

# 输入饱和的航天器特征点间相对位姿 全状态预设性能固定时间控制

孙亮<sup>†</sup>, 王俊

(北京科技大学 自动化学院 工业过程知识自动化教育部重点实验室, 北京 100083; 北京科技大学 人工智能研究院, 北京 100083)

**摘要:** 本文研究系统全状态、控制输入及响应时间受约束的航天器特征点间相对位姿跟踪控制问题, 提出了一种基于非奇异终端滑模的输入饱和全状态约束固定时间控制器. 首先, 通过引入预设性能函数, 控制器可以保证系统的瞬态和稳态性能达到全状态约束要求. 其次, 考虑到控制输入饱和约束和时间受限问题, 提出了一种固定时间非线性饱和补偿器实时处理执行器的饱和效应, 并且保证补偿器的状态在固定时间内收敛. 同时, 所提出的自适应律可以抑制外部干扰并保证在线估计参数的有界性. 最后, 基于李亚普诺夫稳定性理论证明了闭环系统的固定时间稳定性. 通过航天器近距离逼近操作的仿真算例, 验证了该方法的有效性.

**关键词:** 航天器控制; 相对位姿控制; 固定时间控制; 饱和控制; 预设性能

**引用格式:** 孙亮, 王俊. 输入饱和的航天器特征点间的相对位姿全状态预设性能固定时间控制. 控制理论与应用, 2023, 40(4): 724 – 734

DOI: 10.7641/CTA.2021.10311

## Full-state prescribed performance-based fixed-time relative pose control for feature points of two spacecraft with input saturation

SUN Liang<sup>†</sup>, WANG Jun

(Key Laboratory of Knowledge Automation for Industrial Processes of Ministry of Education,  
School of Automation and Electrical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China;  
Institute of Artificial Intelligence, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

**Abstract:** The relative pose tracking control problem for feature points of spacecraft with constraints of full states, control inputs and response time is investigated. A full-state constrained saturated fixed-time controller is proposed based on a nonsingular terminal sliding mode. Firstly, the controller can ensure that the transient and steady state performance of the system meets the full-state constraint requirements by introducing prescribed performance function. Secondly, considering the input saturation of the systems and time constraints, a fixed-time nonlinear saturation compensator is proposed to compensate the saturation effect of the actuators, and the compensator state is guaranteed to converge in a fixed time. At the same time, the proposed adaptive law can suppress the external disturbances and ensure the boundedness of the online estimations. Finally, the fixed-time convergence of the closed-loop system states is proved based on the Lyapunov stability theory. The effectiveness of the method is verified by a numerical example of a spacecraft close-range proximity operation.

**Key words:** spacecraft control; relative pose control; fixed-time control; saturated control; prescribed performance

**Citation:** SUN Liang, WANG Jun. Full-state prescribed performance-based fixed-time relative pose control for feature points of two spacecraft with input saturation. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(4): 724 – 734

## 1 引言

空间飞行器相对位姿控制在许多复杂任务中非常重要, 特别是在临近操作中, 如航天器交会对接<sup>[1]</sup>、在轨维护<sup>[2]</sup>和飞机空中加油<sup>[3]</sup>. 关于航天器的位置跟踪和姿态稳定控制的代表性成果有很多, 如反馈线性化控制、有限时间控制等. 然而, 这些控制方法是在不考

虑特征点与质心偏差影响的情况下实现位姿跟踪控制. 但是在实际应用中, 两个航天器的相对位姿控制任务主要是在其特征点之间进行. 因此, 对两航天器特征点之间的相对运动进行建模和控制具有重要意义. 此外, 由于航天器环境的复杂性和任务需求的多样性, 航天器控制系统受到各种外部干扰和自身约束.

收稿日期: 2021-04-15; 录用日期: 2021-10-09.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: liangsun@ustb.edu.cn.

本文责任编辑: 王大轶.

国家自然科学基金项目(61903025)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61903025).

因此, 需要研究先进的位置跟踪和姿态同步控制策略, 以确保系统能够满足控制要求, 并处理系统多约束控制的问题。

与传统控制方法相比, 有限时间控制<sup>[4]</sup>能使系统状态在有限时间内收敛, 具有收敛速度快、控制精度高、鲁棒性强等优点, 因此已被广泛用于航天器控制<sup>[4-6]</sup>。文献[7]通过引入具有有限时间收敛特性的积分式滑模面, 设计了满足多约束的有限时间容错姿态跟踪控制器, 然而由于虚拟控制律指数项的作用, 其时间导数可能会出现计算奇异问题。文献[8]在系统模型完全已知的情况下, 提出一种有限时间反步控制方法实现系统状态的有限时间控制。然而, 有限时间控制中的状态收敛时间上界依赖系统初始状态, 使其在实际应用中受到限制。

固定时间控制方法<sup>[9]</sup>是作为一种特殊的有限时间控制方法提出的。固定时间控制的优点是系统从任意初始状态收敛到平衡点所用的时间是有界的, 并且上界与系统的初始状态无关。目前该控制方法在航天器交会系统中得到广泛应用<sup>[10-11]</sup>。文献[12]针对航天器交会对接中存在的外部干扰和运动耦合问题, 提出了一种固定时间非奇异终端滑模控制方法, 主要通过引入连续正弦函数解决终端滑模控制的奇异问题。文献[13]针对二阶非线性系统提出了一种固定时间收敛的终端滑模控制, 并应用于多智能体协同控制, 但是该方法在系统状态某些区域存在奇异性问题。文献[14]提出了一种固定时间非奇异终端滑模方法, 通过引入饱和函数避免奇异性问题, 但未考虑外部干扰对控制性能的影响。文献[15]提出一种改进的滑模面, 将终端滑模面与传统滑模面相结合, 通过在两个滑模面上的切换, 不仅可以保证系统在固定时间的收敛性, 还避免了计算的奇异性。

在复杂的空间任务中, 航天器不仅要考虑系统的高精度稳态性能, 还要保证有界的瞬态性能提高系统的安全性。针对这一问题, 文献[16]提出了预设性能控制技术, 该技术通过误差变换, 保证同时兼顾系统的瞬态和稳态性能。文献[17]针对空间非合作目标接近与跟踪问题, 提出了一种不依赖于惯性参数的鲁棒预设性能控制方法, 能保证姿态和角速度跟踪误差的瞬态性能和稳态性能均满足预定范围。文献[18]结合鲁棒积分技术和预设性能控制方法, 提出了一种自适应神经网络渐近跟踪控制算法, 但是该算法要求被控系统满足特定的限制条件。文献[19]针对机械臂运动控制, 提出了基于预设性能的终端滑模有限时间控制器, 在保证系统状态有限时间收敛的同时使系统的滑模面响应具有期望的动态过程, 从而约束了系统的位置和速度误差。

在实际控制系统中, 执行器饱和是常见的现象。饱和现象的存在会严重影响控制系统的稳定性。考虑输

入饱和问题, 文献[20]提出了一种参数李雅普诺夫微分方程方法, 用于设计任意椭圆轨道上航天器与目标航天器交会问题的线性周期控制器。文献[21]针对一类具有位置扰动的不确定非线性系统, 提出了一种利用双曲正切函数逼近输入饱和的动态面控制方案。文献[22]针对航天器存在的输入饱和与执行器故障情况, 提出了一种基于反馈线性化的控制策略, 利用二阶扰动观测器对系统的不确定性进行估计补偿。文献[23]针对具有外部扰动和执行器约束的航天器, 提出了一种新的抗扰动位移和旋转逆最优控制方案, 其中最优控制律能使给定的代价函数最小, 保证系统的稳定性。文献[24]研究了具有干扰和输入饱和的航天器交会问题, 使用了基于死区算子的模型描述饱和和非线性。

本文研究了具有全状态约束、执行器饱和和状态固定时间收敛要求的两航天器特征点间相对运动控制问题。本文的主要贡献如下: 首先, 针对航天器在执行器饱和、全状态约束以及时间受限的情况下, 综合饱和补偿器、预设性能函数和非奇异终端滑模理论, 提出了一种基于非奇异终端滑模的输入饱和全状态约束固定时间控制器, 该控制器保证闭环系统的瞬态和稳态性能始终在预先设定的区域内。其次, 利用李雅普诺夫稳定性理论证明了闭环系统固定时间稳定性, 并通过与不考虑全状态约束的非奇异滑模输入饱和的固定时间控制器的仿真结果进行对比, 表明所设计控制器的优越性能。此外, 在存在未知外部干扰的情况下, 提出的自适应律可以补偿外部干扰并保证在线估计参数的有界性。

## 2 问题描述

将航天器相对运动场景中所涉及的两个航天器分别定义为目标航天器和追踪航天器。如图1所示, 分别定义3个坐标系和相关向量, 其中 $\mathcal{F}_o = \{Ox_i y_i z_i\}$ 是惯性坐标系;  $\mathcal{F}_t = \{Px_i y_t z_t\}$ 是目标器的本体坐标系, 原点位于特征点 $P$ ;  $\mathcal{F}_c = \{Qx y z\}$ 是追踪器的本体坐标系, 点 $Q$ 位于追踪器的特征点。 $C$ 点和 $T$ 点分别是追踪器和目标器的质心。另外,  $P$ 和 $Q$ 也可以位于特征点延长线的任何位置。

在追踪器的本体固定坐标系中表示的特征点位姿运动学方程<sup>[25]</sup>为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{B}\mathbf{q}, \\ \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{u} + \mathbf{d}, \end{cases} \quad (1)$$

式中:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= [\mathbf{r}^T \ \boldsymbol{\sigma}^T]^T, \quad \mathbf{q} = [\mathbf{v}^T \ \boldsymbol{\omega}^T]^T, \\ \mathbf{A} &= \text{diag}\{-S(\boldsymbol{\omega}), \mathbf{O}_3\}, \quad \mathbf{B} = \text{diag}\{I_3, G(\boldsymbol{\sigma})\}, \\ G(\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{1}{4}[(1 - \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma})I_3 + 2S(\boldsymbol{\sigma}) + 2\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^T], \end{aligned}$$

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} mI_3 & -mS(l) \\ mS(l) & J - mS^2(l) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} mS(\omega) & -mS(\omega)S(l) \\ mS(l)S(\omega) & S(\omega)J - mS(\omega)S^2(l) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = [\mathbf{f}^T \ \boldsymbol{\tau}^T]^T, \quad \mathbf{d} = [\mathbf{w}^T \ \boldsymbol{\delta}^T]^T.$$

