \varepsilon^{\frac{2\theta - 1}{3\theta - 2}}, \quad i = 1, 2. \end{cases} \quad (16)$$

引理 4 对于闭环控制系统(3), 存在 $\beta^* \in (2/3, 1), \theta^* \in (1/2, 1), \varepsilon^* > 0$, 使得对任意的 $\beta \in (\beta^*, 1), \theta \in (\theta^*, 1), \varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$, 都有 $\{x(t) | t \in [0, \infty)\} \subset \mathcal{A}_1$, 其中: $\mathcal{A}_1 = \{\nu | \bar{V}_\beta(\nu) \leq v_1 + 2\delta\}, \delta > 0, v_1$ 由式(17)给出.

证 首先定义两个紧集

$$\mathcal{A}_2 = \{\nu | \bar{V}_\beta(\nu) \leq v_1\}, \quad \mathcal{A}_3 = \{\nu | \bar{V}_\beta(\nu) \leq v_2\}.$$

下面证明 $v_1 < v_2$.

由于 $\bar{V}_\beta(x(t))$ 是连续正定径向无界的函数, 则存

在 \mathcal{K}_∞ 类函数 $\kappa_2 : [0, r) \rightarrow [0, \infty)$ 使得

$$v_1 = \max_{\|x(t)\| \leq R_1} \bar{V}_\beta(x(t)) = \kappa_2(R_1), \quad (17)$$

$$v_2 = \max_{\|x(t)\| \leq R_2} \bar{V}_\beta(x(t)) = \kappa_2(R_2), \quad (18)$$

这里 $R_1 = \|x(0)\|$, $R_2 > R_1$ 为常数. 由于 $R_1 < R_2$, 因此 $v_1 < v_2$.

因为 $|u_i| < M_i$, 所以存在一个常数 $T_{\min} > 0$ 使得对于任意的 $t \in [0, T_{\min}]$ 有 $\bar{V}_\beta(x(t)) < v_1 + \delta$. 结合引理3, 存在 $\epsilon_1^* \in (0, 1)$, 当 $\epsilon \in (0, \epsilon_1^*)$ 时, 有 $T_0 < T_{\min}$. 因此, $\sup_{t \in (0, T_0)} \bar{V}_\beta(x(t)) < v_1 + \delta$.

假设引理4的结论不正确, 在 $v_1 < v_2$ 的条件下, 存在与 ϵ 无关的正数 t_1, t_2 满足 $0 < t_1 < t_2$ 使得

$$\begin{cases} \bar{V}_\beta(x(t_1)) = v_1 + \delta, \bar{V}_\beta(x(t_2)) = v_1 + 2\delta, \\ \bar{V}_\beta(x(t)) \leq v_1 + 2\delta, & t \in [0, t_2], \\ v_1 + \delta \leq \bar{V}_\beta(x(t)) \leq v_1 + 2\delta, & t \in [t_1, t_2]. \end{cases} \quad (19)$$

由于 $v_1 < v_2$, 对于任意的 $t \in [t_1, t_2]$, 有 $\bar{V}_\beta(x(t)) < v_2$. 由于 $\bar{V}_\beta(x(t))$ 是连续正定径向无界的函数, 则存在 \mathcal{K}_∞ 类函数 $\kappa_1 : [0, r) \rightarrow [0, \infty)$ 使得

$$\|x(t)\| \leq N < \frac{\pi}{2}, \quad (20)$$

其中 $N = \kappa_1^{-1}(V_\beta(x(t)))$. 那么由引理3(1)可知, 存在 $\theta^* \in (1/2, 1)$, $\beta^* \in (2/3, 1)$, $\epsilon_1^* > 0$, $t \in [0, t_2]$, 对任意 $\epsilon \in (0, \epsilon_1^*)$, $\beta \in (\beta^*, 1)$, $\theta \in (\theta^*, 1)$, 有

$$|f_i(t, x(t)) - \hat{x}_{i3}(t)| \leq \min\{\sigma, \frac{\delta}{2}\},$$

$$|\alpha_2[x_{i2}(t)]^{\beta_2} - \alpha_2[\hat{x}_{i2}(t)]^{\beta_2}| \leq \min\{\sigma, \frac{\delta}{2}\}, \quad i = 1, 2,$$

这里 $\sigma = \frac{B_0}{4B_4}$, B_0, B_4 是引理2中所定义的常数.