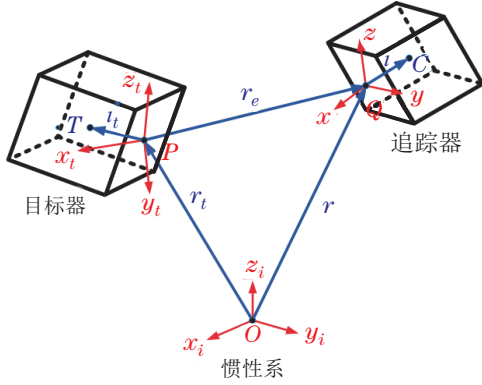


图1 对接点之间相对位姿运动的场景

Fig. 1 Scenario of relative pose motion between docking ports

在目标器坐标系中描述了非受控目标的特征点位姿运动学和动力学方程<sup>[25]</sup>

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}_t = \mathbf{A}_t \mathbf{p}_t + \mathbf{B}_t \mathbf{q}_t, \\ \mathcal{M}_t \dot{\mathbf{q}}_t + \mathcal{C}_t \mathbf{q}_t = \mathbf{d}_t, \end{cases} \quad (2)$$

式中:

$$\mathbf{p}_t = [\mathbf{r}_t^T \ \boldsymbol{\sigma}_t^T]^T, \quad \mathbf{q}_t = [\mathbf{v}_t^T \ \boldsymbol{\omega}_t^T]^T,$$

$$\mathbf{A}_t = \text{diag}\{-S(\boldsymbol{\omega}_t), O_3\}, \quad \mathbf{B}_t = \text{diag}\{I_3, G(\boldsymbol{\sigma}_t)\},$$

$$\mathcal{M}_t = \begin{bmatrix} m_t I_3 & -m_t S(l_t) \\ m_t S(l_t) & J_t - m_t S^2(l_t) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{C}_t = \begin{bmatrix} m_t S(\boldsymbol{\omega}_t) & -m_t S(\boldsymbol{\omega}_t)S(l_t) \\ m_t S(l_t)S(\boldsymbol{\omega}_t) & S(\boldsymbol{\omega}_t)J_t - m_t S(\boldsymbol{\omega}_t)S^2(l_t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d}_t = [\mathbf{w}_t^T \ \boldsymbol{\delta}_t^T]^T.$$

坐标系 $\mathcal{F}_c$  (追踪器的本体固定坐标系)中两个航天器特征点之间的相对姿态和速度可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_e = \mathbf{r} - R\mathbf{r}_t, \\ \boldsymbol{\sigma}_e = \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma}_t^{-1}, \\ \mathbf{v}_e = \mathbf{v} - R\mathbf{v}_t, \\ \boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{\omega} - R\boldsymbol{\omega}_t, \end{cases} \quad (3)$$

式中:

$$\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma}_t^{-1} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_t(\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma} - 1) + \boldsymbol{\sigma}(1 - \boldsymbol{\sigma}_t^T \boldsymbol{\sigma}_t) - 2S(\boldsymbol{\sigma}_t)\boldsymbol{\sigma}}{1 + \boldsymbol{\sigma}_t^T \boldsymbol{\sigma}_t \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma} + 2\boldsymbol{\sigma}_t^T \boldsymbol{\sigma}},$$

$$R = I_3 - \frac{4(1 - \boldsymbol{\sigma}_e^T \boldsymbol{\sigma}_e)}{(1 + \boldsymbol{\sigma}_e^T \boldsymbol{\sigma}_e)^2} S(\boldsymbol{\sigma}_e) + \frac{8}{(1 + \boldsymbol{\sigma}_e^T \boldsymbol{\sigma}_e)^2} S^2(\boldsymbol{\sigma}_e).$$

进一步, 基于 $\dot{R} = -S(\boldsymbol{\omega}_e)R$ , 求相对姿态和速度

的时间导数, 得到在坐标系 $\mathcal{F}_c$ 上表示的相对运动学和相对动力学

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{p}_e + \mathbf{B}_e \mathbf{q}_e, \\ \mathcal{M}_e \dot{\mathbf{q}}_e + \mathcal{C}_e \mathbf{q}_e + \mathbf{g}_e = \mathbf{u} + \mathbf{d}_e, \end{cases} \quad (4)$$

式中:

$$\mathbf{p}_e = [\mathbf{r}_e^T \ \boldsymbol{\sigma}_e^T]^T, \quad \mathbf{q}_e = [\mathbf{v}_e^T \ \boldsymbol{\omega}_e^T]^T,$$

$$\mathbf{A}_e = \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}_e = \text{diag}\{I_3, G(\boldsymbol{\sigma}_e)\}, \quad \mathcal{M}_e = \mathcal{M},$$

$$\mathcal{C}_e = \mathcal{C}, \quad \mathbf{g}_e = (\mathcal{M}S_e + \mathcal{C})(\mathbf{q} - \mathbf{q}_e),$$

$$\mathbf{d}_e = \mathbf{d} + \mathcal{M}\mathcal{R}_e\mathcal{M}_t^{-1}[\mathcal{C}_t\mathcal{R}_e^T(\mathbf{q} - \mathbf{q}_e) - \mathbf{d}_t],$$

$$S_e = \text{diag}\{S(\boldsymbol{\omega}_e), S(\boldsymbol{\omega}_e)\}, \quad \mathcal{R}_e = \text{diag}\{R, R\}.$$

**注1** 矩阵 $\mathcal{M}_e$ 是正定的对称常值矩阵, 即 $\dot{\mathcal{M}}_e = O_6$ 和 $\mathcal{M}_e = \mathcal{M}_e^T > 0$ . 同时, 矩阵 $\mathcal{C}_e$ 是斜对称的, 因此 $\mathcal{C}_e = -\mathcal{C}_e^T$ .

**注2** 式(4)中 $\mathbf{B}_e = \text{diag}\{I_3, G(\boldsymbol{\sigma}_e)\}$ , 其中,  $G(\boldsymbol{\sigma}_e) = \frac{1}{4}[(1 - \boldsymbol{\sigma}_e^T \boldsymbol{\sigma}_e)I_3 + 2S(\boldsymbol{\sigma}_e) + 2\boldsymbol{\sigma}_e \boldsymbol{\sigma}_e^T]$ , 由此可知,  $\mathbf{B}_e$ 是非奇异的. 因此,  $\mathbf{p}_e = \mathbf{q}_e = 0$ 等价于 $\mathbf{p}_e = \dot{\mathbf{p}}_e = 0$ .

考虑控制输入 $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_6]^T$ 受到以下非对称约束:

$$-u_{i_{\min}} \leq u_i \leq u_{i_{\max}}, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (5)$$

其中 $u_{i_{\min}}$ 和 $u_{i_{\max}}$ 是已知的输入饱和约束的下限和上限. 因此, 控制输入 $u_i$ 被定义为

$$u_i = \begin{cases} u_{i_{\max}}, & u_{i_0} > u_{i_{\max}}, \\ u_{i_0}, & -u_{i_{\min}} \leq u_{i_0} \leq u_{i_{\max}}, \\ -u_{i_{\min}}, & u_{i_0} < -u_{i_{\min}}, \end{cases} \quad (6)$$

式中 $\mathbf{u}_0 = [u_{1_0} \ u_{2_0} \ \dots \ u_{6_0}]^T$ 是待设计的控制输入命令.

**假设1**  $m$ 和 $J$ 是常值且已知. 追踪航天器特征点位置矢量 $l$ 是已知的, 目标航天器特征点位置矢量 $l_t$ 未知但有界. 外部扰动 $\mathbf{d}$ 和 $\mathbf{d}_t$ 是未知的且满足 $\|\mathbf{d}\| \leq \bar{d}$ 和 $\|\mathbf{d}_t\| \leq \bar{d}_t$ , 其中 $\bar{d}$ 和 $\bar{d}_t$ 是未知常值.

**假设2** 追踪器可以通过安装在其上的高性能测量装置和设备实时精确地获得其自身运动信息 $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ 和相对运动信息 $\{\mathbf{p}_e, \mathbf{q}_e\}$ .

**假设3** 本文所研究的场景是太空航天器在自身传感器探测范围内相对于目标航天器的运动, 且航天器间相对运动状态都是连续变化的, 即在空间操作中, 航天器因特定任务的需要, 与目标航天器维持比较近的相对距离以及特定的相对姿态, 以备后续航天器间自主对接或绕飞等操作.

本文目标是针对系统(4)在假设1-2下, 提出一种饱和控制输入 $\mathbf{u}$ 实现两个航天器特征点间的精确相对位置跟踪和姿态同步, 并且在固定时间内相对运动状态 $\mathbf{p}_e(t)$ 和 $\mathbf{q}_e(t)$ 收敛到原点小邻域内.

### 3 控制器设计与稳定性分析

#### 3.1 非线性模型变换

考虑相对运动状态  $\mathbf{p}_e = [p_{e1} \ p_{e2} \ \cdots \ p_{e6}]^T$  和  $\mathbf{q}_e = [q_{e1} \ q_{e2} \ \cdots \ q_{e6}]^T$  服从以下的性能约束:

$$\begin{cases} -\bar{p}_{ek}(t) < p_{ek}(t) < \bar{p}_{ek}(t), \\ -\bar{q}_{ek}(t) < q_{ek}(t) < \bar{q}_{ek}(t), \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, 6, \quad (7)$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{p}_{ek}(t) &= (\bar{p}_{ek,0} - \bar{p}_{ek,\infty})e^{-\kappa_k t} + \bar{p}_{ek,\infty}, \\ \bar{q}_{ek}(t) &= (\bar{q}_{ek,0} - \bar{q}_{ek,\infty})e^{-\lambda_k t} + \bar{q}_{ek,\infty}, \quad \bar{p}_{ek,0} > 0, \\ \bar{p}_{ek,\infty} &> 0, \quad \bar{q}_{ek,0} > 0, \quad \bar{q}_{ek,\infty} > 0, \quad \kappa_k > 0, \quad \lambda_k > 0. \end{aligned}$$

式(7)中的常数决定了受控系统的瞬态和稳态响应性能, 因此设计者可以根据任务需求指定所需要的响应性能. 并且在假设3下, 可以得到状态是有界的, 进而保证控制器有界, 因此通过预设性能控制能够实现系统状态不超出预设边界.