因此, 对任意的 $\epsilon \in (0, \epsilon_1^*)$, $t \in [t_1, t_2]$, 根据式(8)和式(13),

$$\text{sat}_{M_i}(-\alpha_1[x_{i1}(t)]^{\beta_1} - \alpha_2[\hat{x}_{i2}(t)]^{\beta_2} - \hat{x}_{i3}(t)) = -\alpha_1[x_{i1}(t)]^{\beta_1} - \alpha_2[\hat{x}_{i2}(t)]^{\beta_2} - \hat{x}_{i3}(t), \quad i = 1, 2.$$

因此对任意的 $t \in [t_1, t_2]$, 控制闭环系统(3)可以写成

$$\begin{cases} \dot{x}_{11}(t) = x_{12}(t), \\ \dot{x}_{12}(t) = f_1(t, x(t)) - \alpha_1[x_{11}(t)]^{\beta_1} - \alpha_2[\hat{x}_{12}(t)]^{\beta_2} - \hat{x}_{13}(t) - \alpha_2[x_{12}(t)]^{\beta_2} + \alpha_2[\hat{x}_{12}(t)]^{\beta_2}, \\ \dot{x}_{21}(t) = x_{22}(t), \\ \dot{x}_{22}(t) = f_2(t, x(t)) - \alpha_1[x_{21}(t)]^{\beta_1} - \alpha_2[\hat{x}_{22}(t)]^{\beta_2} - \hat{x}_{23}(t) - \alpha_2[x_{22}(t)]^{\beta_2} + \alpha_2[\hat{x}_{22}(t)]^{\beta_2}. \end{cases} \quad (21)$$

计算Lyapunov函数 \bar{V}_β 沿系统(21)的导数可得

$$\frac{d\bar{V}_\beta(x(t))}{dt} \Big|_{(21)} \leq -B_0(\bar{V}_\beta(x(t)))^{\frac{\gamma+\beta-1}{\gamma}} + 4\sigma B_4(\bar{V}_\beta(x(t)))^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma}}.$$

当 $\beta \in (\beta^*, 1)$ 时, $\frac{\gamma + \beta - 1}{\gamma} \geq \frac{\gamma - \beta}{\gamma}$, 从而

$$\frac{d\bar{V}_\beta(x(t))}{dt} \leq -(B_0 - 4\sigma B_4)(\bar{V}_\beta(x(t)))^{\frac{\gamma+\beta-1}{\gamma}} < 0.$$

这说明当 $t \in [t_1, t_2]$ 时, $\bar{V}_\beta(x(t))$ 随着 t 的增加而减少, 与式(19)矛盾, 因此引理4得证. 证毕.

最后, 利用引理3和引理4来证明定理1.

证 根据引理4, 存在 $\theta^* \in (1/2, 1)$, $\beta^* \in (2/3, 1)$, $\epsilon_1^* \in (0, 1)$, 对任意 $\theta \in [\theta^*, 1)$, $\beta \in [\beta^*, 1)$, $\epsilon \in (0, \epsilon_1^*)$, 有 $\{x(t) | t \in [0, \infty)\} \subset \mathcal{A}_1$.

由引理4可知, 存在 $\theta^* \in (1/2, 1)$, $\beta^* \in (2/3, 1)$, $0 < \epsilon_2^* < \epsilon_1^*$, 对任意的 $\theta \in (\theta^*, 1)$, $\beta \in (\beta^*, 1)$, $\epsilon^* \in (0, \epsilon_2^*)$, $t \in [T_1, \infty)$, 有

$$|x_{i2}(t) - \hat{x}_{i2}(t)| \leq \Gamma \epsilon^{1 + \frac{\theta}{3\theta-2}},$$

$$|f_i(t, x(t)) - \hat{x}_{i3}(t)| \leq \min\{\frac{\delta}{2}, \Gamma \epsilon^{\frac{2\theta-1}{3\theta-2}}\}, \quad i = 1, 2.$$