进一步, 定义状态变换<sup>[16]</sup>

$$\begin{cases} x_{ek}(t) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\bar{p}_{ek} + 1}{1 - \bar{p}_{ek}}\right), \\ y_{ek}(t) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\bar{q}_{ek} + 1}{1 - \bar{q}_{ek}}\right), \end{cases} \quad (8)$$

其中:  $\mathbf{x}_e = [x_{e1} \ x_{e2} \ \cdots \ x_{e6}]^T$  和  $\mathbf{y}_e = [y_{e1} \ y_{e2} \ \cdots \ y_{e6}]^T$  是  $\mathbf{p}_e$  和  $\mathbf{q}_e$  的变换向量, 并且这种变换可以保证变换前后系统状态具有相同单调性. 只要变换后的系统是稳定的, 则基于这种变换即可保证原始系统的预设性能. 对式(8)求时间导数可得

$$\begin{cases} \dot{x}_{ek}(t) = \frac{1}{2\bar{p}_{ek}} \left( \frac{1}{\bar{p}_{ek} + 1} - \frac{1}{\bar{p}_{ek} - 1} \right) (\dot{p}_{ek} - \frac{p_{ek}\dot{\bar{p}}_{ek}}{\bar{p}_{ek}}) \triangleq \tau_k \dot{p}_{ek} - \varphi_k p_{ek}, \\ \dot{y}_{ek}(t) = \frac{1}{2\bar{q}_{ek}} \left( \frac{1}{\bar{q}_{ek} + 1} - \frac{1}{\bar{q}_{ek} - 1} \right) (\dot{q}_{ek} - \frac{q_{ek}\dot{\bar{q}}_{ek}}{\bar{q}_{ek}}) \triangleq \theta_k \dot{q}_{ek} - \delta_k q_{ek}, \end{cases} \quad (9)$$

式中:

$$\begin{aligned} \tau_k &= \frac{1}{2\bar{p}_{ek}} \left( \frac{1}{\bar{p}_{ek} + 1} - \frac{1}{\bar{p}_{ek} - 1} \right), \\ \varphi_k &= \frac{\dot{\bar{p}}_{ek}}{2\bar{p}_{ek}^2} \left( \frac{1}{\bar{p}_{ek} + 1} - \frac{1}{\bar{p}_{ek} - 1} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_k &= \frac{1}{2\bar{q}_{ek}} \left( \frac{1}{\bar{q}_{ek} + 1} - \frac{1}{\bar{q}_{ek} - 1} \right), \\ \delta_k &= \frac{\dot{\bar{q}}_{ek}}{2\bar{q}_{ek}^2} \left( \frac{1}{\bar{q}_{ek} + 1} - \frac{1}{\bar{q}_{ek} - 1} \right). \end{aligned}$$

因此, 从式(4)(9)可以得到变换后的系统模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_e = (\Pi_1 \mathbf{A}_e - \Pi_2) \bar{\mathbf{D}} \boldsymbol{\eta} + \Pi_1 \mathbf{B}_e \bar{\mathbf{E}} \boldsymbol{\varphi}, \\ H \dot{\mathbf{y}}_e = -(\Gamma_1 \mathbf{C}_e + H \Gamma_2) \bar{\mathbf{E}} \boldsymbol{\varphi} + \Gamma_1 (\mathbf{u} + \mathbf{d}_e - \mathbf{g}_e), \end{cases} \quad (10)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \text{diag}\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_6\}, \\ \Pi_2 &= \text{diag}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6\}, \\ \Gamma_1 &= \text{diag}\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6\}, \\ \Gamma_2 &= \text{diag}\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_6\}, \\ \bar{\mathbf{D}} &= \text{diag}\{\bar{p}_{e1}, \bar{p}_{e2}, \dots, \bar{p}_{e6}\}, \\ \bar{\mathbf{E}} &= \text{diag}\{\bar{q}_{e1}, \bar{q}_{e2}, \dots, \bar{q}_{e6}\}, \\ \boldsymbol{\eta} &= \left[ \frac{e^{2x_{e1}} - 1}{e^{2x_{e1}} + 1} \quad \frac{e^{2x_{e2}} - 1}{e^{2x_{e2}} + 1} \quad \cdots \quad \frac{e^{2x_{e6}} - 1}{e^{2x_{e6}} + 1} \right]^T, \\ \boldsymbol{\varphi} &= \left[ \frac{e^{2y_{e1}} - 1}{e^{2y_{e1}} + 1} \quad \frac{e^{2y_{e2}} - 1}{e^{2y_{e2}} + 1} \quad \cdots \quad \frac{e^{2y_{e6}} - 1}{e^{2y_{e6}} + 1} \right]^T. \end{aligned}$$

因为  $\mathbf{M}_e$  和  $\Gamma_1$  是正定矩阵, 所以  $H = \Gamma_1 \mathbf{M}_e \Gamma_1^{-1}$  也是正定矩阵. 定义  $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f}(\mathbf{y}_e)$ , 因此式(10)可以重新表示为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_e = (\Pi_1 \mathbf{A}_e - \Pi_2) \bar{\mathbf{D}} \boldsymbol{\eta} + \Pi_1 \mathbf{B}_e \bar{\mathbf{E}} \boldsymbol{\varphi}, \\ H \dot{\boldsymbol{\varphi}} = -Y(\Gamma_1 \mathbf{C}_e + H \Gamma_2) \bar{\mathbf{E}} \boldsymbol{\varphi} - Y \Gamma_1 \mathbf{g}_e + \\ \quad Y \Gamma_1 \mathbf{u} + Y \Gamma_1 \mathbf{d}_e, \end{cases} \quad (11)$$

式中

$$Y = \text{diag}\left\{ \frac{4e^{2y_{e1}}}{(1 + e^{2y_{e1}})^2}, \frac{4e^{2y_{e2}}}{(1 + e^{2y_{e2}})^2}, \dots, \frac{4e^{2y_{e6}}}{(1 + e^{2y_{e6}})^2} \right\}.$$

根据反对称矩阵的性质可以得到  $\Pi_1 \mathbf{A}_e \bar{\mathbf{D}} \boldsymbol{\eta} = 0$ , 因此式(11)可以重新表示为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_e = -\Pi_2 \bar{\mathbf{D}} \boldsymbol{\eta} + \Pi_1 \mathbf{B}_e \bar{\mathbf{E}} \boldsymbol{\varphi}, \\ H \dot{\boldsymbol{\varphi}} = -Y(\Gamma_1 \mathbf{C}_e + H \Gamma_2) \bar{\mathbf{E}} \boldsymbol{\varphi} - Y \Gamma_1 \mathbf{g}_e + \\ \quad Y \Gamma_1 \mathbf{u} + Y \Gamma_1 \mathbf{d}_e. \end{cases} \quad (12)$$

令  $\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_e$  和  $\mathbf{z}_2 = \dot{\mathbf{x}}_e$ , 则由式(12)可得

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{z}_2, \\ \dot{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{h} + \Pi_1 \mathbf{B}_e \bar{\mathbf{E}} H^{-1} Y \Gamma_1 \mathbf{u} + \\ \quad \Pi_1 \mathbf{B}_e \bar{\mathbf{E}} H^{-1} Y \Gamma_1 \mathbf{d}_e, \end{cases} \quad (13)$$

式中:

$$\dot{\mathbf{D}} = \text{diag}\{\dot{\bar{p}}_{e1}, \dot{\bar{p}}_{e2}, \dots, \dot{\bar{p}}_{e6}\},$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \text{diag}\{\dot{\tau}_1, \dot{\tau}_2, \dots, \dot{\tau}_6\}, \\ \dot{I}_2 &= \text{diag}\{\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dots, \dot{\phi}_6\}, \\ \dot{B}_e &= \text{diag}\{O_3, \dot{G}(\sigma_e)\}, \\ \mathbf{h} &= -(\dot{I}_2 \bar{D} \boldsymbol{\eta} + \Pi_2 \dot{D} \boldsymbol{\eta} + \Pi_2 \bar{D} \dot{\boldsymbol{\eta}}) + \\ &\quad \dot{I}_1 \mathcal{B}_e \bar{E} \boldsymbol{\varphi} + \Pi_1 \dot{B}_e \bar{E} \boldsymbol{\varphi} + \Pi_1 \mathcal{B}_e \dot{E} \boldsymbol{\varphi} + \\ &\quad \Pi_1 \mathcal{B}_e \dot{E} H^{-1} (-Y(\Gamma_1 \mathcal{C} + H \Gamma_2) \bar{E} \boldsymbol{\varphi} - Y \Gamma_1 \mathbf{g}), \\ \dot{G}(\sigma_e) &= \frac{8}{(1 + \sigma_e^T \sigma_e)^2} [\dot{\sigma}_e \sigma_e^T + \sigma_e \dot{\sigma}_e^T - \dot{\sigma}_e^T \sigma_e I_3 - \\ &\quad S(\dot{\sigma}_e)] - \frac{16 \sigma_e^T \dot{\sigma}_e}{(1 + \sigma_e^T \sigma_e)^3} [(1 - \sigma_e^T \sigma_e) I_3 - \\ &\quad 2S(\sigma_e) + 2\sigma_e \sigma_e^T], \\ \dot{\tau}_k &= \frac{-\dot{p}_{ek}(p_{ek}^2 + \bar{p}_{ek}^2) + 2\bar{p}_{ek} p_{ek} \dot{p}_{ek}}{(p_{ek}^2 - \bar{p}_{ek}^2)^2}, \\ \dot{\phi}_k &= \frac{-\ddot{p}_{ek}(p_{ek}^2 - \bar{p}_{ek}^2) + 2\dot{p}_{ek}(p_{ek} \dot{p}_{ek} - \bar{p}_{ek} \dot{p}_{ek})}{(p_{ek}^2 - \bar{p}_{ek}^2)^2}. \end{aligned}$$

### 3.2 控制器设计

**引理 1**<sup>[26]</sup> 如果存在连续函数  $V(x) \geq 0$  且它的时间导数为  $\dot{V}(x) = -\lambda_1 V^{\gamma_1}(x) - \lambda_2 V^{\gamma_2}(x) + \varpi$ , 其中  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \gamma_1 > 0, 0 < \gamma_2 < 1$  和  $0 < \varpi < \infty$ , 则  $V(x)$  将收敛到平衡点小邻域,

$$\Omega \triangleq \min\left\{\left[\frac{\varpi}{\lambda_1(1-\zeta)}\right]^{\gamma_1}, \left[\frac{\varpi}{\lambda_2(1-\zeta)}\right]^{\gamma_2}\right\},$$

对于  $V(x)$  收敛到平衡点的到达时间  $T_r$  满足

$$T_r < \frac{1}{\lambda_1 \zeta (\gamma_1 - 1)} + \frac{1}{\lambda_2 \zeta (1 - \gamma_2)},$$

其中  $0 < \zeta \leq 1$ .

**引理 2**<sup>[27]</sup> 当任意的  $x, y \in \mathbb{R}$  并且存在常数  $\xi > 0$  时, 不等式

$$-(x - y)[\text{sig}^\xi(x) - \text{sig}^\xi(y)] \leq -|x - y|^{\xi+1/2} 2^{\xi-1}$$

成立.

**引理 3**<sup>[28]</sup> 存在任意常数  $\gamma$ , 满足不等式

$$\begin{aligned} |x|^{\gamma_1} |y|^{\gamma_1} &\leq \\ \gamma |x|^{\gamma_1 + \gamma_2} &+ \\ [\gamma_2 / (\gamma_1 + \gamma_2)] \{ \gamma_2 / [\gamma(\gamma_1 + \gamma_2)] \}^{\gamma_1 + \gamma_2} |y|^{\gamma_1 + \gamma_2}, \end{aligned}$$

其中  $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$ .

为了设计固定时间控制器, 将固定时间非奇异终端滑模面定义为<sup>[29]</sup>

$$\mathbf{s} = \mathbf{z}_2 + \alpha_1 \text{sig}^{\gamma_1}(\mathbf{z}_1) + \alpha_2 \boldsymbol{\beta}, \quad (14)$$

式中

$$\begin{aligned} \text{sig}^{\gamma_1}(\mathbf{z}_1) &= [|z_{11}|^{\gamma_1} \text{sgn}(z_{11}) \cdots |z_{16}|^{\gamma_1} \text{sgn}(z_{16})], \\ \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \boldsymbol{\beta} &= [\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n]^T \text{被定义为} \\ \beta_i &= \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \text{sig}^{\gamma_2}(z_{1i}), & \text{若 } \bar{\mathbf{s}} = \mathbf{0} \text{ 或 } \bar{\mathbf{s}} \neq \mathbf{0}, |z_{1i}| \geq \kappa; \\ b_1 z_{1i} + b_2 \text{sig}^2(z_{1i}), & \text{若 } \bar{\mathbf{s}} \neq \mathbf{0}, |z_{1i}| < \kappa, \end{cases} \quad (15)$$

其中:  $\bar{\mathbf{s}} \triangleq \mathbf{z}_2 + \alpha_1 \text{sig}^{\gamma_1}(\mathbf{z}_1) + \alpha_2 \text{sig}^{\gamma_2}(\mathbf{z}_1)$ ,  $b_1 = (2 - \gamma_2) \kappa^{\gamma_2 - 1}$ ,  $b_2 = (\gamma_2 - 1) \kappa^{\gamma_2 - 2}$ ,  $\gamma_1 > 1, 0 < \gamma_2 < 1$ ,  $\kappa$  是一个很小的正常数.

对  $\mathbf{s}$  相对时间求导得到

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{z}}_2 + \alpha_1 \gamma_1 [\mathbf{z}_1]^{\gamma_1 - 1} \dot{\mathbf{z}}_2 + \alpha_2 \dot{\boldsymbol{\beta}}, \quad (16)$$

其中:  $[\mathbf{z}_1]^{\gamma_1 - 1} \triangleq \text{diag}\{x_{11}^{\gamma_1 - 1}, x_{12}^{\gamma_1 - 1}, \dots, x_{16}^{\gamma_1 - 1}\}$ ;

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = [\dot{\beta}_1 \ \dot{\beta}_2 \ \cdots \ \dot{\beta}_n]^T;$$

$$\dot{\beta}_i =$$

$$\begin{cases} \gamma_2 |x_{1i}|^{\gamma_2 - 1}, & \text{若 } \bar{\mathbf{s}} = \mathbf{0} \text{ 或 } \bar{\mathbf{s}} \neq \mathbf{0}, |z_{1i}| \geq \kappa, \\ b_1 x_{2i} + 2b_2 |x_{1i}| x_{2i}, & \text{若 } \bar{\mathbf{s}} \neq \mathbf{0}, |z_{1i}| < \kappa. \end{cases} \quad (17)$$

将式(13)代入式(16)可以得到

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}} &= \mathbf{h} + \Pi_1 \mathcal{B}_e \bar{E} H^{-1} Y \Gamma_1 (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_\Delta) + \alpha_2 \dot{\boldsymbol{\beta}} + \\ &\quad \alpha_1 \gamma_1 [\mathbf{z}_1]^{\gamma_1 - 1} \dot{\mathbf{z}}_2 + \Pi_1 \mathcal{B}_e \bar{E} H^{-1} Y \Gamma_1 \mathbf{d}_e, \end{aligned} \quad (18)$$

其中  $\mathbf{u}_\Delta = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$  表示执行器饱和效应.

考虑到式(18)中的未知项  $\mathbf{d}_e$ , 根据假设1中的  $\|\mathbf{d}\| \leq \bar{d}$ ,  $\|\mathbf{d}_t\| \leq \bar{d}_t$  和  $\boldsymbol{\omega}_t = R^T(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_e)$  以及  $\|R\| = \|R^T\|$ , 可以推导出  $\mathbf{d}_e$  满足

$$\begin{aligned} \|\mathbf{d}_e\| &\leq \|\mathbf{d}\| + \|\mathcal{M}\| \|\mathcal{R}_e\| \|\mathcal{M}_t^{-1}\| \cdot \\ &\quad (\|\mathcal{C}_t\| \|\mathcal{R}_e^T\| \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_e\| + \|\mathbf{d}_t\|), \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{C}_t\| &\leq (m_t + 2m_t \|\mathbf{l}_t\| + \|\mathbf{J}_t\| + \\ &\quad m_t \|\mathbf{l}_t\|^2) \|R^T\| \|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_e\|, \end{aligned}$$

$$\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_e\| \leq \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_e\|,$$

$$\|\mathcal{R}_e\| = \|\mathcal{R}_e^T\| \leq \|R\| + \|R\| = 2.$$

因此,

$$\|\mathbf{d}_e\| \leq \bar{d}_{e1} + \bar{d}_{e2} \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_e\|^2,$$

其中:

$$\bar{d}_{e1} = \bar{d} + 2\bar{d}_t \|\mathcal{M}\| \|\mathcal{M}_t^{-1}\|,$$

$$\begin{aligned} \bar{d}_{e2} &= (m_t + 2m_t \|\mathbf{l}_t\| + \|\mathbf{J}_t\| + \\ &\quad m_t \|\mathbf{l}_t\|^2) \|\mathcal{M}\| \|\mathcal{M}_t^{-1}\|. \end{aligned}$$

进一步, 设计了自适应固定时间控制器为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 &= \\ &\quad -k(Y \Gamma_1)^{-1} H (\Pi_1 \mathcal{B}_e \bar{E})^{-1} [\text{sig}^{\gamma_1}(\mathbf{s}) + \\ &\quad \text{sig}^{\gamma_2}(\mathbf{s}) + \text{sig}^{\gamma_1}(\boldsymbol{\nu}) + \text{sig}^{\gamma_2}(\boldsymbol{\nu})] - \\ &\quad (Y \Gamma_1)^{-1} H (\Pi_1 \mathcal{B}_e \bar{E})^{-1} (\alpha_1 \gamma_1 [\mathbf{z}_1]^{\gamma_1 - 1} \dot{\mathbf{z}}_2 + \end{aligned}$$

$$\alpha_2 \dot{\mathbf{B}} + \mathbf{h}) - (\hat{d}_{e1} + \hat{d}_{e2} \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_e\|^2) \text{sgn}(\boldsymbol{\nu}), \quad (19)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{d}}_{e1} = \frac{1}{c_1} \|\Pi_1 \mathcal{B}_e \bar{E} H^{-1} Y \Gamma_1\| \boldsymbol{\nu}^T \text{sgn}(\boldsymbol{\nu}) - \\ \quad \frac{a_1}{c_1} \hat{d}_{e1} - \frac{a_1}{c_1} \hat{d}_{e1}^{\gamma_1}, \\ \dot{\hat{d}}_{e2} = \frac{1}{c_2} \|\Pi_1 \mathcal{B}_e \bar{E} H^{-1} Y \Gamma_1\| \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_e\|^2 \\ \quad \boldsymbol{\nu}^T \text{sgn}(\boldsymbol{\nu}) - \frac{a_2}{c_2} \hat{d}_{e2} - \frac{a_2}{c_2} \hat{d}_{e2}^{\gamma_1}, \end{cases} \quad (20)$$

其中:  $c_i = a_i(2m_i - 1)/(2m_i)$ ;  $a_i > 0$ ;  $m_i > 0$  ( $i = 1, 2$ );  $k > 0$ ;  $\boldsymbol{\nu} \triangleq \mathbf{s} - \boldsymbol{\xi}$ ,  $\boldsymbol{\xi}$  是抗饱和和辅助系统的状态, 所设计的非线性抗饱和和辅助系统为

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -k \text{sig}^{\gamma_1}(\boldsymbol{\xi}) - k \text{sig}^{\gamma_2}(\boldsymbol{\xi}) + \Pi_1 \mathcal{B}_e \bar{E} H^{-1} Y \Gamma_1 \mathbf{u}_\Delta. \quad (21)$$

### 3.3 稳定性分析

**定理1** 考虑系统(13)在假设1-2下, 当存在一个未知常数  $\bar{u}_\Delta$  使得  $|u_{\Delta i}| \leq \bar{u}_\Delta$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ), 则在控制器(19)以及辅助系统(21)的作用下可保证  $s_i$  固定时间内收敛到零的小邻域

$$\Omega_s \triangleq \min\{\Omega_{v_1}, [\frac{\lambda_M \bar{u}_\Delta}{k(1-\rho)}]^{\frac{1}{\gamma_1}}, [\frac{\lambda_M \bar{u}_\Delta}{k(1-\rho)}]^{\frac{1}{\gamma_2}}\}, \quad (22)$$

$$\Omega_{v_1} \triangleq \min\{(\frac{\Omega_{v_1}}{\Xi_1(1-\zeta)})^{\frac{2}{1+\gamma_1}}, (\frac{\Omega_{v_1}}{\Xi_2(1-\zeta)})^{\frac{2}{1+\gamma_2}}\}, \quad (23)$$

其中:  $\lambda_M$  是  $\Pi_1 \mathcal{B}_e \bar{E} H^{-1} Y \Gamma_1$  的特征值,  $0 < \rho < 1$ ;

$$\Xi_1 = \min\{2^{\frac{\gamma_1+1}{2}} k, 2a_1(2^{1-\gamma_1} - \zeta)c_1^{-\frac{\gamma_1+1}{2}},$$

$$2a_2(2^{1-\gamma_1} - \zeta)c_2^{-\frac{\gamma_1+1}{2}}\};$$

$$\Xi_2 = \min\{2^{\frac{\gamma_2+1}{2}} k, 2a_1c_1^{-\frac{\gamma_2+1}{2}}, 2a_2c_2^{-\frac{\gamma_2+1}{2}}\}; \zeta > 0.$$