类似于式(21)的证明, 当 $t \in [T_1, \infty)$ 时, 有

$$\begin{cases} \dot{x}_{11}(t) = x_{12}(t), \\ \dot{x}_{12}(t) = f_1(t, x(t)) - \alpha_1[x_{11}(t)]^{\beta_1} - \alpha_2[\hat{x}_{12}(t)]^{\beta_2} - \hat{x}_{13}(t) - \alpha_2[x_{12}(t)]^{\beta_2} + \alpha_2[\hat{x}_{12}(t)]^{\beta_2}, \\ \dot{x}_{21}(t) = x_{22}(t), \\ \dot{x}_{22}(t) = f_2(t, x(t)) - \alpha_1[x_{21}(t)]^{\beta_1} - \alpha_2[\hat{x}_{22}(t)]^{\beta_2} - \hat{x}_{23}(t) - \alpha_2[x_{22}(t)]^{\beta_2} + \alpha_2[\hat{x}_{22}(t)]^{\beta_2}. \end{cases} \quad (22)$$

计算Lyapunov函数 $V_\beta(x_{11}(t), x_{12}(t))$ 沿系统(22)的导数可得

$$\frac{dV_\beta(x_{11}(t), x_{12}(t))}{dt} \Big|_{(22)} \leq -B_0(V_\beta(x_{11}(t), x_{12}(t)))^{\frac{\gamma+\beta-1}{\gamma}} + B_4(\Gamma + \alpha_2\Gamma^{\beta_2})\epsilon^{\frac{2\theta-1}{3\theta-2}}(V_\beta(x_{11}(t), x_{12}(t)))^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma}},$$

当 $V_\beta(x_{11}(t), x_{12}(t)) > (\frac{B_4(\Gamma + \alpha_2\Gamma^{\beta_2})\epsilon^{\frac{2\theta-1}{3\theta-2}}}{B_0})^{\frac{\gamma}{2\beta-1}}$ 时,

$$\frac{dV_\beta(x_{11}(t), x_{12}(t))}{dt} \Big|_{(22)} < 0, \text{ 亦即, 当}$$

$$V_\beta(x_{11}(t), x_{12}(t)) > (\frac{B_4(\Gamma + \alpha_2\Gamma^{\beta_2})\epsilon^{\frac{2\theta-1}{3\theta-2}}}{B_0})^{\frac{\gamma}{2\beta-1}}$$

时, $V_\beta(x_{11}(t), x_{12}(t))$ 随着时间 t 的增大而严格单调递减. 因此, 存在 $t_1^* > 0$, 使得对任意的 $t > t_1^*$, 有

$$V_\beta(x_{11}(t), x_{12}(t)) \leq (\frac{B_4(\Gamma + \alpha_2\Gamma^{\beta_2})\epsilon^{\frac{2\theta-1}{3\theta-2}}}{B_0})^{\frac{\gamma}{2\beta-1}}.$$

结合引理2可得

$$|x_{11}(t)| \leq \Gamma_1 \epsilon^{\frac{2\theta-1}{3\theta-2} \cdot \frac{1}{2\beta-1}}, \quad |x_{12}(t)| \leq \Gamma_2 \epsilon^{\frac{2\theta-1}{3\theta-2} \cdot \frac{\beta}{2\beta-1}},$$

同理

$$|x_{21}(t)| \leq \Gamma_1 \epsilon^{\frac{2\theta-1}{3\theta-2} \cdot \frac{1}{2\beta-1}}, \quad |x_{22}(t)| \leq \Gamma_2 \epsilon^{\frac{2\theta-1}{3\theta-2} \cdot \frac{\beta}{2\beta-1}},$$

其中: Γ_1, Γ_2 是与 ε 无关的常数,

$$\Gamma_1 = B_1 B_4 \left(\frac{\Gamma + \alpha_2 \Gamma^{\beta_2}}{B_0} \right)^{\frac{1}{2\beta-1}},$$

$$\Gamma_2 = B_2 B_4 \left(\frac{\Gamma + \alpha_2 \Gamma^{\beta_2}}{B_0} \right)^{\frac{\beta}{2\beta-1}}.$$

证毕.