进一步,  $z_{1i}$  和  $z_{2i}$  也在固定时间收敛到零的小邻域

$$\Omega_{z_1} \triangleq \max\{\kappa, \Omega\}, \quad (24)$$

$$\Omega \triangleq \min\{[\frac{\Omega_s}{\alpha_1(1-\rho)}]^{\frac{1}{\gamma_1}}, [\frac{\Omega_s}{\alpha_2(1-\rho)}]^{\frac{1}{\gamma_2}}\}, \quad (25)$$

$$\Omega_{z_2} \triangleq \max\{\Omega_s + \alpha_1 |\Omega_{z_1}|^{\gamma_1} + \alpha_2 |\Omega_{z_1}|^{\gamma_2}, \Omega_s + \alpha_1 |\Omega_{z_1}|^{\gamma_1} + b_1 |\Omega_{z_1}| + b_2 |\Omega_{z_1}|^2\}. \quad (26)$$

**证 步骤1** 选择Lyapunov函数

$$v_1(t) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{\nu} + c_1 \tilde{d}_{e1}^2 + c_2 \tilde{d}_{e2}^2),$$

其中  $\tilde{d}_{ei} = \bar{d}_{ei} - \hat{d}_{ei}$  ( $i = 1, 2$ ). 基于控制命令(19)和补偿器(21),  $v_1(t)$  的时间导数为

$$\begin{aligned} \dot{v}_1(t) &= \boldsymbol{\nu}^T \dot{\boldsymbol{\nu}} + c_1 \tilde{d}_{e1} \dot{\tilde{d}}_{e1} + c_2 \tilde{d}_{e2} \dot{\tilde{d}}_{e2} = \\ &= -k \boldsymbol{\nu}^T [\text{sig}^{\gamma_1}(\mathbf{s}) + \text{sig}^{\gamma_2}(\mathbf{s}) - \text{sig}^{\gamma_1}(\boldsymbol{\xi}) - \text{sig}^{\gamma_2}(\boldsymbol{\xi})] - \\ &= k \sum_{i=1}^6 |\nu_i|^{\gamma_1+1} - k \sum_{i=1}^6 |\nu_i|^{\gamma_2+1} + \boldsymbol{\nu}^T (\Pi_1 \mathcal{B}_e \bar{E} H^{-1} Y \\ &= \Gamma_1 (\mathbf{d}_e - (\hat{d}_{e1} + \hat{d}_{e2} \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_e\|^2) \text{sgn}(\boldsymbol{\nu})) - \end{aligned}$$

$$c_1 \tilde{d}_{e1} \dot{\tilde{d}}_{e1} - c_2 \tilde{d}_{e2} \dot{\tilde{d}}_{e2}. \quad (27)$$

由于  $\text{sig}^{\gamma_j}(\mathbf{s}) - \text{sig}^{\gamma_j}(\boldsymbol{\xi})$  和  $\text{sig}^{\gamma_j}(\boldsymbol{\nu})$  ( $j = 1, 2$ ) 有相同的符号使得  $\boldsymbol{\nu}^T [\text{sig}^{\gamma_1}(\mathbf{s}) + \text{sig}^{\gamma_2}(\mathbf{s}) - \text{sig}^{\gamma_1}(\boldsymbol{\xi}) - \text{sig}^{\gamma_2}(\boldsymbol{\xi})] \geq 0$ . 因此, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{v}_1(t) &\leq -k \sum_{i=1}^6 |\nu_i|^{\gamma_1+1} - k \sum_{i=1}^6 |\nu_i|^{\gamma_2+1} - c_1 \tilde{d}_{e1} \dot{\tilde{d}}_{e1} - \\ &= c_2 \tilde{d}_{e2} \dot{\tilde{d}}_{e2} + \|\Pi_1 \mathcal{B}_e \bar{E} H^{-1} Y \Gamma_1\| \|\boldsymbol{\nu}\| (\tilde{d}_{e1} + \\ &= \tilde{d}_{e2} \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_e\|^2). \end{aligned} \quad (28)$$

进一步, 将式(20)代入式(28)可以得到

$$\begin{aligned} \dot{v}_1(t) &\leq \\ &= -2^{\frac{\gamma_1+1}{2}} k (\frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{\nu})^{\frac{\gamma_1+1}{2}} - 2^{\frac{\gamma_2+1}{2}} k (\frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{\nu})^{\frac{\gamma_2+1}{2}} + \\ &= a_1 \tilde{d}_{e1} \dot{\tilde{d}}_{e1} + a_1 \tilde{d}_{e1} \hat{d}_{e1}^{\gamma_1} + a_2 \tilde{d}_{e2} \dot{\tilde{d}}_{e2} + a_2 \tilde{d}_{e2} \hat{d}_{e2}^{\gamma_1}. \end{aligned} \quad (29)$$

根据引理2和引理3, 再由  $\tilde{d}_{ei}^2 \geq \tilde{d}_{ei}^{1+\gamma_i}$  ( $i = 1, 2$ ) 可知

$$\begin{aligned} a_1 \tilde{d}_{e1} \dot{\tilde{d}}_{e1}^{\gamma_1} &\leq -a_1 \tilde{d}_{e1}^{1+\gamma_1} 2^{1-\gamma_1} + a_1 \zeta |\tilde{d}_{e1}|^{\gamma_1+1} + \\ &= a_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} [\frac{1}{\zeta(\gamma_1 + 1)}]^{\frac{1}{\gamma_1}} |\tilde{d}_{e1}|^{\gamma_1+1}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} a_2 \tilde{d}_{e2} \dot{\tilde{d}}_{e2}^{\gamma_1} &\leq -a_2 \tilde{d}_{e2}^{1+\gamma_1} 2^{1-\gamma_1} + a_2 \zeta |\tilde{d}_{e2}|^{\gamma_1+1} + \\ &= a_2 \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} [\frac{1}{\zeta(\gamma_1 + 1)}]^{\frac{1}{\gamma_1}} |\tilde{d}_{e2}|^{\gamma_1+1}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} a_1 \tilde{d}_{e1} \dot{\tilde{d}}_{e1} &\leq a_1 (-\frac{2m_1 - 1}{2m_1} \tilde{d}_{e1}^2 + \frac{m_1}{2} \bar{d}_{e1}^2) \leq \\ &= a_2 - c_1 (\tilde{d}_{e1}^{1+\gamma_2}) + \frac{m_1 a_1}{2} \bar{d}_{e1}^2, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} a_2 \tilde{d}_{e2} \dot{\tilde{d}}_{e2} &\leq a_2 (-\frac{2m_2 - 1}{2m_2} \tilde{d}_{e2}^2 + \frac{m_2}{2} \bar{d}_{e2}^2) \leq \\ &= a_2 - c_2 (\tilde{d}_{e2}^{1+\gamma_2}) + \frac{m_2 a_2}{2} \bar{d}_{e2}^2. \end{aligned} \quad (33)$$

进一步, 将式(30)-(33)代入到式(29)可以得到

$$\begin{aligned} \dot{v}_1(t) &\leq \\ &= -2^{\frac{\gamma_1+1}{2}} k (\frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{\nu})^{\frac{\gamma_1+1}{2}} - 2^{\frac{\gamma_2+1}{2}} k (\frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{\nu})^{\frac{\gamma_2+1}{2}} - \\ &= c_1 \tilde{d}_{e1}^{1+\gamma_2} - c_2 \tilde{d}_{e2}^{1+\gamma_2} - a_1 (2^{1-\gamma_1} - \zeta) \tilde{d}_{e1}^{1+\gamma_1} - \\ &= a_2 (2^{1-\gamma_1} - \zeta) \tilde{d}_{e2}^{1+\gamma_1} + \frac{m_2 a_2}{2} \bar{d}_{e2}^2 + \frac{m_1 a_1}{2} \bar{d}_{e1}^2 + \\ &= a_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} [\frac{1}{\zeta(\gamma_1 + 1)}]^{\frac{1}{\gamma_1}} |\tilde{d}_{e1}|^{\gamma_1+1} + \\ &= a_2 \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} [\frac{1}{\zeta(\gamma_1 + 1)}]^{\frac{1}{\gamma_1}} |\tilde{d}_{e2}|^{\gamma_1+1}, \end{aligned} \quad (34)$$

将式(34)重新改写为

$$\dot{v}_1(t) \leq -\Xi_1 v_1^{\frac{\gamma_1+1}{2}} - \Xi_2 v_1^{\frac{\gamma_2+1}{2}} + \Xi_3, \quad (35)$$

其中

$$\Xi_3 = \frac{m_2 a_2}{2} \bar{d}_{e2}^2 + \frac{m_1 a_1}{2} \bar{d}_{e1}^2 +$$

$$a_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} \left[ \frac{1}{\zeta(\gamma_1 + 1)} \right]^{\frac{1}{\gamma_1}} |\bar{d}_{e1}|^{\gamma_1 + 1} +$$

$$a_2 \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} \left[ \frac{1}{\zeta(\gamma_1 + 1)} \right]^{\frac{1}{\gamma_1}} |\bar{d}_{e2}|^{\gamma_1 + 1}.$$

由引理1可知,在固定时间内收敛到式(23)的集合  $\Omega_{v_1}$ , 收敛时间为

$$T_{v_1} \leq \frac{2}{\Xi_1 \zeta(1 - \gamma_1)} + \frac{2}{\Xi_2 \zeta(1 - \gamma_2)}.$$

进一步选择Lyapunov函数  $v_2(t) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi}$ .  $v_2(t)$  的时间导数为

$$\dot{v}_2(t) = \boldsymbol{\xi}^T \dot{\boldsymbol{\xi}} \leq$$

$$-k \sum_{i=1}^6 |\xi_i|^{\gamma_1 + 1} - k \sum_{i=1}^6 |\xi_i|^{\gamma_2 + 1} + \lambda_M \sum_{i=1}^6 |\xi_i| |u_{\Delta_i}|. \quad (36)$$

因此存在一个常数  $0 < \rho < 1$  使得

$$\dot{v}_2(t) \leq$$

$$- \rho k \sum_{i=1}^6 |\xi_i|^{\gamma_1 + 1} - k \sum_{i=1}^6 |\xi_i|^{\gamma_2 + 1} -$$

$$(1 - \rho) k \sum_{i=1}^6 |\xi_i|^{\gamma_1 + 1} + \lambda_M \sum_{i=1}^6 |\xi_i| |u_{\Delta_i}|, \quad (37)$$

或者

$$\dot{v}_2(t) \leq$$

$$-k \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{\gamma_1 + 1} - \rho k \sum_{i=1}^6 |\xi_i|^{\gamma_2 + 1} -$$

$$(1 - \rho) k \sum_{i=1}^6 |\xi_i|^{\gamma_2 + 1} + \lambda_M \sum_{i=1}^6 |\xi_i| |u_{\Delta_i}|. \quad (38)$$