5 数值仿真

为了验证所设计的基于非线性扩张状态观测器的自抗扰制导律的优越性, 与线性自抗扰制导方法^[8, 15]进行仿真对比. 线性自抗扰制导律设计如下:

$$\begin{cases} \dot{z}_{i1} = z_{i2} - \beta_{i1}^*(z_{i1} - x_{i1}), \\ \dot{z}_{i2} = z_{i3} - \beta_{i2}^*(z_{i1} - x_{i1}) + u_i^*, \\ \dot{z}_{i3} = -\beta_{i3}^*(z_{i1} - x_{i1}), \quad i = 1, 2, \end{cases} \quad (23)$$

$$u_i^* = \text{sat}_{M_i}(-k_1 x_{i1} - k_2 z_{i2} - z_{i3}). \quad (24)$$

这里利用饱和函数对导弹过载进行限幅, 饱和函数参数选取为 $M_1 = 0.015, M_2 = 0.015$.

线性自抗扰制导方法其余参数选取如表1所示, 第1组参数与文献[8]中参数选取相同, 由于仿真结果不够理想, 所以根据文献[15]给出了第2组参数, 线性扩张状态观测器中第2组参数选取为 $\beta_{i1}^* = 3\frac{1}{\varepsilon}, \beta_{i2}^* = 3\frac{1}{\varepsilon^2}, \beta_{i3}^* = \frac{1}{\varepsilon^3}, \varepsilon = 0.01$.

表 1 线性自抗扰控制方法参数选取

Table 1 Parameter selection of linear active disturbance rejection control

参数	第1组参数	第2组参数
k_1	0.01	0.01
k_2	0.2	10
β_{i1}^*	90	300
β_{i2}^*	2700	30000
β_{i3}^*	27000	1000000

本文所提出的非线性自抗扰制导律(7)中 $\beta = 0.8, \alpha_1 = 0.01, \alpha_2 = 10, \alpha_1, \alpha_2$ 与第2组线性自抗扰制导律中 k_1, k_2 相同, 非线性扩张状态观测器(6)中 $\theta = 0.9, \varepsilon = 0.01$ (与线性扩张状态观测器第2组参数中的 ε 相同).

系统初始状态值根据文献[16]选取, 如表2所示.

针对以上两种方法采用欧拉折线法进行仿真, 积分步长 h 为0.001. 设导弹最大可用过载为30 g, 目标进行 $a_y^E = 5g \sin(\frac{\pi}{6}t), a_z^E = 5g \sin(\frac{\pi}{6}t), g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 的正弦机动.

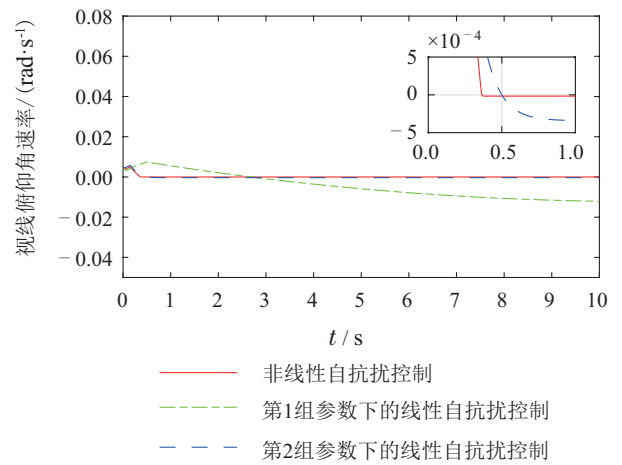
由图2可以看出, 目标正弦机动时, 第1组参数下的线性自抗扰制导方法收敛效果不好, 参考文献[15]将参数进行了调整, 然后与非线性自抗扰制导方法进行比较. 图2显示两种方法都可以使视线角速率快速

收敛到0, 但是非线性自抗扰制导方法的收敛速度更快, 收敛精度更高.

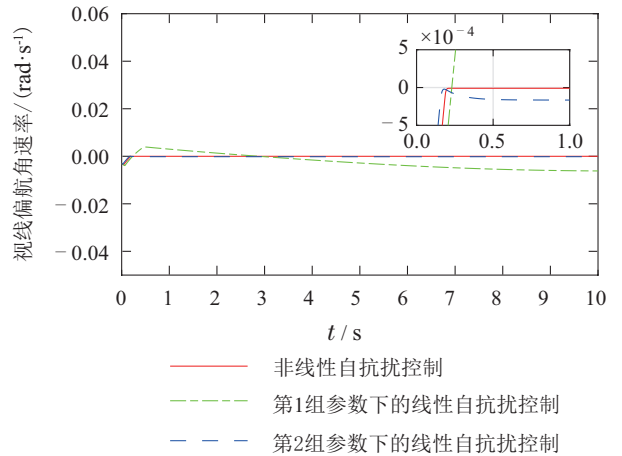
表 2 弹目视线初始状态值

Table 2 Initial state value of line of sight

参数	状态值
q_v/rad	0.349
q_h/rad	0.1745
$\dot{q}_v/(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$	0.005
$\dot{q}_h/(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$	-0.0031
r/m	20000
$\dot{r}/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	-4000