因此,当  $|u_{\Delta_i}| \leq \bar{u}_{\Delta}$  且  $|\xi_i| > \left[ \frac{\lambda_M \bar{u}_{\Delta}}{(1 - \rho)k} \right]^{\frac{1}{\gamma_1}}$ , 那么从式(37)可以得到

$$\dot{v}_2(t) \leq -\rho k \sum_{i=1}^6 |\xi_i|^{\gamma_1 + 1} - k \sum_{i=1}^6 |\xi_i|^{\gamma_2 + 1} =$$

$$-2^{\frac{\gamma_1 + 1}{2}} \rho k v_2^{\frac{\gamma_1 + 1}{2}} - 2^{\frac{\gamma_2 + 1}{2}} k v_2^{\frac{\gamma_2 + 1}{2}}. \quad (39)$$

根据引理1,  $\boldsymbol{\xi}$  在固定时间收敛于零的小邻域且满足  $|\xi_i| \leq \left[ \frac{\lambda_M \bar{u}_{\Delta}}{(1 - \rho)k} \right]^{\frac{1}{\gamma_1}}$ . 同理,当  $|u_{\Delta_i}| \leq \bar{u}_{\Delta}$  且  $|\xi_i| > \left[ \frac{\lambda_M \bar{u}_{\Delta}}{(1 - \rho)k} \right]^{\frac{1}{\gamma_2}}$ , 那么从式(38)可以得到

$$\dot{v}_2(t) \leq -k \sum_{i=1}^6 |\xi_i|^{\gamma_1 + 1} - \rho k \sum_{i=1}^6 |\xi_i|^{\gamma_2 + 1} =$$

$$-2^{\frac{\gamma_1 + 1}{2}} k v_2^{\frac{\gamma_1 + 1}{2}} - 2^{\frac{\gamma_2 + 1}{2}} \rho k v_2^{\frac{\gamma_2 + 1}{2}}. \quad (40)$$

根据引理1,  $\boldsymbol{\xi}$  在固定时间收敛于零的小邻域且满足  $|\xi_i| \leq \left[ \frac{\lambda_M \bar{u}_{\Delta}}{(1 - \rho)k} \right]^{\frac{1}{\gamma_2}}$ . 再从  $|s_i| \leq |\nu_i| + |\xi_i|$  可以知道,在固定时间内  $s_i$  收敛到式(22)中的集合  $\Omega_s$ .

**步骤2** 在分析了  $\mathbf{s}$  固定时间收敛后,接下来证明

$\mathbf{z}_1$  和  $\mathbf{x}_2$  的收敛性. 当  $s_i$  收敛到  $\Omega_s$ , 对于  $|z_{1i}| \geq \kappa$  的情况,可以得到

$$\mathbf{z}_2 + \alpha_1 \text{sig}^{\gamma_1}(\mathbf{z}_1) + \alpha_2 \text{sig}^{\gamma_2}(\mathbf{z}_1) = \mathbf{s}, \mathbf{s} \in \Omega_s. \quad (41)$$

考虑Lyapunov函数  $v_0(t) = \frac{1}{2} \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_1$ , 它的时间导数为

$$\dot{v}_0(t) =$$

$$- \alpha_1 \sum_{i=1}^6 |z_{1i}|^{\gamma_1 + 1} - \alpha_2 \sum_{i=1}^6 |z_{1i}|^{\gamma_2 + 1} + \sum_{i=1}^6 z_{1i} s_i \leq$$

$$- \rho \alpha_1 \sum_{i=1}^6 |z_{1i}|^{\gamma_1 + 1} - \alpha_2 \sum_{i=1}^6 |z_{1i}|^{\gamma_2 + 1} -$$

$$(1 - \rho) \alpha_1 \sum_{i=1}^6 |z_{1i}|^{\gamma_1 + 1} + \sum_{i=1}^6 |z_{1i}| |s_i| \quad (42)$$

或者

$$\dot{v}_0(t) \leq$$

$$- \alpha_1 \sum_{i=1}^6 |z_{1i}|^{\gamma_1 + 1} - \rho \alpha_2 \sum_{i=1}^6 |z_{1i}|^{\gamma_2 + 1} -$$

$$(1 - \rho) \alpha_2 \sum_{i=1}^6 |z_{1i}|^{\gamma_2 + 1} + \sum_{i=1}^6 |z_{1i}| |s_i|. \quad (43)$$

类似于式(37)–(38)分析过程,可以证明如果  $|z_{1i}| \geq \kappa$ , 则  $z_{1i}$  在固定时间内收敛于式(25)中的  $\Omega$ . 结合  $|z_{1i}| < \kappa$  的情况,可得到  $z_{1i}$  在固定时间内收敛于式(24)中的  $\Omega_{z_1}$ . 进一步,从式(14)中  $\mathbf{s}$  的定义可知  $z_{2i}$  在固定时间内收敛于式(26)中的  $\Omega_{z_2}$ .

再由定理2可知,  $\mathbf{z}_1$  和  $\mathbf{z}_2$  在固定时间收敛的小邻域分别如式(24)和式(26)所示. 根据模型变换式(8)可进一步得到相对运动状态  $\mathbf{p}_e$  和  $\mathbf{q}_e$  的收敛域分别为

$$\Omega_{\mathbf{p}_e} \triangleq \{ \mathbf{p}_e \mid \|\mathbf{p}_e\| \leq \bar{p}_e \left( \frac{e^{2\Omega_{z_1}} - 1}{e^{2\Omega_{z_1}} + 1} \right) \},$$

$$\Omega_{\mathbf{q}_e} \triangleq \{ \mathbf{q}_e \mid \|\mathbf{q}_e\| \leq$$

$$\frac{\Omega_{z_2} - |\lambda_M(-\Pi_2)| \bar{p}_e \left( \frac{e^{2\Omega_{z_1}} - 1}{e^{2\Omega_{z_1}} + 1} \right)}{\lambda_M(\Pi_1 \mathcal{B}_e)} \},$$

其中:  $\lambda_M(-\Pi_2)$  和  $\lambda_M(\Pi_1 \mathcal{B}_e)$  分别是  $-\Pi_2$  和  $\Pi_1 \mathcal{B}_e$  的最大特征值. 根据引理1,可以得到变量  $\mathbf{s}$  收敛时间满足

$$T_s <$$

$$\max \left\{ \frac{1}{2^{\frac{\gamma_1 + 1}{2}} k \left( \frac{\gamma_1 + 1}{2} - 1 \right)} + \frac{1}{2^{\frac{\gamma_2 + 1}{2}} k \rho \left( 1 - \frac{\gamma_2 + 1}{2} \right)}, \right.$$

$$\left. \frac{1}{2^{\frac{\gamma_1 + 1}{2}} k \rho \left( \frac{\gamma_1 + 1}{2} - 1 \right)} + \frac{1}{2^{\frac{\gamma_2 + 1}{2}} k \left( 1 - \frac{\gamma_2 + 1}{2} \right)} \right\},$$

进一步可知相对运动状态  $\mathbf{p}_e$  收敛时间满足

$$T_{p_e} <$$

$$\max\left\{\frac{1}{2^{\frac{\gamma_1+1}{2}}\alpha_1\left(\frac{\gamma_1+1}{2}-1\right)}+\frac{1}{2^{\frac{\gamma_2+1}{2}}\alpha_2\rho\left(1-\frac{\gamma_2+1}{2}\right)},\frac{1}{2^{\frac{\gamma_1+1}{2}}\alpha_1\rho\left(\frac{\gamma_1+1}{2}-1\right)}+\frac{1}{2^{\frac{\gamma_2+1}{2}}\alpha_2\left(1-\frac{\gamma_2+1}{2}\right)}\right\}.$$

**注3** 根据式(22)–(26),  $s, z_1$  和  $z_2$  的收敛域大小由可调参数  $k, \alpha_1, \alpha_2$  和  $\kappa$  确定, 其中  $k$  是控制闭环系统控制性能的关键参数, 因为  $k$  越大,  $\Omega_s, \Omega_{z_1}$  和  $\Omega_{z_2}$  越小. 但是, 这将导致更大的  $u_0$  使得  $u_\Delta$  变大, 因此设置可调参数需要在控制命令、瞬态响应性能和稳态精度之间进行权衡.

### 4 数值算例

仿真中两航天器各自的物理参数分别为<sup>[25]</sup>

$$m_t = 5425.6 \text{ kg}, m = 58.2 \text{ kg},$$

$$J_t = \begin{bmatrix} 3336.3 & -135.4 & -154.2 \\ -135.4 & 3184.5 & -148.5 \\ -154.2 & -148.5 & 2423.7 \end{bmatrix} \text{ kg}\cdot\text{m}^2,$$

$$J = \begin{bmatrix} 38.3 & -2.5 & -5.5 \\ -2.5 & 44.4 & -2.7 \\ -5.5 & -2.7 & 36.6 \end{bmatrix} \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

假设航天器受到的外部干扰为

$$w = 0.002[\sin(0.03t) \cos(0.02t) \sin(0.02t)]^T \text{ N},$$

$$\delta = 0.002[\sin(0.02t) \cos(0.02t) \sin(0.03t)]^T \text{ Nm},$$

$$w_t = 0.02[\sin(0.03t) \cos(0.02t) \sin(0.02t)]^T \text{ N},$$

$$\delta_t = 0.02[\sin(0.02t) \cos(0.02t) \sin(0.03t)]^T \text{ Nm}.$$

两个航天器的对接口的位置分别为  $l_t = [0 \ 0.3 \ 0]^T \text{ m}, l = [0.2 \ 0 \ 0]^T \text{ m}$ . 航天器交会对接系统的状态初始值为  $r(0) = [10 \ 12 \ 10]^T \text{ m}, v(0) = [2 \ 3 \ -2]^T \text{ m/s}, \sigma(0) = \mathbf{0}, \omega(0) = \mathbf{0} \text{ rad/s}, r_e(0) = [-3 \ 5 \ -5]^T \text{ m}, v_e(0) = [-0.4 \ -0.2 \ 0.2]^T \text{ m/s}, \sigma_e(0) = [0.5 \ -0.6 \ 0.7]^T, \omega_e(0) = [0.02 \ 0.02 \ 0.02]^T \text{ rad/s}$ .

执行器饱和的上下限分别为  $u_{\max} = [5 \ 5 \ 5 \ 2 \ 2 \ 2]^T$  和  $u_{\min} = [4.5 \ 4.5 \ 4.5 \ 1.5 \ 1.5 \ 1.5]^T$ .

预设性能函数的参数值设置为

$$\bar{p}_{ek,0} = [20 \ 20 \ 20 \ 1 \ 1 \ 1]^T,$$

$$\bar{p}_{ek,\infty} = [0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.05 \ 0.05 \ 0.05]^T,$$

$$\bar{q}_{ek,0} = [8 \ 8 \ 8 \ 1 \ 1 \ 1]^T,$$

$$\bar{q}_{ek,\infty} = [0.05 \ 0.05 \ 0.05 \ 0.05 \ 0.05 \ 0.05]^T.$$

固定时间非奇异终端滑模面的参数设为  $\alpha_1 = 0.05, \alpha_2 = 0.05, \gamma_1 = 14/11, \gamma_2 = 11/14, \kappa = 0.65, k = 0.3$ . 控制器参数为  $a_1 = a_2 = 0.9, m_1 = m_2 = 1$ , 自适应律参数初值为  $\hat{d}_{e1}(0) = \hat{d}_{e2}(0) = 0$ .

仿真结果如图2–7所示. 图2和图3分别展示了相对位置和速度, 相对姿态和角速度的仿真结果, 可以看出所设计的控制器(19)响应时间快, 并且可以在固定

时间内完成航天器特征点间的相对位姿跟踪控制任务, 而且在整个跟踪的过程中, 相对运动状态都始终保持在预设性能函数所设定的范围内. 从图4和图5的仿真结果可知, 控制力和力矩始终都在给定的限制范围内, 满足了控制要求; 而且饱和补偿器的状态幅值小, 响应时间快, 因此所设计的控制器(19)可以在有限的时间内进行响应和调整, 从而完成对相对位置和姿态的跟踪. 图6给出了自适应参数在线估计的结果, 表明了在线估计参数总是有界的. 图7给出了滑模变量的变化曲线. 以上仿真结果表明, 所提出的控制方法能够有效地实现两航天器特征点间的相对位置跟踪和姿态同步的任务.

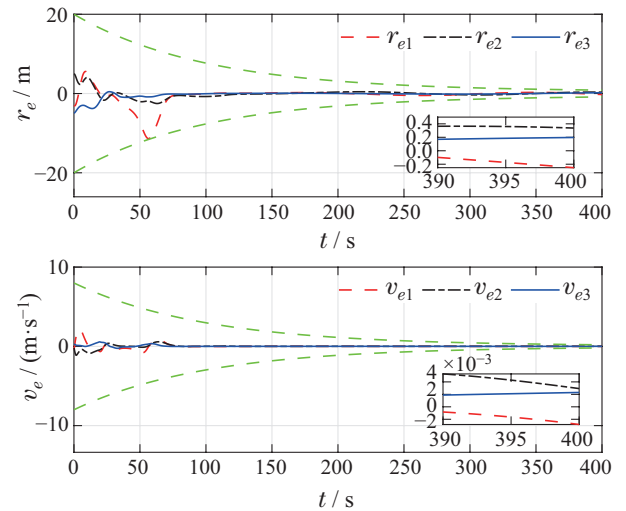


图2 控制器(19)的相对位置和速度曲线  
Fig. 2 Relative position and velocity curve of controller (19)

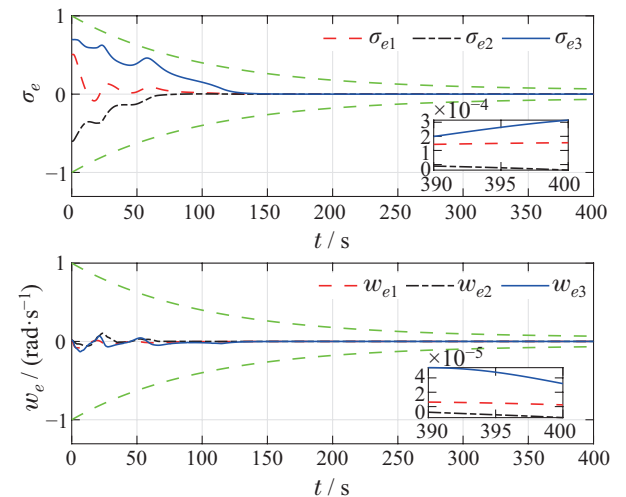


图3 控制器(19)的相对姿态和角速度曲线  
Fig. 3 Relative attitude and angular velocity curve of controller (19)

为进一步验证所提出的算法的优越性, 在不考虑系统的瞬态性能和全状态约束的情况下, 设计非奇异终端滑模饱和固定时间控制器为

$$u_0 =$$



$$-kM_e[\text{sig}^{\gamma_1}(\mathbf{s}) + \text{sig}^{\gamma_2}(\mathbf{s}) + \text{sig}^{\gamma_1}(\boldsymbol{\nu}) + \text{sig}^{\gamma_2}(\boldsymbol{\nu})] - M_e(\alpha_1\gamma_1[\mathbf{p}_e]^{\gamma_1-1}\mathbf{q}_e + \alpha_2\dot{\boldsymbol{\beta}} + (\mathbf{C}_e\mathbf{q}_e + \mathbf{g}_e) - (\hat{d}_{e1} + \hat{d}_{e2}\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_e\|)\text{sgn}(\boldsymbol{\nu})) \quad (44)$$

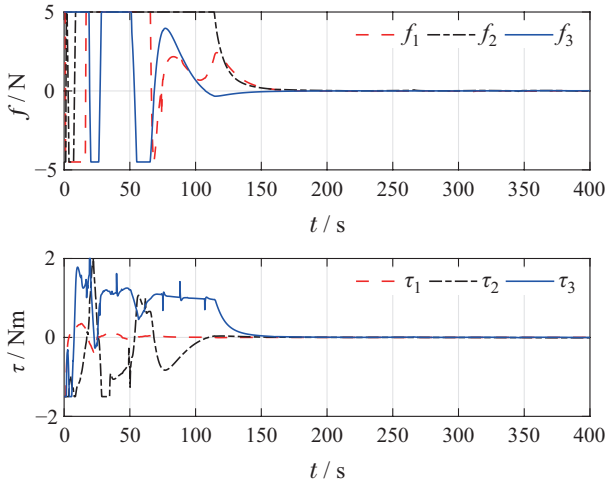


图4 控制器(19)的控制力和力矩曲线

Fig. 4 Control forces and torques curve of controller (19)

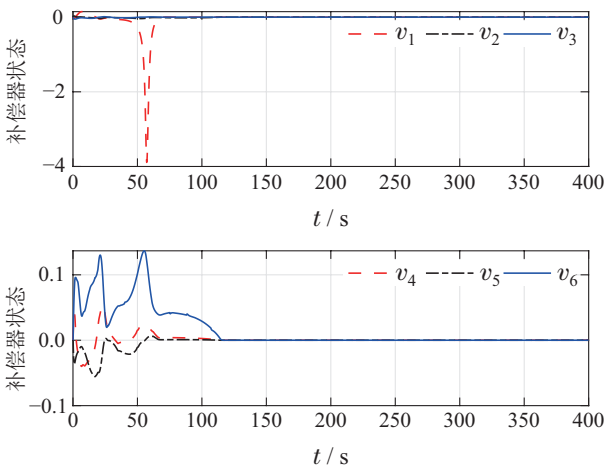


图5 控制器(19)的饱和补偿曲线

Fig. 5 Saturation compensation curve of controller (19)

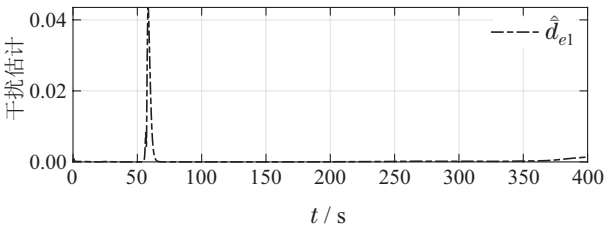


图6 控制器(19)的干扰上界估计结果

Fig. 6 Lumped disturbance observation errors simulation results of controller (19)

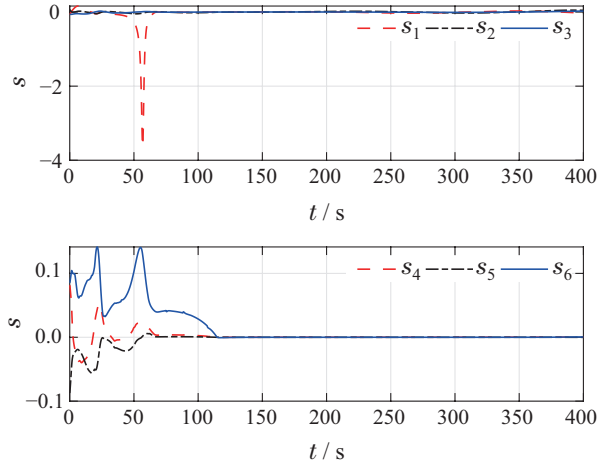
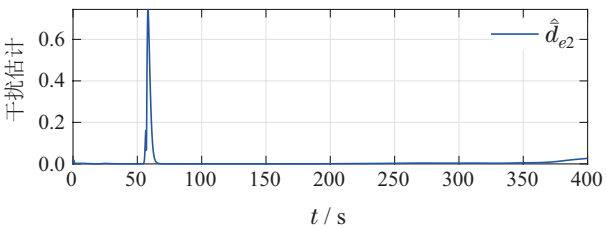


图7 控制器(19)滑模s变化曲线

Fig. 7 Sliding mode  $\mathbf{s}$  change curve of controller (19)

当控制器(44)的参数与控制器(19)相同时,得到仿真结果如图8-11所示. 通过和控制器(19)仿真结果图2-7的对比可以看出,两个控制器都能使得被控制对象达到控制要求,但是图2和图8的比较可以看出,控制器(19)不仅能够实现相对位置和速度的稳态性能,还可以保证它们在预设的范围内,而控制器(44)不能保证系统的预设瞬态性能. 对比图3和图9可知,控制器(19)保证了相对姿态和角速度的瞬态和稳态性能,而且收敛精度也比控制器(44)更高. 因此控制器(19)的性能明显优于控制器(44),验证了所提出的控制器的优越性.