(a) 视线俯仰角速率曲线



(b) 视线偏航角速率曲线

图 2 视线角速率曲线

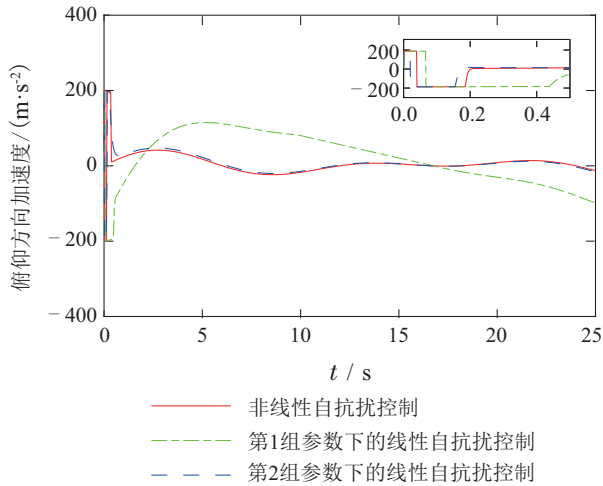
Fig. 2 Line-of-sight angular rate curves

由图3可以看出, 采用非线性自抗扰制导方法和第2组参数下的线性自抗扰制导方法后, 导弹充分利用最大可用过载使视线角速率线迅速收敛到0, 之后加速度保持稳定, 在导弹末端没有出现大的变化, 符合导弹拦截实际需求.

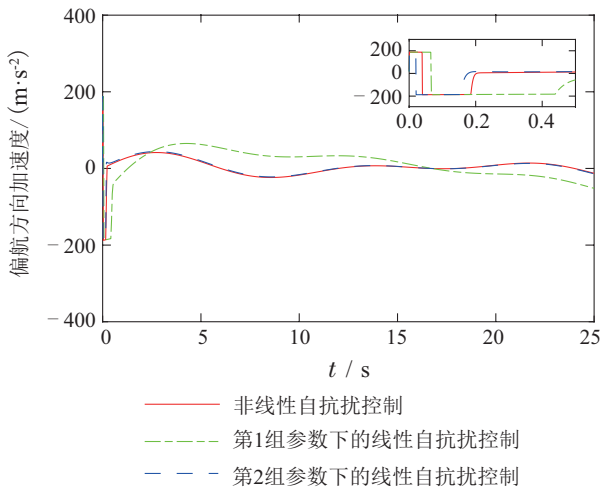
6 结论

本文针对末制导段中导弹对目标的拦截问题, 在

不进行通道解耦的基础上设计了基于WHF-ESO的非线性三维自抗扰制导律,将目标机动加速度、非线性耦合项及其他不确定性因素作为总扰动在扩张状态观测器中进行观测并在反馈控制中进行补偿.在相同的增益参数下,本文所设计的WHF-ESO的观测精度要高于LESO和fal-ESO,有效的提高了制导精度.本文严格的证明了闭环系统的稳定性和收敛性,并给出了系统状态的具体的界.数值对比仿真也验证了本文所提出的制导方法的有效性和优越性.



(a) 俯仰方向加速度曲线



(b) 偏航方向加速度曲线

图3 导弹加速度曲线

Fig. 3 Missile acceleration curves

参考文献:

- [1] LI Younian, JIANG Yun, LI Shihua, et al. Three-dimensional guidance laws for missile based on finite-time control method. *Aero Weapon*, 2016, (3): 26 – 29. (李友年, 江云, 李世华, 等. 基于有限时间控制方法的三维空间导弹制导律设计. *航空兵器*, 2016, (3): 26 – 29.)
- [2] ZHANG Gang, WANG Yunming. The research of guidance model based on the extended proportional guidance law. *Fire Control & Command Control*, 2016, 41 (2): 82 – 84. (张刚, 王运明. 基于扩展比例制导律的制导模型. *火力与指挥控制*, 2016, 41(2): 82 – 84.)
- [3] WANG Dong, MA Qinghua, CHEN Yun, et al. Adrc guidance law based on dynamic characteristics of seeker and autopilot. *Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance*, 2018, 38(5): 102 – 106. (王冬, 马清华, 陈韵, 等. 考虑导引头和驾驶仪动态特性的自抗扰制导律. *弹箭与制导学报*, 2018, 38(5): 102 – 106.)
- [4] DINH H T, TRUING D K, NGUYEN T H, et al. Active disturbance rejection control design for integrated guidance and control missile based smc and extended state observer. *International Conference on System Science and Engineering*. Ho Chi Minh City, Vietnam: IEEE, 2017: 476 – 481.
- [5] SHAO X L, WANG H L. Back-stepping active disturbance rejection control design for integrated missile guidance and control system via reduced-order eso. *ISA Transactions*, 2015, 57(4): 10 – 22.
- [6] LIAO Fei, WANG Xiaolei, JI Haibo, et al. Three-dimensional nonlinear adaptive fault-tolerant guidance law design. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(6): 751 – 760. (廖飞, 王小蕾, 季海波, 等. 三维非线性自适应容错制导律设计. *控制理论与应用*, 2018, 35(6): 751 – 760.)
- [7] ZHONG Z, ZHAO E, ZHENG X, et al. An extended state observer based guidance method for maneuvering target interception. *The 39th Chinese Control Conference*. Shenyang, China: IEEE, 2020: 3310 – 3315.
- [8] GU Kai, JIN Yue, LIU Xinyu. Design of active disturbance rejection guidance law for attacking maneuvering target with strap-down seeker. *Aerospace Control*, 2020, 38(2): 38 – 43. (顾凯, 金岳, 刘新宇. 利用捷联导引头打击机动目标的自抗扰制导律设计. *航天控制*, 2020, 38(2): 38 – 43.)
- [9] LEI Humin, WANG Huaji, ZHOU Jin, et al. Three-dimensional dynamic surface guidance law based on extended state observer. *Systems Engineering and Electronics*, 2017, 39(1): 138 – 146. (雷虎民, 王华吉, 周颀, 等. 基于扩张观测器的三维动态面制导律. *系统工程与电子技术*, 2017, 39(1): 138 – 146.)
- [10] HAN J Q. From PID to active disturbance rejection control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, 56(3): 900 – 906.
- [11] GUO Yang, WANG Shicheng. *Finite-time-theory-based Maneuvering Penetration Methods of Aircrafts*. Beijing: Science Press, 2018. (郭杨, 王仕成. 基于有限时间理论的飞行器机动突防方法. 北京: 科学出版社, 2018.)
- [12] GUO B Z, ZHAO Z L. On convergence of non-linear extend state observer for multi-input multi-output systems with uncertainty. *IET Control Theory and Applications*, 2012, 6(15): 2375 – 2386.
- [13] ZHAO Z L, JIANG Z P. Finite-time output feedback stabilization of lower-triangular nonlinear systems. *Automatica*, 2018, 96: 259 – 269.
- [14] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Math Control Signals Systems*, 2005, 17: 101 – 127.
- [15] GAO Z Q. Scaling and bandwidth-parameterization based controller tuning. *Proceedings of the American Control Conference*. Denver, USA: IEEE, 2003: 4989 – 4996.
- [16] WANG Huaji, JIAN Jinlei, LEI Humin, et al. A new sliding mode guidance law based on extended state observer. *Journal of Solid Rocket Technology*, 2015, 38(5): 622 – 627. (王华吉, 简金蕾, 雷虎民, 等. 带扩张观测器的新型滑模制导律. *固体火箭技术*, 2015, 38(5): 622 – 627.)

作者简介:

马鹏娟 硕士研究生, 目前研究方向为非线性系统控制, E-mail: 839908617@qq.com;

赵志良 教授, 目前研究方向为非线性系统控制、有限时间控制、自抗扰控制, E-mail: zhiliangzhao@snnu.edu.cn;

陈森 讲师, 目前研究方向为不确定非线性系统控制, E-mail: senchen@snnu.edu.cn;

郭杨 副教授, 目前研究方向为导弹拦截制导, E-mail: guoyang820@foxmail.com.