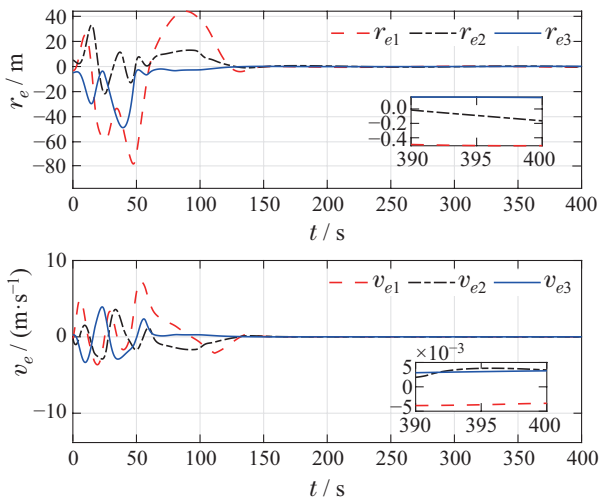
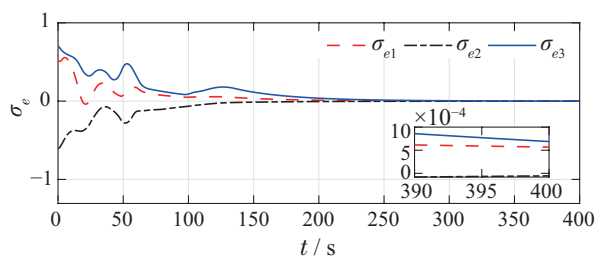


图8 控制器(44)的相对位置和速度曲线

Fig. 8 Relative position and velocity curve of controller (44)



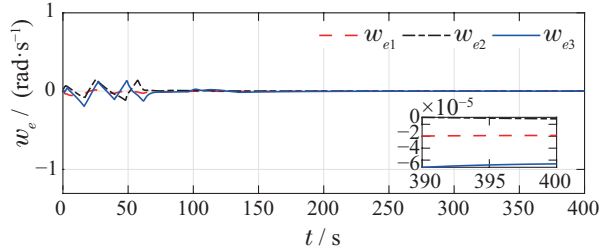


图 9 控制器(44)的相对姿态和角速度曲线

Fig. 9 Relative attitude and angular velocity curve of controller (44)

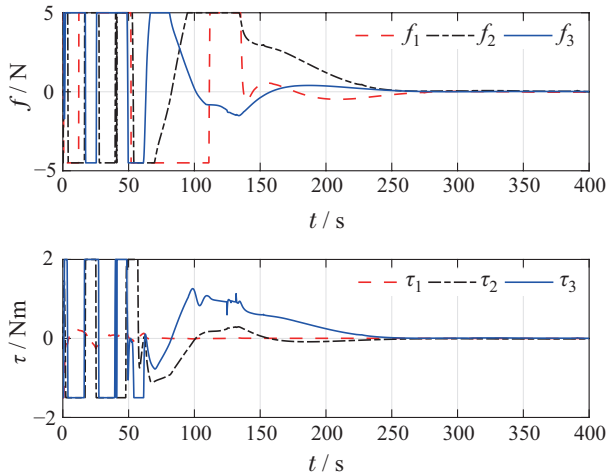


图 10 控制器(44)的控制力和力矩曲线

Fig. 10 Control forces and torques curve of controller (44)

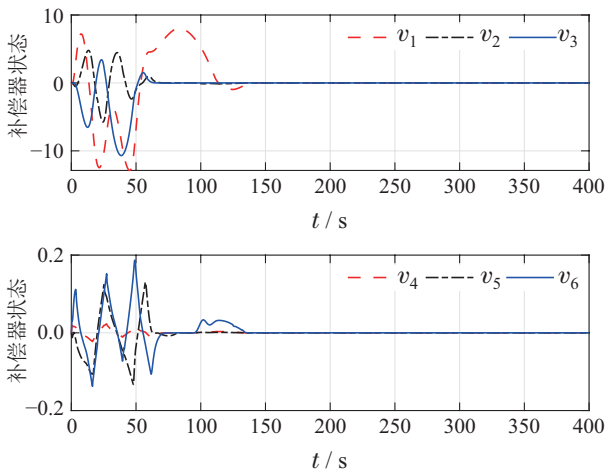


图 11 控制器(44)的饱和补偿曲线

Fig. 11 Saturation compensation curve of controller (44)

### 5 总结

本文针对两航天器特征点间位姿跟踪问题, 在输入饱和、全状态受限和时间约束的情况下, 提出了一种基于非奇异终端滑模的输入饱和全状态约束固定时间控制器。通过将固定时间饱和补偿器和基于预设性能函数的非奇异终端滑模控制器相结合, 可补偿执行器的饱和效应并保证系统的瞬态和稳态性能。在李雅普诺夫稳定性理论下严格证明了两特征点间的相对位姿误差可在固定时间内收敛到原点小邻域内。通

过近距离交会对接过程中的对接口相对位姿控制的仿真算例, 验证了所提出的控制算法的有效性。未来将进一步考虑含有参数不确定性的高精度相对位姿跟踪控制问题。

### 参考文献:

- [1] GOODMAN J L. History of space shuttle rendezvous and proximity operations. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2006, 43(5): 944 – 959.
- [2] TAN Chunlin, LIU Yongjian, YU Dengyun. Research on system of on-orbit spacecraft maintenance and servicing. *Spacecraft Engineering*, 2008, 17(3): 45 – 50. (谭春林, 刘永健, 于登云. 在轨维护与服务体系研究. *航天器工程*, 2008, 17(3): 45 – 50.)
- [3] HU Chunhe, CHEN Zongji. Optimal rendezvous path planning for multiple unmanned aerial vehicle on air refueling. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(10): 1400 – 1406. (胡春鹤, 陈宗基. 多无人机空中加油的最优会合航路规划. *控制理论与应用*, 2015, 32(10): 1400 – 1406.)
- [4] DU H B, LI S H. Finite-time attitude stabilization for a spacecraft using homogeneous method. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2012, 35(3): 740 – 748.
- [5] LU K, XIA Y. Adaptive attitude tracking control for rigid spacecraft with finite-time convergence. *Automatica*, 2013, 49(12): 3591 – 3599.
- [6] ZHAO L, JIA Y. Finite-time attitude tracking control for a rigid spacecraft using time-varying terminal sliding mode techniques. *International Journal of Control*, 2015, 88(6): 1150 – 1162.
- [7] WANG Hui, HU Qinglei, SHI Zhong, et al. Backstepping-based finite-time fault-tolerant attitude tracking control for spacecraft. *Journal of Astronautics*, 2015, 36(6): 1933 – 1939. (王辉, 胡庆雷, 石忠, 等. 基于反步法的航天器有限时间姿态跟踪容错控制. *航空学报*, 2015, 36(6): 1933 – 1939.)
- [8] YU J P, ZHAO L, SHI P. Finite-time command filtered backstepping control for a class of nonlinear systems. *Automatica*, 2018, 92: 173 – 180.
- [9] JIANG B Y, HU Q L, FRISWELL M I. Fixed-time rendezvous control of spacecraft with a tumbling target under loss of actuator effectiveness. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2016, 52(4): 1576 – 1586.
- [10] HUANG Y, JIA Y M. Robust adaptive fixed-time 6 DOF tracking control for spacecraft non-cooperative rendezvous. *The 36th Chinese Control Conference (CCC)*. Dalian, China: IEEE, 2017: 3153 – 3158.
- [11] HUANG Y, JIA Y M. Adaptive fixed-time six-DOF tracking control for noncooperative spacecraft fly-around mission. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2019, 27(4): 1796 – 1804.
- [12] DONG J W, LI C J, JIANG B Y, et al. Fixed-time nonsingular terminal sliding mode control for spacecraft rendezvous. *The 29th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*. Chongqing, China: IEEE, 2017: 5340 – 5345.
- [13] ZUO Z Y. Nonsingular fixed-time consensus tracking for second-order multi-agent networks. *Automatica*, 2015, 54(54): 305 – 309.
- [14] NI J K, LIU L, LIU C X, et al. Fast fixed-time nonsingular terminal sliding mode control and its application to chaos suppression in power system. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II-Express Briefs*, 2017, 64(2): 151 – 155.
- [15] WANG L Y, CHAI T Y, ZHAI L F. Neural-network-based terminal sliding mode control of robotic manipulators including actuator dynamics. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, 56(9): 3296 – 3304.

- [16] BECHLIOLIS C P, ROVITHAKIIS G A. Robust adaptive control of feedback linearizable MIMO nonlinear systems with prescribed performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(9): 2090 – 2099.
- [17] WEI C S, LUO J J, XU C, et al. Low-complexity stabilization control of combined spacecraft with an unknown captured object. *The IEEE 36th Chinese Control Conference*. Dalian, China: IEEE, 2017: 1075 – 1080.
- [18] FAN B, YANG Q M, SUN Y X, et al. Asymptotic tracking controller design for nonlinear systems with guaranteed performance. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 2018, 48(7): 2001 – 2011.
- [19] HAN S I, LEE J Y. Finite-time sliding surface constrained control for a robot manipulator with an unknown deadzone and disturbance. *ISA Transactions*, 2016, 65: 307 – 318.
- [20] ZHOU B, LIN Z L, DUAN G R. Lyapunov differential equation approach to elliptical orbital rendezvous with constrained controls. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2011, 34(2): 345 – 358.
- [21] CHEN M, TAO G, JIANG B. Dynamic surface control using neural networks for a class of uncertain nonlinear systems with input saturation. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2015, 26(9): 2086 – 2097.
- [22] XIA K W, HUO W. Disturbance observer based fault-tolerant control for cooperative spacecraft rendezvous and docking with input saturation. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 88(4): 2735 – 2745.
- [23] PUKDEBOON C. Anti-disturbance inverse optimal control for spacecraft position and attitude maneuvers with input saturation. *Advances in Mechanical Engineering*, 2016, 8(5): 1 – 14.
- [24] MA Y K, JI H B. Robust control for spacecraft rendezvous with disturbances and input saturation. *International Journal of Control Automation and Systems*, 2015, 13(2): 353 – 360.
- [25] SUN L, JIANG J J. Saturated adaptive relative motion coordination of docking ports in space close-range rendezvous. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2020, 56(6): 4889 – 4898.
- [26] POLYAKOV A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(8): 2106 – 2110.
- [27] CHEN C C, QIAN C J, LIN X Z, et al. Smooth output feedback stabilization for a class of nonlinear systems with time-varying powers. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 2017, 27(18): 5113 – 5128.
- [28] QIAN C J, LIN W. Smooth output feedback stabilization of planar systems without controllable/observable linearization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(12): 2068 – 2073.
- [29] YU S H, YU X H, STONIER R. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding modes. *The 6th International Conference of Information Fusion*. Cairns, Queensland, Australia: IEEE, 2003, 41(11): 1957 – 1964.

#### 作者简介:

孙亮 副教授, 博士, 目前研究方向为非线性系统控制、自适应控制、飞行器控制等研究, E-mail: liangsun@ustb.edu.cn;

王俊 硕士研究生, 目前研究方向为航天器控制研究, E-mail: wangjun\_ustb@163.cm.